МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОЦЕНКА ПРИРАЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА

© 2009 г.

О.А. Беляева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

oa_belyaeva@mail.ru

Поступила в редакцию 18.11.2008

Рассматривается задача Коши для одномерного волнового уравнения с абсолютно непрерывно зависящим от времени коэффициентом при второй производной по пространственной переменной. Приводится оценка приращения решения задачи Коши при возмущении коэффициента.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, приращение решения, управляемый старший коэффициент.

В статье рассматривается задача Коши для одномерного волнового уравнения с зависящим от времени коэффициентом при второй производной по пространственной переменной. Указанный старший коэффициент волнового уравнения, играющий роль управления, предполагается абсолютно непрерывным. Допустимыми считаются управления, принимающие значения из заданного отрезка положительной полуоси, с производными, равномерно ограниченными по модулю общей константой. Формулируется теорема единственности (теорема 1) и существования обобщенного решения задачи Коши – приводится формула явного представления этого решения функциональным рядом (теорема 2). Она позволяет дать конструктивную оценку приращения решения задачи Коши при возмущении управления (теорема 4).

Результаты данной статьи представляют интерес, например, для теории оптимального управления (вывод условий оптимальности, условий сохранения глобальной разрешимости при возмущении управления и т.д.). Так, оценка теоремы 4 использовалась при получении условий сохранения глобальной разрешимости задачи Коши для полулинейного волнового уравнения при возмущении старшего коэффициента, приведенных в [1]. Представление решения задачи Коши теоремы 2 удобно при изучении управляемой задачи Коши для полулинейного волнового уравнения методом [2] функциональных вольтерровых уравнений (см. [1, 3]). Заметим, что задачи оптимизации дифференциальных уравнений в частных производных с управлениями в старших коэффициентах естественными образом возникают в механике, акустике, электродинамике, теплотехнике (см., например, известные монографии [4, 5], где можно найти и обширную библиографию).

Пусть $\underline{u}$, $\overline{u}$, $\widetilde{u}$, T_1, T_2 – фиксированные неотрицательные числа, $0<\underline{u}\le\overline{u}$, $2\overline{u}T_1\le T_2$. Множество Π, задаваемое формулой

$$\left\{t\equiv\{t_1,t_2\}\in R^2:\overline{u}t_1\le t_2\le T_2-\overline{u}t_1, 0\le t_1\le T_1\right\},$$

играет далее роль основного множества изменения независимых переменных $t\equiv\{t_1,t_2\}\in R^2$. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$L_u[x](t)\equiv x''_{t_1t_1}-(u(t_1))^2x''_{t_2t_2}=z(t),\ t\in\Pi, \qquad (1)$$

$$x(0,t_2)=0,\ x'_{t_2}(0,t_2)=0 \text{ при } t_2\in[0,T_2], \qquad (2)$$

в которой $z(\cdot):\Pi\to R$ – заданная функция класса $L_\infty(\Pi)$, $u(t_1):[0,T_1]\to R$ – управление (варьируемая функция); допустимыми считаем управления $u(\cdot)$ из некоторого множества D, принадлежащего классу абсолютно непрерывных на отрезке $[0,T_1]$ функций, удовлетворяющих для $t_1\in[0,T_1]$ неравенствам $|u'(t_1)|\le\widetilde{u}$, $\underline{u}\le u(t_1)\le\overline{u}$.

Решение задачи (1), (2) естественно понимать в следующем обобщенном смысле. Обо-

значим через Г «нижнее основание» $\{t \in \partial П : t_1 = 0\}$ трапеции *П*. Для любых функций $x(\cdot) \in W_2^1(П)$, $u(\cdot) \in D$, $\eta(\cdot) \in W_2^1(П)$, $z(\cdot) \in L_\infty(П)$ положим $I[x(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot)] \equiv$
$\equiv \int\limits_П \{x'_{t_1}(t)\eta'_{t_1}(t) - (u(t_1))^2 x'_{t_2}(t)\eta'_{t_2}(t) + z(t)\eta(t)\}dt$.

Решением задачи (1), (2), отвечающим управлению $u(\cdot) \in D$ при данной $z(\cdot) \in L_\infty(П)$, назовем функцию $x(\cdot) \in W_\infty^1(П)$, такую, что $x(0, t_2) = 0$, $0 \le t_2 \le T_2$, а для любой $\eta(\cdot) \in$ $\in W_2^1(П)$, удовлетворяющей условию $\eta(t) = 0$ при $t \in \partial П \setminus Г$, выполняется равенство

$$I[x(\cdot),\ u(\cdot),\ \eta(\cdot),\ z(\cdot)] = 0\,. \qquad (3)$$

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *При каждом* $z(\cdot) \in L_\infty(П)$ *управлению* $u(\cdot) \in D$ *может отвечать не более одного решения* (1), (2).

Данное утверждение может быть доказано, например, аналогично тому, как доказывается теорема единственности решения первой краевой задачи для гиперболического уравнения в [6] (гл. 3, §1).

Сформулируем теорему существования для (1), (2).

Теорема 2. *При каждом* $z(\cdot) \in L_\infty(П)$ *любому управлению* $u(\cdot) \in D$ *отвечает решение задачи* (1), (2) (*обозначим его* $A_u[z](\cdot)$), *задаваемое сходящимся в норме* $W_\infty^1(П)$ *рядом*

$$A_u[z](t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_u^k [G_u[z]](t), \qquad (4)$$

$$z(\cdot) \in L_\infty(П),\ t \in П,$$

где $G_u[\cdot]$ *– оператор, определенный на элементах пространства* $L_\infty(П)$ *формулой*

$$G_u[z](t) \equiv \int\limits_{\Delta_u(t)} \frac{z(\xi)}{2u(\xi_1)} d\xi\ ,$$

$$z(\cdot) \in L_\infty(П),\ t \in П, \qquad (5)$$

$$\Delta_u(t) \equiv \left\{ \xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in R^2 : t_2 - \int\limits_{\xi_1}^{t_1} u(\eta)d\eta \le \xi_2 \le \right.$$
$$\left. \le t_2 + \int\limits_{\xi_1}^{t_1} u(\eta)d\eta,\ 0 \le \xi_1 \le t_1 \right\},\ t \in П,$$

$J_u[\cdot]$ *– оператор, определенный на элементах пространства* $W_\infty^1(П)$ *формулой*

$$J_u[w](t) = 2^{-1} \int\limits_{\Delta_u(t)} \left(\frac{1}{u(\xi_1)} \right)' w'_{\xi_1}(\xi)d\xi,, \qquad (6)$$

$$w(\cdot) \in W_\infty^1(П),\ t \in П.$$

Для каждого $u(\cdot) \in D$ *отображение* $A_u[\cdot] : L_\infty(П) \to L_\infty(П)$ *– линейный ограниченный оператор.*

Не приводя полного (достаточно громоздкого) доказательства теоремы 2, укажем лишь ключевые его моменты. Непосредственно проверяется, что $G_u[L_\infty(П)] \subset W_\infty^1(П)$, $J_u[W_\infty^1(П)] \subset W_\infty^1(П)$. Прямым вычислением доказывается равенство нулю предела $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|J_u^k\|}$, означающее квазинильпотентность оператора $J_u[\cdot] : W_\infty^1(П) \to W_\infty^1(П)$. Квазинильпотентность влечет сходимость ряда (4) в норме пространства $W_\infty^1(П)$ для любой фиксированной функции $z(\cdot) \in L_\infty(П)$. Непосредственной проверкой показывается, что ряд (4) дает обобщенное решение задачи (1), (2). При этом удобно сначала рассмотреть случай достаточно гладкой (например, бесконечно дифференцируемой) функции $z(\cdot)$. В этом случае ряд (4) дает решение в смысле «почти всюду» задачи (1), (2), что проверяется прямой подстановкой (выкладки упрощаются заменой независимых переменных t_1, t_2 переменными ξ_1, ξ_2, при которой главная часть уравнения принимает вид $x''_{\xi_1\xi_2}$).

В случае произвольно выбранной $z(\cdot) \in L_\infty(П)$ воспользуемся тем, что существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ бесконечно дифференцируемых на *П* функций z_n, сходящаяся к z в норме $L_2(П)$. Функция $x = x_n(t) \equiv$ $\equiv A_u[z_n](t), t \in П$, удовлетворяет тождеству (3) при $z = z_n$:

$$I[x_n(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot), z_n(\cdot)] = 0. \qquad (7)$$

Переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что функция $A_u[z](\cdot)$ есть решение (1), (2) при выбранном $z(\cdot)$. Указанный переход в (7) возможен, так как операторы $G_u : L_\infty(П) \to W_\infty^1(П)$, $J_u : W_\infty^1(П) \to W_\infty^1(П)$, $A_u : L_\infty(П) \to W_\infty^1(П)$ имеют, что проверяется непосредственно, задаваемые теми же формулами (5), (6), (4) расширения до линейных ограниченных операторов из $L_2(П)$ в $W_2^1(П)$, из $W_2^1(П)$ в $W_2^1(П)$ и из

$L_2(\Pi)$ в $W_2^1(\Pi)$, соответственно, причем расширение J_u квазинильпотентно.

При каждом $z(\cdot)\in L_\infty(\Pi)$ для разности решений $A_u[z](\cdot)$ и $A_{u_0}[z](\cdot)$, отвечающих управлениям $u(\cdot)\in D$, $u_0(\cdot)\in D$, справедлива оценка

$$\left\|A_u[z]-A_{u_0}[z]\right\|_{L_\infty(\Pi)}\le\|z\|_{L_\infty(\Pi)}r(u,u_0), \qquad (8)$$

где $r(u,u_0)\equiv\left\|A_u-A_{u_0}\right\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}$.

Применение неравенства (8) в конкретных ситуациях для оценки приращения решения $\left(A_u[z]-A_{u_0}[z]\right)$ при том или ином возмущении $(u-u_0)$ коэффициента u_0 требует оценки величины $r(u,u_0)$. Представление (4) оператора $A_u[z]$ позволяет получить конструктивные оценки величины $r(u,u_0)$. Приведем пример такой оценки. Снабдим пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0,T_1]$ функций $u(\cdot)$ с ограниченной производной, которому принадлежит множество допустимых управлений, нормой $\|u(\cdot)\|_{ac,\infty}\equiv\|u(\cdot)\|_{C[0,T_1]}+\|u'(\cdot)\|_{L_\infty[0,T_1]}$.

Теорема 3. *Существует величина* Ξ, *зависящая от* $\overline{u},\underline{u},T_1$, *такая, что при любых* $u\in D$, $u_0\in D$ *справедлива оценка*

$$r(u,u_0)\le\Xi\|u-u_0\|_{ac,\infty}. \qquad (9)$$

Для доказательства теоремы 3 можно воспользоваться представлением

$$J_u^m[G_u[z]](t)=\frac{1}{2^{m+1}}\int\limits_{\Delta_u(t)}\left\{\frac{u'(\xi_1)}{u(\xi_1)}\int\limits_0^{\xi_1}\frac{u'(\eta^1)}{u(\eta^1)}d\eta^1\times\right.$$
$$\times\int\limits_0^{\eta^1}\frac{u'(\eta^2)}{u(\eta^2)}d\eta^2\ldots\int\limits_0^{\eta^{m-2}}\frac{u'(\eta^{m-1})}{u(\eta^{m-1})}d\eta^{m-1}\int\limits_0^{\eta^{m-1}}\frac{d\eta^m}{u(\eta^m)}\times$$
$$\left.\times\left[\sum_{i=1}^{2^m}z\left(\eta^m,\xi_2+\langle e(u,m),l(i,m)\rangle\right)\right]\right\}d\xi,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в R^m, $e(u,m)\in R^m$ – вектор, определяемый формулой

$$e(u,m)=\left(\int\limits_{\eta^1}^{\xi_1}u(\theta)d\theta,\ \int\limits_{\eta^2}^{\eta^1}u(\theta)d\theta,\ \ldots,\ \int\limits_{\eta^m}^{\eta^{m-1}}u(\theta)d\theta\right),$$

и $\{l(i,m)\}_{i=1}^{2^m}$ – семейство всех вершин m-мерного куба $\Pi_m=[-1,1]^m$.

Справедлива оценка

$$\left\|J_u^m[G_u]-J_{u_0}^m[G_{u_0}]\right\|_{L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)}\le K^{m+1}(T_1)^{m+2}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{(m+1)!}+\frac{2M+1}{m!}\right\}\|u-u_0\|_{ac,\infty},$$

где $K=\max\left\{\frac{\widetilde{u}}{\underline{u}},\frac{1}{\underline{u}}\right\}$, $M=\max\{\overline{u},\overline{u}K\}$, откуда и получаем неравенство (9), в котором $\Xi=e^{KT_1}T_1(KT_1(1+2M)+1)-T_1$.

Теорема 3 вместе с неравенством (8) дает следующую оценку приращения решения задачи (1), (2) при варьировании управления.

Теорема 4. *Существует величина* Ξ_1, *зависящая от* $\overline{u},\underline{u},T_1$, *такая, что при каждом* $z(\cdot)\in L_\infty(\Pi)$ *для любых* $u\in D$, $u_0\in D$ *имеем* $\left\|A_u[z]-A_{u_0}[z]\right\|_{L_\infty(\Pi)}\le\Xi_1\|z\|_{L_\infty(\Pi)}\|u-u_0\|_{ac,\infty}$.

Работа выполнена под руководством проф. В.И. Сумина. Поддержка грантом РФФИ (проект 07-01-00495).

Список литературы

1. Беляева О.А., Сумин В.И. // Вестник Тамбовского ун-та. Серия Естественные и технические науки. Тамбов: Изд-во Тамбовского ун-та, 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 410–412.
2. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
3. Беляева О.А., Степанова О.А., Сумин В.И. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород: ННГУ, 2006. Вып. 3(32). С. 89–93.
4. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. Киев: Наукова Думка, 1979. 212 с.
5. Бабе Г.Д., Гусев Е.Л. Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987. 216 с.
6. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953. 279 с.

AN ESTIMATE OF THE SOLUTION INCREMENT IN THE CAUCHY PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION AT THE VARIATION OF THE LEADING COEFFICIENT

O.A. Belyaeva

A Cauchy problem is considered for the one-dimensional wave equation with an absolutely continuous time-dependent coefficient for the second spatial derivative. An estimate is given of the solution increment in the Cauchy problem at the variation of the leading coefficient.

Keywords: wave equation, Cauchy problem, solution increment, variable leading coefficient.