М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.988, 517.977.56

О ТОТАЛЬНОМ СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Чернов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 24.02.2009

Для нелинейного управляемого функционально-операторного уравнения в банаховом идеальном пространстве доказана теорема о достаточных условиях глобальной разрешимости для всех управлений из конусного отрезка в смысле полуупорядоченности по конусу неотрицательных вектор-функций при условии глобальной разрешимости уравнения на концах отрезка и монотонности правой части. Приводятся примеры сведения управляемых начально-краевых задач к изучаемому уравнению.

Ключевые слова: тотальное сохранение глобальной разрешимости, функционально-операторное уравнение, монотонность, теорема единственности.

Введение

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbf{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, X, Z, U – *банаховы идеальные пространства*[1] (БИП) измеримых на Π функций, $D \subset U^s$ – выпуклое множество, A: $Z^m \to X^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Далее для вектор-функции $x \in X^\ell$, являющейся образом вектор-функции $x \in Z^m$ при отображении, осуществляемом оператором A, будем в зависимости от ситуации использовать равносильные обозначения: $x = A[z]$; $x(t) = A[z](t)$, $t \in \Pi$; $x(.) = A[z](.)$; $x = A[z(.)]$. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$x(t) = \theta(t) + A\big[f(.,x(.),u(.))\big](t),\ t \in \Pi, \quad (0.1)$$

где $u \in D$ – управление, $\theta \in X^\ell$, $f: \Pi \times \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция, такая, что:

$\mathbf{F}_1$) для всех $y \in X^\ell$, $u \in D$ суперпозиция $f\big(.,y(.),u(.)\big) \in Z^m$.

К уравнению (0.1) с помощью *метода обращения главной части* дифференциального уравнения может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ). Для пояснения сказанного рассмотрим следующий пример, ставший уже классическим для теории оптимизации распределенных систем, а именно управляемую задачу Гурса – Дарбу:

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}(t) = f(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), u(t)), & t = (t_1,t_2) \in \Pi = [0,T_1]\times[0,T_2]; \\ x(t_1,0) = \omega_1(t_1), & t_1 \in [0,T_1]; \\ x(0,t_2) = \omega_2(t_2), & t_2 \in [0,T_2]; \\ \omega_1(0) = \omega_2(0). & \end{cases} \quad (0.2)$$

Будем считать, что функции ω_1 и ω_2 абсолютно-непрерывны и имеют производные из класса L_q, $q \in [1,\infty)$, а функция f удовлетворяет условию $\mathbf{F}_1$) при $\ell = 3$, $m = 1$, $X = L_q(\Pi)$, $Z = L_q(\Pi)$, $U = L_r(\Pi)$, $r \in [1,\infty]$. Решение задачи (0.2) будем понимать в смысле п.в. и искать его среди функций из $L_q(\Pi)$, имеющих частные производные первого порядка и смешанную производную в классе $L_q(\Pi)$. Тогда можно понимать его как решение уравнения

$$x(t_1,t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0) + \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} f(\xi, x(\xi), x'_{t_2}(\xi), x'_{t_2}(\xi), u(\xi)) d\xi_2 .$$

Делая замену $y = (x, x'_{t_1}, x'_{t_2})$, получаем, что это уравнение равносильно следующему:

$$y(t) = \theta(t) + A[f(., y, u)](t), \quad t \in \Pi,\ y \in X^{\ell} = L_q^3(\Pi), \tag{0.3}$$

где

$$\theta(t_1,t_2) = \left(\omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0), \omega_1'(t_1), \omega_2'(t_2)\right),$$

$$\theta \in X^{\ell},\ A = \left(A_1, A_2, A_3\right) : L_q(\Pi) \to L_q^3(\Pi),$$

$$A_1[z](t_1,t_2) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2) d\xi_2 ,$$

$$A_2[z](t_1,t_2) = \int_0^{t_2} z(t_1,\xi) d\xi ,$$

$$A_3[z](t_1,t_2) = \int_0^{t_1} z(\xi,t_2) d\xi .$$

Уравнение (0.3) имеет вид (0.1) и удовлетворяет всем предположениям. Из этого примера видно, что для их проверки достаточно установить лишь некоторые свойства оператора A – разрешающего оператора НКЗ, обращающего главную часть дифференциального уравнения (или системы уравнений), отражающие по сути дела характер зависимости решения соответствующего линейного дифференциального уравнения от правой части при нулевых начально-краевых условиях.

Отметим, что уравнение (0.1) в указанном далее смысле родственно (точнее говоря, двойственно) функционально-операторному уравнению вида [1–5]:

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), u(t)\right), \quad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \tag{0.4}$$

где $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^{\ell}(\Pi)$ – ЛОО, $f : \Pi \times \mathbf{R}^{\ell} \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$ – заданная функция, $u \in L_\kappa^s(\Pi)$ – управляющая функция. Уравнение (0.4) с помощью очевидной замены $y = A[z]$ сводится к уравнению (0.1). И наоборот, уравнение (0.1) в случае $\theta = 0$ (к этому случаю его можно привести заменой $y - \theta = \tilde{y}$) с помощью замены $z = f(., y, u)$ сводится к уравнению (0.4). Таким образом, при условии единственности решения задачи, которые записываются в виде уравнения (0.4), могут быть записаны и в виде (0.1), и наоборот. Это обстоятельство важно иметь в виду, поскольку в [1–5] приводятся многочисленные примеры сведения распределенных систем к уравнению (0.4). Нам далее оказывается более удобным использовать уравнение (0.1).

Сформулируем проблему тотального сохранения глобальной разрешимости уравнения (0.1). Проблема сохранения глобальной разрешимости возникает в различных разделах теории оптимизации: в численных методах, в теории управляемости и теории дифференциальных игр, в частности при исследовании множества достижимости, определении множества стратегий игроков и т.д. Рассмотрим, например, следующую ситуацию, типичную для численной оптимизации сосредоточенных и распределенных управляемых систем. Здесь одним из основных подходов является использование градиентных методов спуска. При этом целевой функционал задачи оптимизации во многих случаях удается привести к виду

$$J[u] = F[x_u, u], \tag{0.5}$$

удобному для исследования, где $u \in D$ – управление, а $x_u \in X^{\ell}$ – отвечающее ему решение уравнения (0.1), $F[x,u]$ – дифференцируемый (в том или ином смысле) функционал $F : X^{\ell} \times D \to \mathbf{R}$. Удобство представления функционала задачи в виде (0.5) связано с тем, что в противном случае приходится рассматривать целевой функционал как функционал $F[x,u]$ на множестве пар (x,u), связанных соотношением (условием связи) (0.1). В результате в множество ограничений задачи оптимизации включается весьма нетривиальное (для учета и исследования) ограничение (0.1). Дифференцируемость функционала $J[u]$ в точке $u_0 \in D$ предполагает, что он определен в некоторой окрестности этой точки. Таким образом, возникает проблема сохранения разрешимости уравнения (0.1) при варьировании управления u_0 (или, по другой терминологии, проблема *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР); глобальность понимается по множеству Π изменения независимых переменных). О том, что эта проблема не является надуманной (сохранение глобальной разрешимости распределенных систем может не иметь места даже при малых вариациях управления), свидетельствуют, в частности, примеры из [1, 2]. Теория достаточных условий УСГР при малости отклонения управления u от u_0 в смысле некоторой полуметрики для уравнений (0.4) в лебеговых пространствах и операторных уравнений 2-го рода общего вида в пространстве $L_\infty^m(\Pi)$, $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, была построена в [1–5]. В статье [6] схема [1–5] получения условий УСГР была распространена на случай операторных уравнений 2-го рода общего вида в банаховом пространстве. Конструктивность сформулированных в [6] общих теорем УСГР была проиллюстрирована там на примере задачи Коши для гиперболического уравнения первого порядка при варьировании старшего коэффициента. Их доказательство можно найти в [7]. Однако в некоторых случаях, например при использовании градиентного метода с дроблением шага, необходимо, чтобы соответствующее уравнение (0.1) обладало свойством глобальной разрешимости *тотально*, то есть на всем множестве D допустимых управлений. Таким образом, возникает проблема *тотального сохранения глобальной разрешимости* (ТСГР) указанного уравнения. Отметим, что представление функционала в виде (0.5) возможно лишь в том случае, когда решение уравнения (0.1) не только существует, но и обладает свойством единственности. Поэтому в данной статье изучается также проблема единственности решения уравнения (0.1). Кроме того, при исследовании уравнения (0.1) полезной является возможность равномерной поточечной оценки семейства решений $\{x_u : u \in D\}$ этого уравнения. В применении к численным методам оптимизации такая оценка востребована, например, при оценивании остаточного члена в формуле приращения функционала, и соответственно, при обосновании сходимости метода. Очевидно, что подобного сорта оценка будет полезной при исследовании множества достижимости, а следовательно, в теории управляемости и теории дифференциальных игр, и т.д.

В данной статье для уравнения (0.1) исследуются фактически три проблемы: 1) тотальное сохранение глобальной разрешимости; 2) равномерная поточечная оценка семейства решений; 3) единственность решения. Проблема 3) решается здесь достаточно универсально (в том плане, что мы не требуем для ее решения каких-то специальных свойств функции f типа монотонности, выпуклости и т.п.). Проблемы 1) и 2) в общей постановке гораздо более нетривиальны и требуют более дифференцированного подхода. Исследование этих двух проблем естественно начать с наиболее простой (сравнительно) ситуации, но небезынтересной для приложений, в которой множество D задается как конусный отрезок $[\overline{u}, \hat{u}]$ (в смысле полуупорядоченности по конусу неотрицательных вектор-функций), а правая часть уравнения (0.1) является монотонной. В таком случае естественно ожидать некоторых гарантий сохранения глобальной разрешимости уравнения (0.1) *тотально* для всех $u \in [\overline{u}, \hat{u}]$ при условии, например, что решение уравнения (0.1) существует при $u = \overline{u}$ и $u = \hat{u}$. В данной статье такие гарантии устанавливаются. При этом доказывается также и поточечная оценка решений: $\overline{x}(t) \le x_u(t) \le \hat{x}(t)$, $t \in \Pi$, $u \in [\overline{u}, \hat{u}]$, то есть теорема сравнения для уравнения (0.1). Важной особенностью наших результатов является также то, что оценка решения строится на заранее заданном множестве $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, одном и том же для всех $u \in D$. В следующих далее двух параграфах приводятся точные формулировки основных результатов, вкратце обозначенных выше. Теорема о ТСГР и равномерной оценке формулируется и доказывается в §1. Теорема единственности формулируется в §2 и доказывается в §3.

1. Тотальное сохранение глобальной разрешимости и равномерная оценка

Далее все векторные неравенства понимаются покомпонентно. Будем предполагать, что множества допустимых управлений и допустимых начальных управлений имеют вид $D = \{u \in U^s : \overline{u} \le u \le \hat{u}\}$, $\Theta = \{\theta \in X^\ell : \overline{\theta} \le \theta \le \hat{\theta}\}$, причем управляющим парам $\overline{\varphi} = (\overline{\theta}, \overline{u})$ и $\hat{\varphi} = (\hat{\theta}, \hat{u})$ отвечают решения $x = \overline{x}$ и $x = \hat{x}$ уравнения (0.1) такие, что $\overline{x} \le \hat{x}$. Кроме того, потребуем выполнения следующих условий монотонности:

$\mathbf{F}_2$) функция $f(t, y, u)$ не убывает по $(y, u) \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s$;

$\mathbf{A}_1$) $A[z_0] \le A[z]$ при всех $z, z_0 \in Z^m : z_0 \le z$.

Теорема 1.1. *Каждому управляющему набору $\varphi \in \Theta \times D$ отвечает по крайней мере одно решение $x_\varphi \in X^\ell$ уравнения (0.1), удовлетворяющее оценке: $\bar{x} \le x_\varphi \le \hat{x}$.*

Для доказательства теоремы 1.1 мы воспользуемся некоторыми сведениями из теории решеток (см., например, [8]). Напомним [8], что *решеткой* называется частично упорядоченное множество L такое, что $\forall x, y \in L$ существуют $\inf\{x,y\}$ и $\sup\{x,y\}$ в L. Решетка L называется *полной*, если для любого ее подмножества X существуют $\inf X$, $\sup X$ в L. Если P, Q – некоторые упорядоченные множества, то оператор $g: P \to Q$ называется *изотонным*, если из $x \le y$ следует $g[x] \le g[y]$.

Теорема А. Тарского (см., например, [8, теорема V.3.11]). *Пусть L – полная решетка, а $g: L \to L$ – изотонный оператор. Тогда существует $x_* \in L$: $x_* = g[x_*]$.*

Лемма 1.1 ([9, теорема I.6.17]). *Пусть N – непустое и ограниченное (сверху и снизу) подмножество в множестве $S(\Pi)$ всех измеримых на Π функций. Тогда существуют $x_0 = \inf N$, $x_1 = \sup N \in S(\Pi)$.*

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим пространство X^ℓ и его непустое подмножество $N(\bar{x},\hat{x}) = \{x \in X^\ell : \bar{x} \le x \le \hat{x}\} = N_1 \times \ldots \times N_\ell$, где $N_k = \{x \in X : \bar{x}_k \le x \le \hat{x}_k\}$, $k = \overline{1,\ell}$. Согласно [8, §V.1] прямое произведение полных решеток снова является полной решеткой. При этом непосредственно из леммы 1.1 получаем, что каждое из множеств N_k, $k = \overline{1,\ell}$, а следовательно, и множество $N = N(\bar{x},\hat{x})$ является полной решеткой. Пользуясь условиями $\mathbf{A}_1$) и $\mathbf{F}_2$), находим, что $\forall \varphi = (\theta, u) \in \Theta \times D$ оператор $F_\varphi : E \to E$, определяемый формулой

$$F_\varphi[y] = \theta + A\left[f\left(.,y(.),u(.)\right)\right], \quad y \in E,$$

является изотонным. Покажем, что $F_\varphi : N \to N$. Возьмем любое $x \in N$ и, пользуясь условиями $\mathbf{A}_1$) и $\mathbf{F}_2$), оценим $F_\varphi[x] \le \hat{\theta} + A[f(.,\hat{x}(.),\hat{u}(.))] = \hat{x}$. Аналогично, $F_\varphi[x] \ge \bar{x}$. Стало быть, $F_\varphi[x] \in N$. Остается воспользоваться теоремой А. Тарского. Теорема доказана.

2. Теорема единственности

Далее нам понадобятся следующие понятия из теории УСГР (см. [1–6]).

Определение. *Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H – оператор умножения на характеристическую функцию[2] χ_H множества $H \in \Sigma$. Систему $B(A) = \{H \in \Sigma : \ P_H A P_H = P_H A\}$ будем называть **системой вольтерровских множеств** ЛОО $A: Z^m \to X^\ell$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему $\Im = \{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\} \subset B(A)$ будем называть*

1) **вольтерровской δ-цепочкой** ЛОО A, если $\|P_h A P_h\| < \delta \quad \forall h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$;

2) **вольтерровской δ-малой по мере цепочкой** ЛОО A, если $\operatorname{mes}(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$, $\forall i = \overline{1,k}$.

Помимо условий, перечисленных во введении, и условия $\mathbf{A}_1$), будем предполагать, что выполняются также следующие условия для уравнения (0.1):

$\mathbf{S}_1$) существуют БИП Z_X и числа $K_X > 0$ и $\alpha_X > 0$ такие, что для всех $x \in X$, $y \in Z_X$ имеем: $yx \in Z$ и справедливо неравенство: $\|yx\|_Z \le K_X \cdot \|y\|_{Z_X}^{\alpha_X} \cdot \|x\|_X$;

$\mathbf{S}_2$) БИП Z_X является пространством с порядково непрерывной нормой[3];

$\mathbf{A}_2$) оператор $A: Z^m \to X^\ell$ обладает для всех $\delta > 0$ вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств;

$\mathbf{F}_3$) функция $f(t,y,u)$ непрерывно дифференцируема по переменной $y \in \mathbf{R}^\ell$ и вместе с производной измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $(y,u) \in \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^s$;

$\mathbf{F}_4$) для всех $(y,u) \in X^\ell \times U^s$ суперпозиция $f'_y(.,y(.),u(.)) \in Z_X^{\ell \times m}$.

Замечание 2.1. *Пользуясь неравенством Гельдера, нетрудно показать, что если, например, $Z = L_p(\Pi)$, $X = L_q(\Pi)$, $q \ge p \ge 1$, то* *условие* $\mathbf{S}_1$) *выполнено при* $Z_X = L_\sigma(\Pi)$, $K_X = \alpha_X = 1$, *где* $1/q + 1/\sigma = 1/p$ (*при* $q = p$, *соответственно,* $\sigma = \infty$).

Теорема 2.1 (единственности). *Для любой управляющей пары* $\varphi = (\theta, u) \in X^\ell \times U^s$ *уравнение (0.1) может иметь не более одного решения.*

3. Доказательство теоремы единственности

Приведем, прежде всего, несколько вспомогательных утверждений. Для векторов $a, b \in \mathbf{R}^\ell$, $a \le b$, будем использовать обозначение $[a;b] \equiv [a_1;b_1] \times \ldots \times [a_\ell;b_\ell]$.

Лемма 3.1. *Пусть* $S(\Pi)$ *– пространство измеримых п.в. конечных функций на* Π, $l \in \mathbf{N}$, $a, b \in S^l(\Pi)$ *– измеримые на* Π l*-вектор-функции,* $a(t) \le b(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi$, *а функция* $\Phi : \Pi \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathbf{R}^l$. *Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y \in [a(t);b(t)]} \Phi(t, y)$$

измерима на Π, *и*

$$\exists \theta \in M[a;b] \equiv \{ y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)] \}$$

такая, что

$$\Phi(t, \theta(t)) = \varphi(t) \text{ для п.в. } t \in \Pi.$$

Доказательство леммы 3.1 следует, например, непосредственно из [10, предложение Д. 1.2, с. 326 и теорема Д. 1.4, с. 327]. Исходя из теоремы Д.Ф. Егорова, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть* $X = X(\Pi)$ *– БИП с порядково непрерывной нормой* $\|\,.\,\|_X$, $\{x_k\} \subset X$, $\varphi \in X$, *и для п.в.* $t \in \Pi$ $x_k(t) \to 0$ *при* $k \to \infty$, $|x_k(t)| \le \varphi(t)$. *Тогда* $\|x_k\|_X \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Лемма 3.3[4]. *Пусть ЛОО* $A : Z^m \to X^\ell$ *обладает* $\forall \gamma > 0$ γ*-малой по мере вольтерровской цепочкой. Тогда* $\forall z \in Z_X^{\ell \times m}$ *оператор* $A_{(z)} : X^\ell \to X^\ell$, *определяемый формулой* $A_{(z)}[x] = A[zx]$, *обладает для каждого* $\delta > 0$ *вольтерровской* δ*-цепочкой.*

Доказательство. 1. Выберем произвольно последовательность чисел $\{\gamma_r\} \to +0$. По условию, $\forall r \in \mathbf{N}$ существует γ_r-малая по мере вольтерровская цепочка множеств ЛОО A:

$$T^{(r)} = \{ H_0^{(r)}, \ldots, H_{k_r}^{(r)} \} \subset B(A), \quad \mathrm{mes}(h_i^{(r)}) < \gamma_r,$$
$$h_i^{(r)} = H_i^{(r)} \setminus H_{i-1}^{(r)}, \ i = \overline{1, k_r}.$$

Для любого $h \in \Sigma(\Pi)$ оценим норму:

$$\|P_h A_{(z)} P_h\| = \sup_{x \in X^\ell : \|x\| = 1} \|\chi_h A[\chi_h z x]\| \le \|A\| \sup_{x \in X^\ell : \|x\| = 1} \|\chi_h z x\|_{Z^m},$$

откуда по условию $\mathbf{S}_1$),

$$\|P_h A_{(z)} P_h\| \le m \cdot \ell \cdot \|A\| \cdot K_X \cdot \|\chi_h \,|\, z\|_{Z_X}^{\alpha_X}. \quad (3.1)$$

2. В соответствии с оценкой (3.1) рассмотрим числовую последовательность $\beta_r = \max_{i = \overline{1, k_r}} \| \chi_{h_i^{(r)}} |z| \|_{Z_X}$ и докажем, что она имеет подпоследовательность $\beta_{r_j} \to +0$ при $j \to \infty$. Обозначим $i[r]$ индекс, на котором достигается максимум, и соответственно, $h[r] = h_{i[r]}^{(r)}$. По построению, $\mathrm{mes}\, h[r] < \gamma_r \to +0$. Отсюда понятно, что последовательность функций $z_r = \chi_{h[r]} |z| \xrightarrow{\mu} 0$ (по мере) на множестве Π. Тогда по теореме Ф. Рисса [11, теорема VI. 5.3, с. 158] она имеет подпоследовательность $z_{r_j} \to +0$ п.в. на Π, и по построению, $0 \le z_{r_j} \le |z|$. Тогда по лемме 3.2 норма $\|z_{r_j}\|_{Z_X} \to +0$ при $j \to \infty$. Но это означает, что

$$\beta_{r_j} = \|z_{r_j}\|_{Z_X} \to +0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \quad (3.2)$$

3. В силу (3.2) для любого $\delta > 0$ найдется номер $j_\delta \in \mathbf{N}$ такой, что

$$m \cdot \ell \cdot \|A\| \cdot K_X \cdot \beta_{r_j}^{\alpha_X} < \delta \quad \text{для всех} \quad j \ge j_\delta.$$

Тогда в силу (3.1) $\|P_h A_{(z)} P_h\| < \delta$ для всех $h = H_i^{(r_j)} \setminus H_{i-1}^{(r_j)}$, $i = \overline{1, r_j}$, при $j = j_\delta$. Стало быть, система $T^{r_{j_\delta}}$ является вольтерровской δ-цепочкой оператора $A_{(z)}$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть* $A : Z^m \to X^\ell$ *– монотонный ЛОО. Тогда он обладает положительной мажорантой* $B : Z \to X$, *определяемой формулой*[5] $B[z] = \sum_{i=1}^{\ell} A^{(i)}[z \cdot \vec{e}]$, *где* $\vec{e} = \{1, \ldots, 1\} \in \mathbf{R}^m$, *такой, что* $|A[z]| \le B[|z|]$ *для всех* $z \in Z^m$.

Доказательство очевидным образом следует из монотонности оператора A, а также оценки для каждого $z \in Z^m$: $-|z| \le -|z^{(i)}| \le z^{(i)} \le |z^{(i)}| \le |z|$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 3.3 и статьи [12] получаем следующее утверждение.

Лемма 3.5. *При условиях леммы 3.3 спектральный радиус* $\rho(A_{(z)}) = 0$ *для всех* $z \in Z_X^{\ell \times m}$.

Замечание 3.1. *Предположим, удалось установить, что оператор* $A : Z^m \to X^\ell$ *имеет для всякого* $\delta > 0$ *вольтерровскую* δ*-цепочку. Тогда, очевидно, и оператор* $A_{(z)}$ *будет обладать указанным свойством, и утверждение леммы 3.5 (а как видно из дальнейшего, и теоремы единственности) останется справедливым и без выполнения условий* $\mathbf{S}_2$) *и* $\mathbf{A}_2$).

Лемма 3.6 [13, теорема 1.9.3]. *Пусть* E *– банахово пространство, полуупорядоченное по конусу* $K \subset E$; $F : E \to E$ *– ЛОО, для которого конус* K *инвариантен, а спектральный радиус* $\rho(F) = 0$. *Тогда для всех* $x \in K$, $z \in K$, *удовлетворяющих неравенству* $x \le F[x] + z$, *справедлива оценка* $x \le R(F)[z]$, *где* $R(F) = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$.

Лемма 3.7[6]. *Пусть заданы функции* $x_* \in X^+$, $u_* \in U^+$ *и множества* $N_X = \{ y \in X^\ell : |y| \le x_* \}$, $N_U = \{ u \in U^s : |u| \le u_* \}$. *Тогда найдется положительный ЛОО* $B_* : Z \to X$, *определяемый ими и такой, что для всех управлений* $u_0, u_1 \in N_U$ *и отвечающих им решений* $x_0, x_1 \in N_X$ *уравнения (0.1), если такие существуют, справедлива оценка:*

$$|\Delta x| \le B_*[|\Delta_u f(x_0)|], \text{ где } \Delta x = x_1 - x_0,$$

$$\Delta_u f(x_0) = f(.,x_0(.),u_1(.)) - f(.,x_0(.),u_0(.)).$$

Таким образом, существует константа $L = \|B_*\|$ *такая, что:* $\|\Delta x\| \le L \cdot \|\Delta_u f(x_0)\|$.

Доказательство. Пользуясь леммой Адамара, рассмотрим приращение решения:

$$\Delta x = \theta + A[f(.,x_1,u_1)] - \theta - A[f(.,x_0,u_0)] =$$
$$= A\big[f(.,x_1,u_1) - f(.,x_0,u_1)\big] +$$
$$+ A\big[f(.,x_0,u_1) - f(.,x_0,u_1)\big] =$$
$$= A[\int_0^1 f_x'(.,x_0 + \theta\Delta x, u_1) d\theta \cdot \Delta x] + A[\Delta_u f(x_0)].$$

В соответствии с леммой 3.4, оценим:

$$|\Delta x| \le B\left[\int_0^1 |f_x'(.,x_0 + \theta\Delta x, u_1)|\, d\theta\, |\Delta x|\right] +$$
$$+ B\big[|\Delta_u f(x_0)|\big].$$

По условиям леммы $\big|f_x'(t, x_0(t) + \theta\Delta x(t), u_1(t))\big| \le z_*(t)$, где

$$z_*(t) = \max\big\{|f_x'(t,x,v)| : x \in \mathbf{R}^\ell,\ v \in \mathbf{R}^s,$$
$$|x| \le x_*(t),\ |v| \le u_*(t)\big\}.$$

При этом по лемме 3.1 функция $z_*(.)$ измерима и существуют измеримые функции $x \in S^\ell(\Pi)$, $v \in S^s(\Pi)$ такие, что $|x(t)| \le x_*(t)$, $|v(t)| \le u_*(t)$, $z_*(t) = |f_x'(t,x(t),v(t))|$ на Π. В силу идеальности соответствующих пространств $x \in X^\ell$, $v \in U^s$, и таким образом, согласно условию $\mathbf{F}_4$) $z_* \in Z_X^+$ – конусу неотрицательных функций Z_X. Обозначим $L_* : X \to X$ – положительный ЛОО, определяемый формулой: $L_*[x] = B[z_* \cdot x]$. По доказанному имеем:

$$|\Delta x| \le L_*[|\Delta x|] + B[|\Delta_u f(x_0)|].$$

Аналогично лемме 3.5, $\rho(L_*) = 0$. Остается воспользоваться леммой 3.6. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Предположим, что управляющей паре φ отвечают решения $x_1, x_2 \in X^\ell$ уравнения (0.1). Обозначим $\Delta x = x_2 - x_1$, $x_* = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, $u_* = |u|$. Пользуясь леммой 3.7, получаем оценку: $|\Delta x| \le 0$. Теорема доказана.

4. Пример

Вернемся к задаче (0.2) и, соответственно, уравнению (0.3). Будем предполагать дополнительно, что функция $f(.)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_{2-4}$) при $\ell = 3$, $m = 1$, $X = L_q(\Pi)$, $Z = L_q(\Pi)$, $U = L_r(\Pi)$, $r \in [1, \infty]$. Что касается выбора пространств Z_X, Z_U – см. замечание 2.1. Заметим, что условие $\mathbf{S}_2$) здесь не выполняется, поскольку $Z_X = L_\sigma(\Pi) = L_\infty(\Pi)$. Однако в данном примере можно воспользоваться замечанием 3.1. Покажем это. Заметим, во-первых, что условие $\mathbf{A}_1$) выполняется очевидным образом. Нетрудно понять, что для всякого $\tau \in [0, T]$, где $T = T_1 + T_2$, множества вида $H_\tau = \{ t \in \Pi :\ t_1 + t_2 \le T \}$ являются вольтерровскими множествами операторов A_i, поскольку значения $A_i[z](t)$ зависят лишь от значений $z(\xi)$ при $\xi \in H_\tau$, $i = 1,2,3$. Таким образом, $P_{H_\tau} A_i P_{H_\tau} = P_{H_\tau} A_i$, $i = 1,2,3$, следовательно, множество $H_\tau \in \bigcap_{i=1}^{3} B(A_i) \subset B(A)$ для всех $\tau \in [0,T]$. Выберем произвольно $\tau', \tau'' \in [0,T]$, $\tau' < \tau''$, и, положив $h = H_{\tau''} \setminus H_{\tau'}$ и $\sigma = \tau'' - \tau'$, оценим меру $\operatorname{mes}(h) < \sigma^2 + \sigma$. Таким образом, выбирая число $\sigma > 0$ из условия $\sigma^2 + \sigma < \delta$, получаем, что $\Im = \{H_{\tau_0}, ..., H_{\tau_k}\}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k = T$, $\tau_i - \tau_{i-1} \le \sigma$, является вольтерровской δ-малой по мере цепочкой множеств оператора A при заданном (произвольно выбранном) δ > 0, то есть условие $\mathbf{A}_2$) выполняется. Более того, основываясь на этом факте и пользуясь неравенством Гельдера, а также используя конкретный вид оператора A, нетрудно установить, что он обладает для всякого δ > 0 вольтерровской δ-цепочкой. Поэтому реализуется ситуация, описанная в замечании 3.1. Таким образом, с учетом этого замечания, все предположения относительно уравнения (0.3) как уравнения (0.1) выполняются, и можно пользоваться результатами, сформулированными в §§1, 2.

В случае когда конкретный вид разрешающего оператора неизвестен, полезным может оказаться использование предположения $\mathbf{S}_2$). Для пояснения сказанного рассмотрим вариант задачи Гурса – Дарбу, в котором правая часть не содержит производных неизвестной функции. В этом случае можно взять в качестве пространства $Z = L_p(\Pi)$ при $p < q$, поскольку задача на этот раз сводится к уравнению (0.1) при $\theta(t_1,t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $\theta \in X$, $\ell = 1$,

$$A: L_p(\Pi) \to L_q(\Pi),\ A[z](t_1,t_2) = \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2) d\xi_2 .$$

На этот раз $Z_X = L_\sigma(\Pi)$, где $\sigma < \infty$ (см. замечание 2.1), и предположение $\mathbf{S}_2$) выполняется. При этом нам не важен вид разрешающего оператора, а важно только то, что он действует из $L_p(\Pi)$ в $L_q(\Pi)$ и является монотонным.

В заключение автор выражает искреннюю признательность профессорам В.И. Сумину и В.В. Чистякову за обсуждение материала статьи и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00495) и АЦВП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)» Минобрнауки РФ (рег. № 2.1.1/3927).

Примечания

1. Пусть $S = S(\Pi)$ – множество всех измеримых функций на множестве $\Pi \subset R^n$. Напомним, что банахово пространство $E \subset S$ измеримых функций называется *банаховым идеальным пространством*, если из того, что $y \in E$, $x \in S$, $|x(t)| \le |y(t)|$ для п.в. $t \in \Pi$, следует, что $x \in E$, $\|x\|_E \le \|y\|_E$.

2. Такой оператор определен в любом БИП. Мы обозначаем его одинаково, независимо от того, в каком именно БИП он рассматривается.

3. Напомним (см., например, [9]), что БИП $Z = Z(\Pi)$ называется БИП с *порядково непрерывной нормой*, если из того, что последовательность $\{z_n\} \subset Z$ для п.в. $t \in \Pi$ монотонно стремится к нулю: $z_n(t) \searrow 0$ следует, что $\|z_n\| \to 0$. Так, например, $Z = L_\infty(\Pi)$ не является пространством с порядково непрерывной нормой, но вложено в любое $L_p(\Pi)$, $p \in [1,\infty)$, каждое из которых по теореме Лебега о сходимости является БИП с порядково непрерывной нормой.

4. Ценность леммы 3.3 состоит в следующем. Во-первых, условие существования вольтерровской δ-цепочки ЛОО является ключевым условием не только здесь, но и в теории УСГР, а также в некоторых признаках квазинильпотентности (равенства нулю спектрального радиуса) ЛОО, см., например, [12]. И во-вторых, непосредственная проверка этого условия на практике может оказаться или показаться затруднительной. В то же время наличие вольтерровской δ-малой по мере цепочки разрешающего оператора НКЗ является обстоятельством довольно естественным в случае, когда НКЗ ставится для параболических и гиперболических уравнений (для иллюстрации сказанного см. пример в §4).

5. Модуль вектора понимаем как сумму модулей компонент.

6. Лемма 3.7 представляет самостоятельный интерес, поскольку позволяет строить равномерные поточечные оценки приращения решения управляемых НКЗ, представимых в виде уравнения (0.1), непосредственно через приращение управляющей функции, что имеет важное значение для приложений, в частности при доказательстве необходимых условий оптимальности, сходимости численных методов оптимизации, вычислении вариаций функционалов, в теории чувствительности решений и т.д. Действительно, предположим, что выполнены условия §1, или по крайней мере имеет место утверждение теоремы 1.1. Тогда в качестве x_* и u_* можно взять соответственно

$x_* \equiv \max\{|\bar{x}|, |\hat{x}|\}$, $u_* \equiv \max\{|\bar{u}|, |\hat{u}|\}$ и пользуясь леммой 3.7, получить такую оценку.

Список литературы

1. Сумин В.И. // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.

2. Сумин В.И. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.

3. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н. Новгород: ННГУ, 1992. 110 с.

4. Сумин В.И. // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.

5. Сумин В.И. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.

6. Сумин В.И., Чернов А.В. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.

7. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. ННГУ: Н.Новгород, 2000. Деп. в ВИНИТИ 25.04.00. № 1198-В00.

8. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

10. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.

11. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965. 304 с.

12. Сумин В.И., Чернов А.В. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

13. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

ON TOTAL PRESERVATION OF GLOBAL SOLVABILITY OF FUNCTIONAL OPERATOR EQUATIONS

A.V. Chernov

For a nonlinear controlled functional operator equation in a Banach ideal space, a theorem has been proved on global solvability sufficient conditions for all controls from a conic segment in the sense of cone semiordering of nonnegative vector-functions provided that the equation is globally solvable at the segment endpoints and its right-hand side is monotonic. Some examples are given of the reduction of controlled initial-boundary-value problems to the functional operator equation under study.

Keywords: total preservation of global solvability, functional operator equation, monotonicity, uniqueness theorem.