УДК 519.612:004.021

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЕГО УСТОЙЧИВОСТИ

Е.Н. Акимова

Институт математики и механики УрО РАН

aen@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 24.12.2008

Предлагается прямой параллельный алгоритм для решения систем уравнений с пятидиагональными матрицами коэффициентов. Проведено исследование корректности и устойчивости параллельного алгоритма для систем уравнений с переменными и постоянными коэффициентами на интервалах распараллеливания в зависимости от соотношения коэффициентов исходной системы. Предложено использование параллельного алгоритма для решения сеточной задачи для бигармонического уравнения.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, системы с пятидиагональными матрицами, диагональное преобладание, корректность и устойчивость.

Введение

В работе [1] был предложен алгоритм распараллеливания прогонки для решения краевой задачи для трехточечного разностного уравнения на отрезке. Основная идея алгоритма заключается в разбиении исходного отрезка на интервалы распараллеливания. В узлах разбиения искомые неизвестные выбираются в качестве параметрических. Относительно параметрических неизвестных строится редуцированная система уравнений.

После решения данной системы остальные искомые неизвестные выражаются через параметрические и находятся на интервалах распараллеливания независимо.

В работе [2] алгоритм распараллеливания трехточечной прогонки исследовался с точки зрения его корректности и устойчивости в зависимости от соотношения коэффициентов для исходной системы уравнений.

В данной работе алгоритм распараллеливания трехточечной прогонки обобщается для решения систем уравнений с пятидиагональными матрицами коэффициентов общего вида. Такие системы возникают при аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка и при реализации разностных схем для уравнений в частных производных. Алгоритм распараллеливания пятиточечной прогонки построен для случая разбиения отрезка на произвольное число пересекающихся интервалов. В этом случае редуцированная система уравнений представляет собой систему с семидиагональной матрицей коэффициентов. Проводится исследование корректности и устойчивости параллельного алгоритма для систем уравнений с переменными и постоянными коэффициентами на интервалах распараллеливания. Предложено использование параллельного алгоритма при решении сеточной задачи для бигармонического уравнения.

Построение параллельного алгоритма

Рассмотрим систему уравнений с пятидиагональными матрицами коэффициентов следующего вида:

$$\begin{cases} C_0Y_0 - D_0Y_1 + E_0Y_2 = F_0,\ i=0; \\ -B_1Y_0 + C_1Y_1 - D_1Y_2 + E_1Y_3 = F_1,\ i=1; \\ A_iY_{i-2} - B_iY_{i-1} + C_iY_i - D_iY_{i+1} + E_iY_{i+2} = F_i, \\ i = 2, ..., n-1; \\ A_nY_{n-2} - B_nY_{n-1} + C_nY_n - D_nY_{n+1} = F_n,\ i=n; \\ A_{n+1}Y_{n-1} - B_{n+1}Y_n + C_{n+1}Y_{n+1} = F_{n+1},\ i=n+1. \end{cases} \quad (1)$$

Исходный отрезок $(0, n+1)$ разобьем на L пересекающихся интервалов вида $(k, k+m)$ и $(k+1, k+m+1)$, $k = 0, m, ..., n-m$, так, что $n+1 = L\cdot m+1$ (рис. 1).

Точки разбиения отрезка $k, k+1$, $k=0, m, ..., n$, выберем в качестве узлов распараллеливания, а неизвестные в узлах Y_k и Y_{k+1} – в качестве параметрических.

Относительно неизвестных в узлах построим редуцированную систему уравнений. Для этого введем оператор

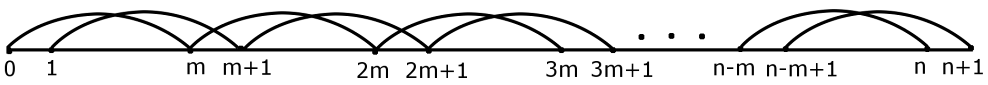

Рис. 1. Разбиение отрезка на пересекающиеся интервалы

$$\Delta_h Y_i \equiv A_i Y_{i-2} - B_i Y_{i-1} + C_i Y_i - D_i Y_{i+1} + E_i Y_{i+2}$$

и на интервалах $(k, k+m+1)$, $k = 0, m, ..., n-m$, рассмотрим задачи

$$\begin{array}{lllll}
\Delta_h U_i = 0, & U_k = 1, & U_{k+1} = 0, & U_{k+m} = 0, & U_{k+m+1} = 0, \\
\Delta_h V_i = 0, & V_k = 0, & V_{k+1} = 1, & V_{k+m} = 0, & V_{k+m+1} = 0, \\
\Delta_h P_i = 0, & P_k = 0, & P_{k+1} = 0, & P_{k+m} = 1, & P_{k+m+1} = 0, \\
\Delta_h Q_i = 0, & Q_k = 0, & Q_{k+1} = 0, & Q_{k+m} = 0, & Q_{k+m+1} = 1, \\
\Delta_h W_i = F_i, & W_k = 0, & W_{k+1} = 0, & W_{k+m} = 0, & W_{k+m+1} = 0,
\end{array} \quad (2)$$

где $i = k+2, ..., k+m-1$.

Если U_i, V_i, P_i, Q_i, W_i — решение задач (2) на $(k, k+m+1)$, то по принципу суперпозиции решение задачи (1) на $(k, k+m+1)$ будет иметь вид

$$Y_i = Y_k U_i + Y_{k+1} V_i + Y_{k+m} P_i + Y_{k+m+1} Q_i + W_i. \quad (3)$$

После подстановки выражения (3) в точках $k, k+1$, $k = 0, m, ..., n$, в исходную систему уравнений (1) получим редуцированную систему уравнений, связывающую узловые неизвестные Y_k и Y_{k+1}, следующего вида

$$\begin{cases}
\overline{C}_0 Y_0 - \overline{D}_0 Y_1 + \overline{E}_0 Y_m - \overline{H}_0 Y_{m+1} = \overline{F}_0, \\
-\overline{B}_1 Y_0 + \overline{C}_1 Y_1 - \overline{D}_1 Y_m + \overline{E}_1 Y_{m+1} - 0 \cdot Y_{2m} = \overline{F}_1, \\
0 \cdot Y_{k-2m+1} + \overline{A}_k Y_{k-m} - \overline{B}_k Y_{k-m+1} + \overline{C}_k Y_k - \\
- \overline{D}_k Y_{k+1} + \overline{E}_k Y_{k+m} - \overline{H}_{k+m+1} Y_{k+m+1} = \overline{F}_k, \\
k = m,\ 2m,\ ...,\ n-m, \\
-\overline{G}_{k+1} Y_{k-m} + \overline{A}_k Y_{k-m} - \overline{B}_{k+1} Y_k + \overline{C}_{k+1} Y_{k+1} - \\
- \overline{D}_{k+1} Y_{k+m} + \overline{E}_{k+1} Y_{k+m+1} - 0 \cdot Y_{k+2m} = \overline{F}_{k+1}, \\
k = m,\ 2m,\ ...,\ n-m, \\
0 \cdot Y_{n-2m+1} + \overline{A}_n Y_{n-m} - \overline{B}_n Y_{n-m+1} + \overline{C}_n Y_n = \overline{F}_n, \\
-\overline{G}_{n+1} Y_{n-m} + \overline{A}_{n+1} Y_{n-m+1} - \overline{B}_{n+1} Y_n + \\
+ \overline{C}_{n+1} Y_{n+1} = \overline{F}_{n+1}.
\end{cases} \quad (4)$$

Коэффициенты редуцированной системы (4) выражаются через решения задач (2) следующим образом:

$$\begin{gathered}
\overline{C}_0 = C_0 + E_0 U_2,\ \overline{D}_0 = D_0 - E_0 V_2, \\
\overline{E}_0 = E_0 P_2,\ \overline{H}_0 = -E_0 Q_2, \\
\overline{B}_1 = B_1 + D_1 U_2 - E_1 U_3,\ \overline{C}_1 = C_1 - D_1 V_2 + E_1 V_3, \\
\overline{D}_1 = D_1 P_2 - E_1 P_3,\ \overline{E}_1 = E_1 Q_3 - D_1 Q_2, \\
\overline{A}_k = A_k U_{k-2} - B_k U_{k-1},\ \overline{B}_k = B_k V_{k-1} - A_k V_{k-2}, \\
\overline{C}_k = C_k + A_k P_{k-2} - B_k P_{k-1} + E_k U_{k+2}, \\
\overline{D}_k = D_k + B_k Q_{k-1} - A_k Q_{k-2} - E_k V_{k+1}, \\
\overline{E}_k = E_k P_{k+2},\ \overline{H}_k = -E_k Q_{k+2}, \\
\overline{G}_{k+1} = -A_{k+1} U_{k-1},\ \overline{A}_{k+1} = A_{k+1} V_{k-1}, \\
\overline{B}_{k+1} = B_{k+1} - A_{k+1} P_{k-1} + D_{k+1} U_{k+2} - E_{k+1} U_{k+3}, \\
\overline{C}_{k+1} = C_{k+1} + A_{k+1} Q_{k-1} - D_{k+1} V_{k+2} + E_{k+1} V_{k+3}, \\
\overline{D}_{k+1} = D_{k+1} P_{k+2} - E_{k+1} P_{k+3}, \\
\overline{E}_{k+1} = E_{k+1} Q_{k+3} - D_{k+1} Q_{k+2}, \\
\overline{A}_n = A_n U_{n-2} - B_n U_{n-1},\quad \overline{B}_n = B_n V_{n-1} - A_n V_{n-2}, \\
\overline{C}_n = C_n + A_n P_{n-2} - B_n P_{n-1}, \\
\overline{D}_n = D_n + B_n Q_{n-1} - A_n Q_{n-2}, \\
\overline{G}_{n+1} = -A_{n+1} U_{n-1},\quad \overline{A}_{n+1} = A_{n+1} V_{n-1}, \\
\overline{B}_{n+1} = B_{n+1} - A_{n+1} P_{n-1},\quad \overline{C}_{n+1} = C_{n+1} + A_{n+1} Q_{n-1}, \\
\overline{F}_0 = H_0 - E_0 W_2,\quad \overline{F}_1 = D_1 W_2 - E_1 W_3 + H_1, \\
\overline{F}_k = H_k - A_k W_{k-2} + B_k W_{k-1} + D_k W_{k+1} - E_k W_{k+2}, \\
\overline{F}_{k+1} = H_{k+1} - A_{k+1} W_{k-1} + B_{k+1} W_k + D_{k+1} W_{k+2} - \\
- E_{k+1} W_{k+3}, \\
\overline{F}_n = H_n - A_n W_{n-2} + B_n W_{n-1} + D_n W_{n+1}, \\
\overline{F}_{n+1} = H_{n+1} - A_{n+1} W_{n-1} + B_{n+1} W_n.
\end{gathered} \quad (5)$$

Система уравнений (4) представляет собой систему уравнений с семидиагональной матрицей коэффициентов, в каждой строке которой один из семи элементов, находящийся либо слева, либо справа от главной диагонали, является нулевым.

После вычисления параметров Y_k и Y_{k+1} остальные искомые неизвестные находятся в каждом из L интервалов распараллеливания независимо по формуле (3).

Параллельный алгоритм состоит из следующих шагов:

$$(2) \to (4) \to (3).$$

Задачи (2) и (4) могут быть решены методом исключения Гаусса для пятиточечных и семиточечных систем уравнений, соответственно. В работе [3] приведен вывод формул метода пятиточечной прогонки для системы вида (1). Формулы метода прогонки для решения систем уравнений с семидиагональной матрицей коэффициентов (4) выводятся аналогичным образом.

Система уравнений (1) на интервалах $(k,k+m+1)$, $k=0,m,...,n-m$, содержащая параметрические неизвестные $Y_k, Y_{k+1}, Y_{k+m}, Y_{k+m+1}$, имеет вид

$$\begin{cases} C_{k+2}Y_{k+2}-D_{k+2}Y_{k+3}+E_{k+2}Y_{k+4}= \\ =F_{k+2}-A_{k+2}Y_k+B_{k+2}Y_{k+1}, \\ -B_{k+3}Y_{k+2}+C_{k+3}Y_{k+3}-D_{k+3}Y_{k+4}+ \\ +E_{k+3}Y_{k+5}=F_{k+3}-A_{k+3}Y_{k+1}, \\ A_iY_{i-2}-B_iY_{i-1}+C_iY_i-D_iY_{i+1}+E_iY_{i+2}=F_i, \\ i=k+4,...,k+m-3; \\ A_{k+m-2}Y_{k+m-4}-B_{k+m-2}Y_{k+m-3}+C_{k+m-2}Y_{k+m-2}- \\ -D_{k+m-2}Y_{k+m-1}=F_{k+m-2}-E_{k+m-2}Y_{k+m}, \\ A_{k+m-1}Y_{k+m-3}-B_{k+m-1}Y_{k+m-2}+C_{k+m-1}Y_{k+m-1}= \\ =F_{k+m-1}+D_{k+m-1}Y_{k+m}-E_{k+m-1}Y_{k+m+1}. \end{cases} \quad (6)$$

С учетом структуры системы (6) приведем формулы метода прогонки для решения задач (2) на интервалах распараллеливания $(k,k+m+1)$, $k=0,m,...,n-m$.

Обозначим через α_{k+i} и β_{k+i} первый и второй прогоночный коэффициенты алгоритма пятиточечной прогонки для всех задач из (2), $\gamma_{k+i}, \delta_{k+i}, \varepsilon_{k+i}, \omega_{k+i}, \xi_{k+i}$ – третий прогоночный коэффициент для первой, второй, третьей, четвертой и пятой задачи из (2), соответственно.

Тогда формулы прямого хода прогонки имеют вид:

$$\alpha_{k+3}=\frac{D_{k+2}}{C_{k+2}}, \quad \alpha_{k+4}=\frac{C_{k+2}D_{k+3}-E_{k+2}B_{k+3}}{C_{k+2}C_{k+3}-D_{k+2}B_{k+3}},$$

$$\alpha_{k+i}=\frac{D_{k+i-1}+\beta_{k+i-1}\left(A_{k+i-1}\alpha_{k+i-2}-B_{k+i-1}\right)}{\Delta_{k+i-1}},$$

$$\Delta_{k+i-1}\equiv C_{k+i-1}-A_{k+i-1}\beta_{k+i-2}+ +\alpha_{k+i-1}(A_{k+i-1}\alpha_{k+i-2}-B_{k+i-1}),$$

$$\beta_{k+3}=\frac{E_{k+2}}{C_{k+2}}, \quad \beta_{k+4}=\frac{C_{k+2}E_{k+3}}{C_{k+2}C_{k+3}-D_{k+2}B_{k+3}},$$

$$\beta_{k+i}=\frac{E_{k+i-1}}{\Delta_{k+i-1}}, \qquad i=5,6,...,m;$$

$$\gamma_{k+3}=-\frac{A_{k+2}}{C_{k+2}}, \quad \gamma_{k+4}=-\frac{A_{k+2}B_{k+3}}{C_{k+2}C_{k+3}-D_{k+2}B_{k+3}},$$

$$\gamma_{k+i}=\frac{-A_{k+i-1}\gamma_{k+i-2}-\gamma_{k+i-1}\left(A_{k+i-1}\alpha_{k+i-2}-B_{k+i-1}\right)}{\Delta_{k+i-1}},$$

$$\delta_{k+3}=\frac{B_{k+2}}{C_{k+2}}, \quad \delta_{k+4}=\frac{-C_{k+2}A_{k+3}+C_{k+2}C_{k+3}}{C_{k+2}C_{k+3}-D_{k+2}B_{k+3}},$$

$$\delta_{k+i}=\frac{-A_{k+i-1}\delta_{k+i-2}-\delta_{k+i-1}\left(A_{k+i-1}\alpha_{k+i-2}-B_{k+i-1}\right)}{\Delta_{k+i-1}},$$

$$\varepsilon_{k+3}=0, \quad \varepsilon_{k+4}=0, \ldots, \quad \varepsilon_{k+m-2}=0,$$

$$\varepsilon_{k+m-1}=\frac{-E_{k+m-1}}{\Delta_{k+m-2}}=-\beta_{k+m-1},$$

$$\varepsilon_{k+m}=\frac{D_{k+m-1}-\varepsilon_{k+m-1}\left(A_{k+m-1}\alpha_{k+m-2}-B_{k+m-1}\right)}{\Delta_{k+m-1}}=\alpha_{k+m},$$

$$\omega_{k+3}=0, \quad \omega_{k+4}=0, \ldots, \quad \omega_{k+m-1}=0,$$

$$\omega_{k+m}=\frac{-E_{k+m-1}}{\Delta_{k+m-1}}=-\beta_{k+m}, \quad (7)$$

$$\xi_{k+3}=\frac{F_{k+2}}{C_{k+2}}, \quad \xi_{k+4}=\frac{C_{k+2}F_{k+3}+F_{k+2}B_{k+3}}{C_{k+2}C_{k+3}-D_{k+2}B_{k+3}},$$

$$\xi_{k+i}=\frac{F_{k+i-1}-A_{k+i-1}\xi_{k+i-2}-\xi_{k+i-1}\left(A_{k+i-1}\alpha_{k+i-2}-B_{k+i-1}\right)}{\Delta_{k+i-1}}.$$

Формулы обратного хода прогонки имеют вид:

$$U_{k+m-1}=\gamma_{k+m}, \qquad U_{k+m-2}=\alpha_{k+m-1}U_{k+m-1}+\gamma_{k+m-1},$$

$$U_i=\alpha_{i+1}U_{i+1}-\beta_{i+1}U_{i+2}+\gamma_{i+1},$$

$$V_{k+m-1}=\delta_{k+m}, \qquad V_{k+m-2}=\alpha_{k+m-1}V_{k+m-1}+\delta_{k+m-1},$$

$$V_i=\alpha_{i+1}V_{i+1}-\beta_{i+1}V_{i+2}+\delta_{i+1},$$

$$P_{k+m-1}=\alpha_{k+m}, \qquad P_{k+m-2}=\alpha_{k+m-1}\alpha_{k+m}-\beta_{k+m-1},$$

$$P_i=\alpha_{i+1}P_{i+1}-\beta_{i+1}P_{i+2},$$

$$Q_{k+m-1}=-\beta_{k+m}, \quad Q_{k+m-2}=-\alpha_{k+m-1}\beta_{k+m},$$

$$Q_i=\alpha_{i+1}Q_{i+1}-\beta_{i+1}Q_{i+2}, \quad i=k+m-3,...,k+2;$$

$$W_{k+m-1}=\xi_{k+m}, \qquad W_{k+m-2}=\alpha_{k+m-1}W_{k+m-1}+\xi_{k+m+1},$$

$$W_i=\alpha_{i+1}W_{i+1}-\beta_{i+1}W_{i+2}+\xi_{i+1}.$$

Исследование устойчивости параллельного алгоритма

Займемся исследованием устойчивости алгоритма решения системы уравнений (1). Покажем, что если для исходной системы (1) с переменными коэффициентами выполняются достаточные признаки корректности и устойчивости метода решения системы – пятиточечной прогонки, то аналогичные признаки, усиливаясь, выполняются и для редуцированной системы уравнений (4).

Выпишем достаточные признаки корректности и устойчивости метода решения системы — пятиточечной прогонки. Для этого приведем исходную систему уравнений (1) к системе трехточечных векторных уравнений следующим образом.

Введем следующие векторы и матрицы:

$$\bar{Y}_i = \begin{pmatrix} Y_{i+1} \\ Y_i \\ Y_{i-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_{i-1} = \begin{pmatrix} Y_i \\ Y_{i-1} \\ Y_{i-2} \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}_{i+1} = \begin{pmatrix} Y_{i+2} \\ Y_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} H_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{pmatrix} D_i - C_i & B_i & \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_i = \begin{pmatrix} E_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из СЛАУ (1) получим систему трехточечных векторных уравнений вида

$$\tilde{A}_i \bar{Y}_{i-1} - \tilde{C}_i \bar{Y}_i + \tilde{B}_i \bar{Y}_{i+1} = \tilde{F}_i. \qquad (8)$$

Систему уравнений (8) можно решать методом матричной прогонки.

Определим

$$\|\tilde{A}\| = n \cdot \max_{ij} |a_{ij}|, \qquad (9)$$

где n – размерность матриц $\tilde{A}_i$, $\tilde{C}_i$, $\tilde{B}_i$.

Достаточным условием, гарантирующим корректность и устойчивость метода матричной прогонки по А.А. Самарскому, является следующее [3]

$$\|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{A}_i\| + \|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{B}_i\| \le 1, \qquad (10)$$

причем в (10) хотя бы одно из неравенств — строгое.

Покажем, что из (10) следует неравенство

$$\|\tilde{C}_i\| \ge \|\tilde{A}_i\| + \|\tilde{B}_i\|. \qquad (11)$$

Действительно,

$$\|\tilde{A}_i\| + \|\tilde{B}_i\| = \|\tilde{C}_i\tilde{C}_i^{-1}\tilde{A}_i\| + \|\tilde{C}_i\tilde{C}_i^{-1}\tilde{B}_i\| \le$$

$$\le \|\tilde{C}_i\| \cdot \|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{A}_i\| + \|\tilde{C}_i\| \cdot \|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{B}_i\| =$$

$$= \|\tilde{C}_i\| \cdot \left\{ \|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{A}_i\| + \|\tilde{C}_i^{-1}\tilde{B}_i\| \right\} \le \|\tilde{C}_i\| \cdot 1 = \|\tilde{C}_i\|.$$

Следовательно, для системы (8) при условии (10) справедливо и условие (11), причем хотя бы одно из неравенств (11) — строгое. Из (9) следует, что выполнение (11) для (8) эквивалентно выполнению следующего условия для системы (1)

$$\max_i \left\{ |D_i|, |C_i|, |B_i|, 2 \right\} \ge \max_i \left\{ |A_i|, 1 \right\} +$$
$$+ \max_i \left\{ |E_i|, 1 \right\}. \qquad (12)$$

Пусть при условии (10)

$$\max_i \left\{ |D_i|, |C_i|, |B_i|, 2 \right\} = |C_i|,$$
$$|A_i| \ge 1, \quad |E_i| \ge 1, \qquad (13)$$

тогда с учетом (13) получим наиболее слабый достаточный признак устойчивости для системы (1): $|C_i| \ge |A_i| + |E_i|$.

Окончательно, при условии (13) достаточные признаки устойчивости для системы (1) располагаются в порядке ослабления следующим образом.

Признак A:

$|C_i| \ge |A_i| + |B_i| + |D_i| + |E_i| + \delta, \quad \delta > 0.$

Признак B:

1. $|C_i| \ge |A_i| + |B_i| + |E_i| + \delta, \quad \delta > 0;$

или 2. $|C_i| \ge |A_i| + |D_i| + |E_i| + \delta, \quad \delta > 0,$

где $C_i = \max\left\{ |B_i|, |C_i|, |D_i| \right\}$.

Признак C:

$|C_i| \ge |A_i| + |E_i| + \delta, \quad \delta > 0.$

Нетрудно получить соотношение признаков $A \to B \to C$.

Аналогично [4], достаточные признаки устойчивости для системы (4) имеют вид:

Признак $\bar{A}$:

1. $|\bar{C}_k| \ge |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{D}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0;$

и 2. $|\bar{C}_{k+1}| \ge |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{B}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| +$
$+ |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0.$

Признак $\bar{B}$:

1. $|\bar{C}_k| \ge |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0;$

и 2. $|\bar{C}_{k+1}| \ge |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta},$
$\bar{\delta} > 0.$

Признак $\bar{C}$:

1. $|\bar{C}_k| \ge |\bar{A}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0;$

и 2. $|\bar{C}_{k+1}| \ge |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0.$

Теорема 1. Имеют место следующие соотношения признаков:

$$A \to \bar{A}, \quad B(1) \to \bar{A}(2), \quad B(1) \to \bar{B}(1),$$
$$B(2) \to \bar{A}(1), \quad B(2) \to \bar{B}(2), \quad C \to \bar{C}.$$

Теперь рассмотрим систему пятиточечных уравнений с постоянными коэффициентами S, P, R, Q, T во внутренних точках интервалов распараллеливания $(k, k+m+1)$, $k = 0, m, ..., n-m$, следующего вида

$$\begin{cases} C_0Y_0 - D_0Y_1 + E_0Y_2 = F_0,\ i = 0; \\ B_1Y_0 + C_1Y_1 - D_1Y_2 + E_1Y_3 = F_1, \\ i = 1; \\ SY_{i-2} - PY_{i-1} + RY_i - QY_{i+1} + \\ + TY_{i+2} = F_i,\ i = k+2, ..., k+m-1; \\ A_kY_{k-2} - B_kY_{k-1} + C_kY_k - D_kY_{k+1} + \\ + E_kY_{k+2} = F_k,\ k = m,\ m+1,\ ...,\ n-m+1; \\ A_nY_{n-2} - B_nY_{n-1} + C_nY_n - D_nY_{n+1} = F_n,\quad i = n; \\ A_{n+1}Y_{n-1} - B_{n+1}Y_n + C_{n+1}Y_{n+1} = F_{n+1},\ i = n+1. \end{cases} \tag{14}$$

Для решения системы (14) используем описанный выше алгоритм распараллеливания пятиточечной прогонки. В результате получим вспомогательную систему уравнений вида (4) с коэффициентами вида (5). Задачи вида (2) записываются аналогично случаю решения системы с переменными коэффициентами (1). Рассматриваемый оператор $\Delta_h Y_i$ имеет вид:

$$\Delta_h Y_i \equiv SY_{i-2} - PY_{i-1} + RY_i - QY_{i+1} + TY_{i+2}.$$

Сделаем основное предположение. Пусть внутри интервалов распараллеливания $(k, k+m+1)$ в точках $i = k+2, ..., k+m-1$ для системы (14) выполняется условие

$$|R| \ge |S| + |P| + |Q| + |T| + \delta, \quad \delta > 0. \tag{15}$$

Это же условие выполняется и для соответствующих задач (2), и они решаются устойчивым методом пятиточечной прогонки. Рассмотрим два случая.

1. В изолированных точках – узлах распараллеливания $k,\ k+1$ системы (14) выполняется один из рассмотренных достаточных признаков, тогда справедлива сформулированная выше теорема 1 об усилении признаков для редуцированной системы (4).

2. В изолированных точках $k,\ k+1$ системы (14) ни один из признаков не выполняется.

Тогда при определенном соотношении коэффициентов системы (14) редуцированная система (4) является системой с диагональным преобладанием, т.е. для нее выполняется признак $\bar{A}$, она решается методом семиточечной прогонки, причем решение устойчиво.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если U_i, V_i, P_i, Q_i, W_i — решение задач (2) на $(k, k+m+1)$ при условиях $|R| \ge |S| + |P| + |Q| + |T| + \delta,\ \delta > 0,\ R^2 < |PQ(P+Q)|$ и S, P, R, Q, T одного знака, тогда на интервале $(k, k+m+1)$ имеют место неравенства

$$|U_{k+2}| - |P_{k+2}| \ge \left|\frac{S}{R}\right| > 0, \quad |U_{k+3}| - |P_{k+3}| > 0,$$

$$|V_{k+2}| - |Q_{k+2}| + |U_{k+3}| - |P_{k+3}| \ge \left|\frac{P}{R}\right| > 0, \tag{16}$$

$$|P_{k+m-1}| - |U_{k+m-1}| + |P_{k+m-2}| - |U_{k+m-2}| \ge \left|\frac{Q}{R}\right| > 0,$$

$$|Q_{k+m-1}| - |V_{k+m-1}| \ge \left|\frac{T}{R}\right| > 0, \quad |Q_{k+m-2}| - |V_{k+m-2}| > 0.$$

С помощью леммы доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если коэффициенты исходной системы (12) удовлетворяют условиям:

1. a) $|R| \ge |S| + |P| + |Q| + |T| + \delta,\ \ \delta > 0,$ $R^2 < |PQ(P+Q)|$;

b) S, P, R, Q, T одного знака и A_k, B_k, D_k, E_k одного знака;

2. a) при

$$|B_k| \le |A_k|,\ |D_{k+1}| \le |E_{k+1}|,\ |C_k| + |D_k| \le$$

$$\le \left|B_k \frac{Q}{R}\right| + \left|E_k \frac{S}{R}\right|,\ |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \le \left|A_{k+1}\frac{T}{R}\right| + \left|D_{k+1}\frac{P}{R}\right|;$$

или b) при

$$|B_k| \ge |A_k|,\ |D_{k+1}| \ge |E_{k+1}|,\ |C_k| + |D_k| \le$$

$$\le \left|A_k \frac{Q}{R}\right| + \left|E_k \frac{S}{R}\right|,\ |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \le \left|A_{k+1}\frac{T}{R}\right| + \left|E_{k+1}\frac{P}{R}\right|;$$

или c) при

$$|B_k| \le |A_k|,\ |D_{k+1}| \ge |E_{k+1}|,\ |C_k| + |D_k| \le$$

$$\le \left|B_k \frac{Q}{R}\right| + \left|E_k \frac{S}{R}\right|,\ |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \le \left|A_{k+1}\frac{T}{R}\right| + \left|E_{k+1}\frac{P}{R}\right|;$$

или d) при

$$|B_k| \ge |A_k|,\ |D_{k+1}| \le |E_{k+1}|,\ |C_k| + |D_k| \le$$

$$\le \left|A_k \frac{Q}{R}\right| + \left|E_k \frac{S}{R}\right|,\ |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \le \left|A_{k+1}\frac{T}{R}\right| + \left|D_{k+1}\frac{P}{R}\right|;$$

тогда для редуцированной системы (4) выполняется условие диагонального преобладания матрицы системы, т.е. имеет место признак $\bar{A}$:

$$|\bar{C}_k| \ge |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{D}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta},$$

$$|\bar{C}_{k+1}| \ge |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{B}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta},$$

$$\bar{\delta} > 0;$$

и она решается методом семиточечной прогонки, причем решение устойчиво.

При доказательстве леммы, теоремы 1 и теоремы 2 используются формулы (5) и формулы метода прогонки (7), записанные для решений задач (2) для системы уравнений (1) с переменными коэффициентами и системы уравнений (14) с постоянными коэффициентами S, P, R, Q, T во внутренних точках интервалов распараллеливания $(k, k+m+1)$, $k = 0, m, ..., n-m$. Заметим, что функции $|U_i| \le 1$, $|V_i| \le 1$, $|P_i| \le 1$, $|Q_i| \le 1$, причем функции $|U_i|$ и $|V_i|$ убывают от 1 до 0, а функции $|P_i|$ и $|Q_i|$ возрастают от 0 до 1 на $(k, k+m+1)$.

Использование параллельного алгоритма при решении сеточной задачи для бигармонического уравнения

В работе [5] предложен один подход к распараллеливанию двумерных сеточных задач на примере решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. При помощи P-трансформации векторов задача сводится к n системам скалярных трехточечных уравнений. Этот подход согласуется с методом суммарных представлений, описанным в работе [6] как вариант метода разделения областей. В областях, составленных из прямоугольников, искомое решение записывается по формуле суммарных представлений в явном виде и на границе раздела областей выражается через известные граничные условия.

Данный подход может быть использован при решении двумерной краевой задачи для бигармонического уравнения. При помощи P-трансформации задача сводится к n системам скалярных пятиточечных уравнений, параллельный алгоритм решения которых был рассмотрен в данной работе. Заметим, что при разбиении исходного прямоугольника вертикальными линиями на подобласти P-трансформацию векторов можно выполнять в каждой подобласти независимо и вычислять при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта № 06-01-00116).

Список литературы

1. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливании прогонки // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ и ИТиПМ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 7. С. 139–146.
2. Акимова Е.Н. Об устойчивости распараллеливания немонотонной прогонки: Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1989. № 818. 18 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
4. Акимова Е.Н. Исследование устойчивости алгоритма распараллеливания прогонки для решения систем пятиточечных уравнений // Высокопроизводительные вычислительные системы для комплексных центров математического моделирования. Прикладные аспекты их использования. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1991. С. 12–19.
5. Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Елинов В.В. Алгоритмы распараллеливания сеточных задач // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1979. С. 95–99.
6. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев: Изд-во КГУ, 1962. 161 с.

A PARALLEL SOLUTION ALGORITHM FOR SETS OF EQUATIONS WITH FIVE-DIAGONAL COEFFICIENT MATRICES AND THE ANALYSIS OF ITS STABILITY

E.N. Akimova

A direct parallel solution algorithm for systems of equations with five-diagonal coefficient matrices is proposed. An analysis has been carried out of correctness and stability of the parallel solution algorithm for systems of equations with variable and constant coefficients over the intervals of parallelization depending on the ratio of initial system coefficients. The parallel algorithm has been proposed to be used for solution of a grid problem for the biharmonic equation.

Keywords: parallel algorithm, systems of equations with five-diagonal matrices, diagonal dominance, correctness and stability.