МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.2

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СЧЕТНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

О.А. Кузенков, А.В. Новоженин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

oleg.kuzenkov@cs.vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 17.02.2009

Доказываются критерий неотрицательности решения системы дифференциальных уравнений в пространстве l_1 и критерий сохранения суммы фазовых координат. Изучаются свойства систем на стандартном счётномерном симплексе, приводятся условия и методы преобразования системы дифференциальных уравнений в пространстве l_1 к системе на стандартном счётномерном симплексе.

Ключевые слова: счётномерный симплекс, положительное решение, квазиположительность, положительная однородность.

Введение

Динамические системы в пространстве l_1 используются при моделировании разнообразных процессов в физике, биологии, химии, теории массового обслуживания, например для моделирования процессов распространения тепла [1], коагуляции [2], процессов размножения и гибели [3] и др. В силу своей практической значимости такие системы привлекают внимание математиков. Чаще всего эти системы изучаются как частный случай общей динамической системы в абстрактном банаховом пространстве. Свойства динамических систем в абстрактном банаховом пространстве рассматривались в работах многих авторов (см. М.А. Красносельский [4, 5], М.Г. Крейн [6], Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн [7], М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский [8], Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин [9], Э. Хилле, Р. Филипс [10], К. Иосида [11] и др.). В работах М.Г. Крейна, М.А. Рутмана, М.А. Красносельского [4–6] исследовались условия неотрицательности фазовых координат для разных классов дифференциальных уравнений. М.А. Красносельский [4] и М.Г. Крейн, М.А. Рутман [6] получили условия неотрицательности фазовых координат (инвариантности конуса) в абстрактном банаховом пространстве.

Частным случаем динамических систем в пространстве l_1 являются динамические системы на стандартном счётномерном симплексе – подмножестве пространства l_1, состоящем из последовательностей с неотрицательными компонентами, сумма ряда из которых равна единице. Эти системы используются, например, при описании марковских процессов со счётным числом состояний [12]. Одним из примеров таких процессов являются процессы размножения и гибели, имеющие применение в биологии и теории массового обслуживания. В. Феллером [13] доказаны теорема существования и критерий единственности для этих систем. Описание их свойств можно найти в работе И.И. Гихмана, А.В. Скорохода [12]. К динамическим системам на стандартном счётномерном симплексе сводится и система уравнений коагуляции при соответствующем линейном преобразовании.

Настоящая работа посвящена некоторым аспектам теории динамических систем на стандартном счётномерном симплексе. В статье доказываются критерий неотрицательности решения системы дифференциальных уравнений в пространстве l_1 и критерий постоянства суммы ряда, составленного из значений фазовых координат, обосновываются методы преобразования динамической системы в пространстве l_1 к системе на стандартном счётномерном симплексе.

1. Постановка задачи

Пространством l_1 называют банахово пространство абсолютно суммируемых последовательностей $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n,\ldots)$ с нормой $\| f \| = \sum_{n=1}^{\infty} | f_n |$.

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t,x), \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – функция вещественного переменного t со значениями в пространстве l_1, $F(t,x)$ – оператор, действующий из $R^1 \times l_1$ в l_1. Здесь $x(t)$ можно рассматривать как абсолютно суммируемую функциональную последовательность $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ldots)$, где $x_i(t)$, $i=\overline{1,\infty}$, – функции вещественного переменного со значениями в R^1. Область значений оператора $F(t,x)$ принадлежит пространству l_1, поэтому каждое его значение может быть представлено абсолютно суммируемой функциональной последовательностью $(F_1(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots),\ldots$ $\ldots,F_n(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots),\ldots)$, где $F_i(t,x_1,\ldots,x_n,\ldots)$, $i=\overline{1,\infty}$, – функции счётного числа вещественных переменных со значениями в R^1.

Уравнение (1.1) эквивалентно счётной системе дифференциальных уравнений для компонент x_i последовательности x

$$\dot{x}_i = F_i(t,x), \quad i=\overline{1,\infty}. \tag{1.2}$$

Пусть заданы начальные условия

$$x(t_0)=x^0, \quad x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0,\ldots). \tag{1.3}$$

Решением системы (1.2) при начальных условиях (1.3) называется непрерывно дифференцируемая функция $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t),\ldots)$, удовлетворяющая при $t>t_0$ уравнениям (1.2) и начальным условиям (1.3).

Известно [4, 7], что если оператор $F(t,x)$ непрерывен по t и при $t\in[a,b]$, $x\in l_1$ удовлетворяет условиям

$$\| F(t,x) \| \le M_1 + M_0 \| x \|, \tag{1.4}$$

$$\| F(t,x_2) - F(t,x_1) \| \le M_2 \| x_2 - x_1 \|, \tag{1.5}$$

то при любых $x^0 \in l_1$ и $t_0\in[a,b]$ на всем интервале $[a,b]$ существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.3). Если оператор $F(t,x)$ удовлетворяет условиям (1.4), (1.5) при всех t и $x\in l_1$, то решение может быть нелокально продолжено для любых значений параметра $t>t_0$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что оператор $F(t,x)$ непрерывен по t и удовлетворяет условиям (1.4), (1.5). Из непрерывности оператора $F(t,x)$ по аргументу t следует также непрерывность по t функций $F_i(t,x)$, $i=\overline{1,\infty}$. Аналогично, из непрерывности функции $x(t)$ следует непрерывность её компонент.

2. Неотрицательное решение задачи Коши

Будем говорить, что задача Коши (1.2), (1.3) имеет неотрицательное решение $x(t)$, если все его компоненты $x_1(t),\ldots,x_n(t),\ldots$ неотрицательны для любых значений параметра *t.* Также будем называть начальные условия $x(t_0)=x^0$ неотрицательными, если все координаты вектора x^0 неотрицательны. Очевидно, что для неотрицательности решения необходимо, чтобы начальные условия были неотрицательными. Но эти условия не являются достаточными. Для нашего случая условия неотрицательности даёт следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для того чтобы решение системы* (1.2) *при любых неотрицательных начальных условиях было неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы функции* F_i *удовлетворяли условию квазиположительности:*

$$F_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n,\ldots)\ge 0, \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{2.1}$$

при любых неотрицательных переменных x_j, $j\ne i$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть при неотрицательных начальных условиях решение системы (1.2) неотрицательно. Возьмём начальные условия в момент времени τ так, чтобы одна из фазовых координат была равна нулю, а остальные были неотрицательными: $x_i(\tau)=0$, $x_j(\tau)\ge 0$, $j\ne i$.

В последующие моменты времени $\tau+\delta$, $\delta>0$, справедливо неравенство $x_i(\tau+\delta)\ge 0$. Отсюда

$$\dot{x}_i(\tau)=\lim_{\delta\to+0}\frac{x_i(\tau+\delta)-x_i(\tau)}{\delta}\ge 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_i(\tau)=F_i(\tau,x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n,\ldots)\ge 0.$$

Так как момент времени τ и номер i могут быть любыми, то это доказывает выполнение условия квазиположительности (2.1).

Достаточность. Сначала рассмотрим случай, когда условие квазиположительности выполняется в виде строгого неравенства:

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots) > 0,$$
$$i = \overline{1, \infty},$$

при любых неотрицательных переменных $x_j,\ j \neq i.$ Из непрерывности решения системы (1.2) вытекает, что если какая-то i-я компонента принимает отрицательное значение в некоторый момент времени, то она будет отрицательной на некотором интервале.

Предположим, что при неотрицательных начальных условиях существует решение системы (1.2), в котором хотя бы одна компонента становится отрицательной. Пусть $[t_0, \tau]$ – максимальный отрезок времени, на котором решение остаётся неотрицательным. Тогда существует $\tau^* > \tau$ такое, что на интервале (τ, τ^*) хотя бы одна i-я компонента становится отрицательной. Из непрерывности функции $x(t)$ следует, что $x_i(\tau) = 0, x_j(\tau) \geq 0,\ j \neq i.$

По условию теоремы $F_i(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), \ldots) > 0$. Известно [14], что в силу непрерывности функции F_i и решения $x(t)$ существует окрестность точки τ, в которой функция F_i сохраняет знак. Тогда в этой окрестности производная $\dot{x}_i$ строго больше нуля и функция $x_i(t)$ строго монотонно возрастает. Следовательно, при любом достаточно малом $\delta > 0$ компонента $x_i(\tau + \delta)$ строго больше нуля, что невозможно для $\delta < \tau^* - \tau.$ Следовательно, в этом случае решение всегда неотрицательно.

Теперь обратимся к общему случаю, когда условие квазиположительности выполняется в виде нестрогого неравенства (2.1). Рассмотрим вспомогательную систему, зависящую от положительного параметра ε:

$$\dot{x}_i = F_i(t, x) + \varepsilon \cdot c_i, \quad i = \overline{1, \infty}, \qquad (2.2)$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n, \ldots) \in l_1$, $c_i > 0$, $i = \overline{1, \infty}$, $\varepsilon \in R^1$. Правые части уравнений этой системы удовлетворяют условию квазиположительности в виде строгих неравенств, т.е. система (2.2) имеет неотрицательное решение $x(t, \varepsilon)$ с компонентами

$$x_i(t, \varepsilon) \geq 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \qquad (2.3)$$

Очевидно, пределы правых частей уравнений (2.2) при ε, стремящемся к нулю, соответственно равны правым частям уравнений (1.2). Как следует из [15], в данном случае справедлива теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра. В силу непрерывной зависимости решения от параметра предел решения системы (2.2) при ε, стремящемся к нулю, является решением системы (1.2), отсюда следует:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_i(t, \varepsilon) = x_i(t), \quad i = \overline{1, \infty}.$$

Поскольку знак неравенств (2.3) в пределе сохраняется, то $x_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, \infty},$ что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. *Пусть для правой части* i*-го уравнения системы* (1.2) *условие квазиположительности выполняется в виде равенства*

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2.4)$$

при любых неотрицательных переменных $x_j,\ j \neq i.$ *Если при этом в начальный момент времени задано условие*

$$x_i(t_0) = 0, \qquad (2.5)$$

то для всех $t > t_0$ справедливо равенство $x_i(t) = 0.$

Доказательство. Условия (2.4), (2.5) гарантируют неотрицательность i-й компоненты решения: $x_i(t) \geq 0.$ Сделав замену $x_i = -y_i$ в уравнениях (1.2), приходим к системе

$$\dot{x}_j = F_j(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, -y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$j = \overline{1, \infty}, \quad j \neq i,$$
$$\dot{y}_i = -F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, -y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots).$$

Так как

$$y_i(t_0) = -x_i(t_0) \geq 0,$$
$$-F_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots) \geq 0,$$

то i-я компонента решения этой системы неотрицательна: $y_i(t) = -x_i(t) \geq 0.$ Отсюда $x_i(y) \equiv 0,$ что и требовалось доказать.

3. Сохранение суммы фазовых координат

Частный случай представляют системы, в которых в течение всего процесса сохраняется постоянной сумма значений неотрицательных фазовых координат:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \text{const}, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (3.1)$$

С помощью нормирующего коэффициента исследование системы (1.2), фазовые координаты которой удовлетворяют (3.1), всегда можно свести к исследованию системы (1.2), фазовым пространством которой является стандартный счётномерный симплекс

$$S = \{(x_1,\dots,x_n,\dots): x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,\infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}.$$

Систему (1.2), решение которой в каждый момент времени принадлежит множеству S при любых начальных условиях на S, будем называть системой на стандартном симплексе.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для того чтобы решение системы* (1.2) *удовлетворяло тождеству*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \equiv 1 \tag{3.2}$$

при любых начальных условиях $x(t_0)$, *принадлежащих стандартному симплексу* S, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i(t,x) = 0 \tag{3.3}$$

в точках x, *удовлетворяющих условию* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1.$

Доказательство аналогично [16].

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{x}_i = \Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(t,x), \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{3.4}$$

где $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t),\dots)$ – элементы пространства l_1. $\Phi(t,x)$ − оператор, действующий из $R^1 \times l_1$ в l_1. Значения оператора $\Phi(t,x)$ лежат в пространстве l_1, каждое значение можно рассматривать как абсолютно суммируемую функциональную последовательность $(\Phi_1(t,x),\dots,\Phi_n(t,x),\dots)$, где $\Phi_i(t,x)$, $i=\overline{1,\infty}$, − функции вещественного переменного t и $x \in l_1$ со значениями в R^1. На основе теоремы 3.1 можно показать, что при определенных условиях такие системы являются системами на стандартном симплексе.

Так же как в [17], устанавливается справедливость следующего факта.

Следствие 3.1. *Пусть оператор* $\Phi(t,x)$ *непрерывен по аргументу* t *и удовлетворяет условиям (1.4), (1.5) на симплексе* S, *пусть функции* $\Phi_i(t,x)$, $i=\overline{1,\infty}$, *удовлетворяют условию квазиположительности*

$$\Phi_i(t,x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n,\dots) \ge 0, \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{3.5}$$

при любых $x_j \ge 0$, $j \ne i$. *Тогда система уравнений (3.5) является системой на стандартном симплексе, при этом ее правая часть* $F(t,x) = (F_1(t,x),\dots,F_n(t,x),\dots)$, *где* $F_i(t,x) = \Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(t,x)$, *будет непрерывной по* t, *удовлетворяющей условиям (1.4), (1.5) на симплексе* S.

Доказательство. Проверим выполнение условия (1.4) на симплексе S. По условию следствия существуют такие константы M_1 и M_0, что $\|\Phi(t,x)\| \le M_1 + M_0\|x\|$. С учётом этого

$$\|F(t,x)\| = \sum_{i=1}^{\infty} |F_i(t,x)| =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} |\Phi_i(t,x) - x_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(t,x)| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} |\Phi_i(t,x)| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi_j(t,x)| \le$$
$$\le 2\|\Phi(t,x)\| \le 2M_1 + 2M_0\|x\|.$$

Отсюда следует выполнение условия (1.4) для оператора $F(t,x)$. Доказательство оставшихся утверждений аналогично [17].

4. Методы приведения к системе на стандартном счётномерном симплексе

Произвольная система дифференциальных уравнений вида (1.2) чаще всего не является системой на стандартном симплексе (если, например, не выполняется условие (3.3)). Но в некоторых случаях с помощью определенных преобразований её можно привести к системе на стандартном симплексе или выделить систему на симплексе S в качестве подсистемы (1.2).

Метод нормирующей замены. Наиболее важным способом выделения подсистемы на стандартном симплексе в пространстве l_1 является переход от исходных фазовых переменных к их удельным весам с помощью нормирующей замены.

Оператор $\Phi(t,z,y)$, действующий из $R^1 \times l_1 \times l_1$ в l_1, где $z = (z_1,\dots,z_n,\dots)$,

$y=(y_1,\dots,y_n,\dots)$ – элементы пространства l_1, будем называть положительно однородным по переменным z, если выполняется равенство $\Phi(t,\lambda z,y)=\lambda\Phi(t,z,y)$ для любой положительной константы λ.

Пусть задана система

$$\begin{aligned} \dot z_i &= \Phi_i(t,z,y), \quad i=\overline{1,\infty}, \\ \dot y_j &= R_j(t,z,y), \quad j=\overline{1,\infty}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\Phi(t,z,y)$, $R(t,z,y)$ − операторы, действующие из $R^1\times l_1\times l_1$ в l_1. Значения этих операторов можно рассматривать как абсолютно суммируемые функциональные последовательности

$$(\Phi_1(t,z,y),\dots,\Phi_n(t,z,y),\dots),$$
$$(R_1(t,z,y),\dots,R_n(t,z,y),\dots),$$

где $\Phi_i(t,z,y)$ и $R_i(t,z,y)$, $i=\overline{1,\infty}$, − функции вещественного переменного t и $z,y\in l_1$ со значениями в R^1. Пусть операторы $\Phi(t,z,y)$ и $R(t,z,y)$ непрерывны по аргументу t и удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), и пусть решение этой системы неотрицательно по z при неотрицательных по z начальных условиях

$$\begin{aligned} z_i(t_0) &= z_i^0, \quad i=\overline{1,\infty}, \\ y_j(t_0) &= y_j^0, \quad j=\overline{1,\infty}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Если при любых начальных условиях (4.2), удовлетворяющих равенству $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i^0=1,$ во все последующие моменты времени выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i(t)=1,$ то говорят, что система $\dot z_i=\Phi_i(t,z,y)$, $i=\overline{1,\infty}$, образует подсистему на стандартном симплексе.

Теорема 4.1. *Пусть в системе дифференциальных уравнений* (4.1) *функции* Φ_i *квазиположителъны по переменным* z, *положительно однородны по переменным* z, *кроме того, при любых нетривиальных и неотрицательных по* z *начальных условиях* (4.2) *решение задачи Коши* (4.1), (4.2) *нетривиально по переменным* z. *Тогда с помощью нормирующей замены переменных*

$$\omega=\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad x_i=\frac{z_i}{\omega}, \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{4.3}$$

исходная система приводится к виду

$$\dot x_i=\Phi_i(t,x,y)-x_i\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,x,y), \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{4.4}$$

$$\dot y_j=R_j(t,\omega x,y), \quad j=\overline{1,\infty}, \tag{4.5}$$

$$\dot\omega=\omega\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,x,y), \tag{4.6}$$

где уравнения (4.4) *образуют подсистему на стандартном симплексе.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы решение задачи Коши (4.1), (4.2) будет неотрицательным по переменным z. Неотрицательность решения и его нетривиальность по переменным z гарантируют, что функция $\omega(t)$ строго больше нуля во все рассматриваемые моменты времени. Покажем, что замена (4.3) приведет к нужному результату. Найдём производные от функций x_i, $i=\overline{1,\infty}$, учитывая уравнения (4.1) и связь переменных (4.3):

$$\dot x_i=\left(\frac{\dot z_i}{\omega}\right)=\frac{\dot z_i\omega-z_i\dot\omega}{\omega^2}=$$
$$=\frac{\Phi_i(t,z,y)\omega-z_i\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,z,y)}{\omega^2}=$$
$$=\frac{1}{\omega}\Phi_i(t,z,y)-\frac{z_i}{\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega}\Phi_k(t,z,y)=$$
$$=\frac{1}{\omega}\Phi_i(t,z,y)-x_i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega}\Phi_k(t,z,y).$$

Так как функции $\Phi_i(t,z)$, $i=\overline{1,\infty}$, положительно однородны по переменным z, то результат преобразуется к виду (4.4). При замене (4.3) неотрицательные начальные условия $z_i(t_0)$ перейдут в начальные условия $x_i(t_0)$ на стандартном симплексе, $i=\overline{1,\infty}$. Как показано в следствии 3.1, система (4.4) является подсистемой на стандартном симплексе.

Подставив в уравнения $\dot y_j=R_j(t,z,y)$, $j=\overline{1,\infty}$, системы (4.1) выражения для переменных z через переменные x и ω:

$$z_i=\omega x_i, \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{4.7}$$

получим уравнения (4.5).

Продифференцируем функцию ω и заменим переменные z по формулам (4.7):

$$\dot\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\dot z_k=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,z,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t,\omega x,y),$$

после этого воспользуемся свойством положительной однородности функций Φ_k. В результате получим уравнение (4.6). Теорема доказана.

Метод степенной замены. В ряде случаев решение исходной системы принадлежит некоторому ограниченному замкнутому множеству, например части сферы, эллипсоида в бесконечномерном пространстве и т.п., которое можно взаимно-однозначно и непрерывно отобразить на стандартный симплекс. Тогда исходная система будет сведена к системе на стандартном симплексе. Такой метод преобразования осуществляется посредством степенной замены.

Теорема 4.2. *Пусть задана система*

$$\dot{z}_i = g_i(t,z_i) - z_i \sum_{j=1}^{\infty} z_j^{M-1} g_j(t,z_j), \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{4.8}$$

где $z(t)$ *− функция вещественного переменного* t *со значениями в пространстве* l_1, *здесь* $z(t)$ *можно рассматривать как абсолютно суммируемую функциональную последовательность* $z(t) = (z_1(t),\dots,z_n(t),\dots)$, *где* $z_i(t)$, $i=\overline{1,\infty}$, *− функции вещественного переменного* t *со значениями в* R^1*;* $g(t,z)$ *− оператор, действующий из* $R^1 \times l_1$ *в* l_1, *его значение можно представить как абсолютно суммируемую функциональную последовательность* $(g_1(t,z_1),\dots,g_n(t,z_n),\dots)$, *где* $g_i(t,z_i)$, $i=\overline{1,\infty}$, *− функции вещественных переменных* t *и* z_i *со значениями в* R^1*;* M *− положительная константа. Оператор* $g(t,z)$ *непрерывен по аргументу* t, *удовлетворяет условиям* (1.4)*,* (1.5)*,* $g_i(t,z_i)$ *– квазиположительные и положительно однородные по* z_i *функции,* $i=\overline{1,\infty}$. *Тогда с помощью степенной замены переменных*

$$x_i = z_i^M, \quad i=\overline{1,\infty}, \tag{4.9}$$

систему (4.8) *можно привести к системе на стандартном симплексе* (3.4)*, где* $\Phi_i(t,x_i) \equiv \equiv M \cdot g_i(t,x_i)$.

Доказательство. Так как функции $g_i(t,z_i)$ квазиположительные, то из теоремы 2.1 следует, что при неотрицательных начальных условиях система (4.8) имеет неотрицательное решение. Сделаем в уравнениях (4.8) замену (4.9):

$$\dot{x}_i = M z_i^{M-1}\left(g_i(t,z_i) - z_i \sum_{j=1}^{\infty} z_j^{M-1} g_j(t,z_j) \right), \quad i=\overline{1,\infty}.$$

Воспользуемся положительной однородностью функций $g_i(t,z_i)$ по второму аргументу:

$$\dot{x}_i = M g_i(t,z_i^M) - z_i^M \sum_{j=1}^{\infty} M g_j(t,z_j^M), \; i=\overline{1,\infty},$$

и выразим переменные z через переменные x по формулам (4.9):

$$\dot{x}_i = M g_i(t,x_i) - x_i \sum_{j=1}^{\infty} M g_j(t,x_j), \; i=\overline{1,\infty}.$$

Заменив $M g_i(t,x_i)$ на $\Phi_i(t,x_i)$, получим уравнения системы (3.4). Функции Φ_i при этом будут удовлетворять условиям квазиположительности, положительной однородности по переменным x. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если начальные условия в задаче Коши для системы* (4.8) *удовлетворяют соотношениям*

$$z_i(t_0) = z_i^0, \quad z_i^0 \ge 0, \quad i=\overline{1,\infty},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (z_i^0)^M = 1,$$

то ее решение удовлетворяет условиям

$$z_i(t) \ge 0, \quad i=\overline{1,\infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} z_i^M(t) = 1 \tag{4.10}$$

в любой момент времени $t \ge t_0$.

Доказательство. Если начальные условия неотрицательны, то, как уже было отмечено, решение задачи Коши для системы (4.8) будет неотрицательным. С помощью замены переменных (4.9) система (4.8) преобразуется к системе (3.4) на стандартном симплексе. При этом начальные условия $x_i(t_0) = z_i^M(t_0)$ будут удовлетворять соотношениям

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i^0 \ge 0, \quad i=\overline{1,\infty}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 = 1.$$

Тогда решение задачи Коши для системы (3.4) в каждый момент времени $t \ge t_0$ будет удовлетворять соотношениям $x_i(t) \ge 0$, $i=\overline{1,\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) = 1$, из которых вытекает справедливость соотношений (4.10) для исходных переменных $z_i(t)$.

Отметим, что в этом случае задача Коши для системы (4.8) имеет единственное решение. Если предположить, что задача Коши для системы (4.8) имеет хотя бы два различных решения, то соответствующая задача Коши для системы (3.4) также будет иметь два различных решения, что невозможно.

Список литературы

1. Кузенков О.А., Шашков В.М. Оптимальное управление линейными распределенными системами: уравнения теплопроводности. Н. Новгород: ННГУ, 1996.

2. Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967.

4. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

5. Красносельский М.А. Положительное решение операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

6. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантный конус в пространстве Банаха // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. Вып. 1 (23). С. 4–97.

7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

8. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

9. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

10. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностранной литер., 1962.

11. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

12. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.

13. Feller W. On boundary conditions for the Kolmogorov differential equations // Annals of Mathematics. 1957. V. 65. P. 527–570.

14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

15. Ахмеров Р.Р. Очерки по теории дифференциальных уравнений // Электронные учебники Института вычислительных технологий СО РАН. URL: http://old.ict.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode_unicode/index.html (дата обращения: 01.12.08).

16. Кузенков О.А. Исследование динамической системы вероятностных мер Радона // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 591–596.

17. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.

DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS ON A COUNTABLE-DIMENSIONAL SIMPLEX

O.A. Kuzenkov, A.V. Novozhenin

A non-negativity criterion of the differential equation system solution in the space l_1 and a criterion of phase coordinate sum preservation are proved. System properties on a standard countable-dimensional simplex are studied. The conditions and methods to transform the differential equation system in the space l_1 to the system on a standard countable-dimensional simplex are given.

Keywords: countable-dimensional simplex, positive solution, quasipositivity, positive homogeneity.