УДК 519.8

ЭФФЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕСУРСОВ GRID-СЕТЕЙ В ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

А.Е. Проскурин

Северо-Кавказский горно-металлургический институт
(государственный технологический университет)

alexander@skgmi-gtu.ru

Поступила в редакцию 05.12.2008

Рассматривается определение эффективных стратегий применения Grid-сетей к таким имитационным моделям, в основе которых лежат циклически повторяющиеся вычисления со сравнительно небольшими объемами передаваемой информации.

Ключевые слова: Grid-сеть, имитация физических процессов, локальная вычислительная сеть, математические модели.

Введение

В статье рассматривается определение эффективных стратегий применения Grid-сетей к таким имитационным моделям, в основе которых лежат циклически повторяющиеся вычисления со сравнительно небольшими объемами передаваемой информации [1]. Предлагаемый ниже метод не может быть применен к случаям, требующим интенсивного обмена данными на каждой итерации [2].

Далее рассмотрены такие имитационные модели, функционирование которых связано со следующими ограничениями:

- выполняется сравнительно большое число итераций;
- не требуется повторяющейся передачи большого объема данных, т.е. временем на передачу данных можно пренебречь;
- затратами времени на организацию параллельных вычислений можно пренебречь [3–5].

Критериями эффективности служат время и стоимость имитации. Соответствующие формальные постановки задач приведены ниже.

Формальные постановки задач

Общими в приводимых ниже математических моделях являются:

- искомые переменные n_i, определяющие число итераций, выполняемых каждой i-й рабочей станцией в локальной вычислительной сети (ЛВС);
- граница дипазона изменений этих переменных и константы n, равная их сумме.

Таким образом, различия в исследуемых ниже системах (1)–(6) отвечают лишь различным принципам перехода от многокритериальной задачи (1) к ее однокритериальным эквивалентам (2)–(6), решения которых являются Парето-оптимальными применительно к системе (1).

1. Базовой моделью является минимизация времени осуществления n итераций на m машинах Grid-сети. Формальная постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \forall i : T_i = t_i n_i \to \min\,; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n\,; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n\,, \end{cases} \tag{1}$$

где n_i – число итераций на i-м компьютере; m – число компьютеров, задействованных в Grid-сети; t_i – время выполнения одной итерации на i-м компьютере; n – общее число итераций имитационной модели; T_i – время, затраченное на имитацию i-м компьютером.

Возможны различные способы сведения (1) к однокритериальной задаче.

2. Минимизация верхней границы времени имитации на m машинах Grid-сети:

$$\begin{cases} \max\limits_i T_i = \max\limits_i t_i n_i \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Решение (2) может быть легко получено аналитически при условии, что все рабочие станции Grid-сети однотипны. В этом случае справедливо:

$$\forall i, n_i = \frac{n}{m} = \text{const}. \qquad (3)$$

Время T в этом случае определяется только числом m этих станций:

$$T = \frac{nt_i}{m}. \qquad (4)$$

Так как сомножители в числителе правой части (4) являются константами, очевидна гиперболическая зависимость времени счета T от числа рабочих станций m.

3. Минимизация времени имитации методом эталонов в Grid-сети.

Полагая, что наилучшему значению вектора переменных отвечает начало координат пространства критериев, (1) можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} T_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} (t_i n_i)^2 \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \qquad (5)$$

Если наихудшим значением времени счета полагать величину $\theta = n * \max\limits_i t_i$, то (1) заменяется поиском наиболее удаленного от точки $\forall i, t_i = \theta$ допустимого вектора переменных:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} (\theta - t_i n_i)^2 \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \qquad (6)$$

Минимизация стоимости имитации в Grid-сетях может осуществляться на базе линейных моделей с использованием параметра c_i – стоимости единицы времени работы i-й машины:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i} c_i t_i n_i \to \min; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \qquad (7)$$

Очевидно, что для решения (7) можно воспользоваться симплекс-методом, однако если существует ограничение на время имитации, использование этого метода проблематично из-за нелинейного характера одного из ограничений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i} c_i t_i n_i \to \min; \\ \max\limits_i t_i n_i \le T; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \qquad (8)$$

Подставляя в (2) – (6) ограничение

$$\sum\limits_i c_i t_i n_i \le S, \qquad (9)$$

где S – средства, выделенные для вычислений с помощью имитационной модели, получим новые формальные постановки, учитывающие верхнюю границу затрат на имитацию [4, 5].

Свойства и эффективность построенных моделей

Применительно к системе (2) справедливы две теоремы, позволяющие получить решение аналитически.

Теорема 1. Оптимальное решение (2) совпадает с решением системы линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \forall i \ne j : t_i n_i = t_j n_j; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n; \\ \forall i : 0 \le n_i \le n. \end{cases} \qquad (10)$$

Доказательство. Допустим, что теорема 1 неверна. Отсюда следует справедливость одного из двух неравенств:

$$\begin{cases} \max\limits_i T_i > \tau; \\ \max\limits_i T_i < \tau, \end{cases} \qquad (11)$$

где τ – величина, равная любому произведению $n_i t_i$, удовлетворяющему системе (10).

Если справедливо первое из неравенств (11), то решение задачи (2) неоптимально, что противоречит принятым условиям.

Справедливость второго неравенства системы (11) означает, что применительно к оптимальному решению (2) справедливо: $\exists k : n_k t_k = \max\limits_j n_j t_j$, причем $n_k t_k < \tau$. Это, в свою очередь, означает, что применительно к решению (10) существует такое значение k-й компоненты вектора переменных, для которой справедливо: $n'_k > n_k$. Отбрасывая в (2) и (10) k-ю переменную и повторяя приведенные выше рассуждения для новой задачи, в конечном счете получим, что каждая компонента вектора переменных, являющегося решением (10), превышает одноименную компоненту оптимального вектора переменных задачи (2). Тогда справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{m} n'_i > \sum_{i=1}^{m} n_i$, что противоречит условию $\sum_{i=1}^{m} n'_i = \sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Таким образом, оба допущения оказались неверны. Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема 2. Решением системы (10) является:

$$\forall j : n_j = \frac{n}{t_j \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i}}. \tag{12}$$

Доказательство. Из первых равенств системы (12) следует:

$$\forall i \neq j : n_i = \frac{n_j t_j}{t_i}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в последнее равенство системы (12), получим:

$$\forall j : t_j n_j \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i} = n,$$

откуда следует (12). Теорема доказана.

Следствиями теоремы 2 являются:

Следствие 1. Величина максимального выигрыша во времени счета от распараллеливания работы имитационной модели в соответствии со стратегией, определяемой (12), равна:

$$\eta_{\max} = \max_i t_i \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i}. \tag{14}$$

Следствие 2. В однородной вычислительной среде величина выигрыша во времени счета от распараллеливания работы имитационной модели в соответствии со стратегией, определяемой (12), равна *m*.

Применительно к задаче (5) справедлива теорема, которая также позволяет получать оптимальные решения аналитически:

Теорема 3. Оптимальному вектору переменных системы (5) отвечают значения:

$$\forall j : n_j = \frac{n}{t_j^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2}}. \tag{15}$$

Доказательство. Для доказательства используется метод множителей Лагранжа. Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^{m} t_i^2 n_i^2 + \lambda\left(n - \sum_{i=1}^{m} n_i\right), \tag{16}$$

где λ – множитель Лагранжа. В точке экстремума частные производные равны нулю:

$$\begin{cases} \forall i : \dfrac{\partial L}{\partial n_i} = 2 n_i t_i^2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = n - \sum_{i=1}^{m} n_i = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Легко убедиться, что решением (17) является:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2}}; \\ \forall j : n_j = \dfrac{n}{t_j^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2}} \end{cases}. \tag{18}$$

Следствием (18) является (15). Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует:

Следствие 3. Величина максимального выигрыша во времени счета от распараллеливания работы имитационной модели в соответствии со стратегией (11) определяется выражением:

$$\eta_{\max} = \max_i t_i^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_i^2}. \tag{19}$$

Следствие 4. В однородной вычислительной среде величина выигрыша во времени счета от распараллеливания работы имитационной модели в соответствии со стратегиями, определяемая по уравнениям (12) и (15), совпадает и равна *m*.

Экспериментальная часть

Целью эксперимента было получение зависимости времени работы имитационной модели, предназначенной для вычисления характеристик микроканальной пластины (МКП), при фиксированном числе итераций от числа потоков [1, 2]. Эксперименты были проведены на *N* персональных компьютерах $1 \leq N \leq 12$ с процессорами Intel Pentium III 733 МГц и объемом оперативной памяти 256 Мб, выступающих в качестве рабочих станций Grid-сети.

Как видно из рис., кривая полученного распределения имеет гиперболический характер. При увеличении числа рабочих станций время на решение данной задачи практически не уменьшается, что соответствует предсказанной выше зависимости (4).

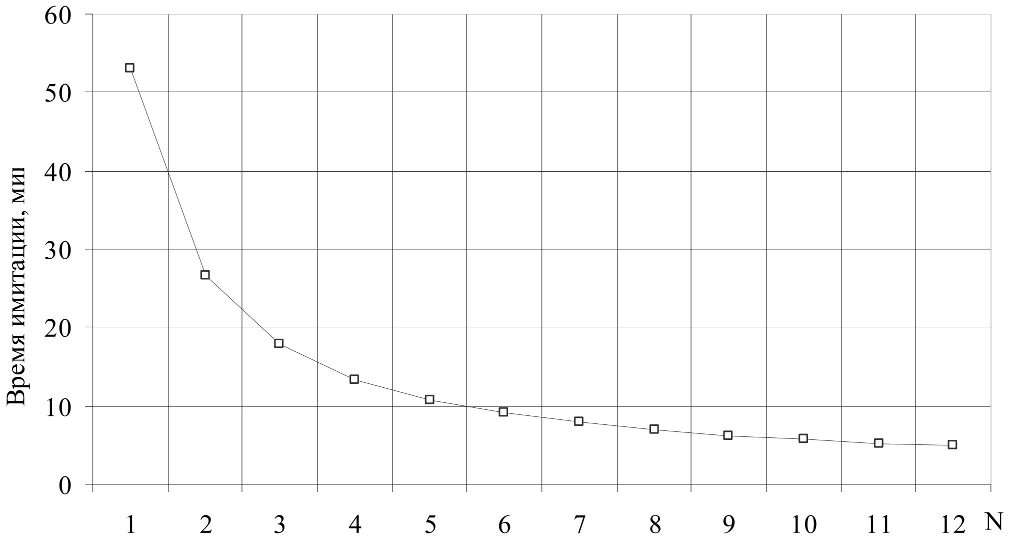

Рис. Зависимость времени работы имитационной модели от числа рабочих станций Grid-сети

Заключение

Совпадение характера экспериментальной кривой, представленной на рис., и предсказанной зависимости (4) времени счета от числа m рабочих станций свидетельствует об адекватности развитых подходов применительно к однородным вычислительным сетям. Таким образом, представляется актуальным следующее направление развития предложенных выше подходов:

- экспериментальная проверка адекватности предложенных моделей для неоднородных вычислительных сред;
- поиск аналитических решений систем (6)–(8);
- модификация математических моделей (1), (2), (5)–(8) в направлении, позволяющем учитывать многоядерность современных рабочих станций.

Решение этих задач и внедрение их в практику параллельных вычислений позволит существенно повысить эффективность использования существующих вычислительных ресурсов. Аналитический характер зависимостей, определяющих оптимальные режимы многоядерных вычислительных комплексов, позволяет минимизировать затраты, связанные с их поиском, что также говорит в пользу предложенного подхода.

Список литературы

1. Проскурин А.Е. Анализ амплитудного спектра в канальном умножителе // Десятая Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Микроэлектроника и информатика-2003» М.: МИЭТ, 2003. С. 234.
2. Гроппен В.О., Бруштейн Е.И., Доев А.К., Чумаков В.Г. Имитационные модели в управлении твердосплавным производством // Цветная металлургия. 1975. № 5. С. 76.
3. Гроппен В.О. Управление системой оптимальной параллельной обработки информации в ЛВС: модели, алгоритмы, интерфейс // Автоматика и телемеханика. 2001. № 6. С. 151 – 167.
4. Гроппен В.О., Томаев М.Х. Модели, алгоритмы и средства программной поддержки проектирования оптимальных программных продуктов // Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. С. 175–183.
5. Гроппен В.О. Решение задач многокритериальной оптимизации и ранжирования объектов методом эталонов // Телекоммуникации и информатизация образования. 2006. № 2. С. 14–31.

EFFICIENT USE OF GRID NETWORK RESOURCES IN SIMULATION MODELING

A.E. Proskurin

The efficient strategies of grid-network usage are considered for such simulation models which are based on cyclically repeating calculations with comparatively small volumes of transmitted information.

Keywords: grid network, simulation of physical processes, local area network, mathematical models.