Математическое моделирование. Оптимальное управление
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2009, № 3, с. 152–161

УДК 519.21

СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ ВЕКТОРНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ РЕКУРРЕНТНЫМ СООТНОШЕНИЯМ

А.М. Федоткин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

fandr@vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 11.02.2009

Рассматриваются инвариантные свойства конечного семейства из управляемых векторных марковских цепей со счётным числом состояний. При этом каждая марковская цепь задаётся функциональным соотношением и некоторым семейством случайных величин. Проведена полная классификация по Колмогорову пространства состояний такого рода управляемых марковских цепей. В терминах параметров распределений определяются легко проверяемые необходимые условия существования стационарного распределения для таких управляемых векторных марковских цепей со счётным числом состояний.

Ключевые слова: управляемая векторная марковская цепь, существенные и несущественные состояния, циклические подклассы, одномерные распределения марковской цепи, производящая функция, стационарное распределение.

1. Постановка задачи

Пусть при каждом фиксированном $j = 1, 2, \ldots, m$ векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i(\omega), æ_{j,i}(\omega), \xi'_{j,i-1}(\omega)); i \geq 0\}$ определяется на некотором основном вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$. Здесь $m \geq 2$ есть некоторое заданное натуральное число, а через символ ω будем обозначать произвольный элемент достоверного события Ω. При этом ω определяет с помощью некоторого языка описание так называемого элементарного исхода случайного эксперимента E. Множество $\Im$ является σ-алгеброй и содержит все наблюдаемые исходы $A \subset \Omega$ такого эксперимента, и, наконец, вероятностная функция $\mathbf{P}(A)$: $\Im \to [0,1]$ задается на σ-алгебре $\Im$. В некоторых случаях символ ω будем опускать, если это не приводит к очевидным недоразумениям и писать $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \geq 0\}$. Пространством состояний векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \geq 0\}$ является прямое произведение $\Gamma \times X \times Y_j$ множества Γ из элементов $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$, множества $X = \{0, 1, \ldots\}$ и множества $Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$, где $l_1, l_2, \ldots, l_m$ суть некоторые заранее заданные натуральные числа. Отсюда следует, что случайный элемент $\Gamma_i \in \Gamma$, случайное число $æ_{j,i} \in X$, случайное число $\xi'_{j,i} \in Y_j$.

Будем предполагать, что последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1}); i \geq 0\}$ удовлетворяет следующему рекуррентному по $i = 0, 1, \ldots$ соотношению

$$(\Gamma_{i+1}, æ_{j,i+1}, \xi'_{j,i}) = (u(\Gamma_i),$$
$$\max\{0, æ_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}). \quad (1)$$

В соотношении (1) отображение $u(\Gamma^{(s)})$: $\Gamma \to \Gamma$ определяется равенством

$$u(\Gamma^{(s)}) = \begin{cases} \Gamma^{(s+1)} \text{ ïðè } s = 1, 2, \ldots, 2m-1; \\ \Gamma^{(1)} \text{ ïðè } s = 2m, \end{cases} \quad (2)$$

а случайные величины $\eta_{j,i} \in X$ и $\xi_{j,i} \in Y_j$. Пусть $\{\omega: \Gamma_k(\omega) = \Gamma^{(s_k)}, æ_{j,k}(\omega) = x_k, \xi'_{j,k-1}(\omega) = y_k, k = \overline{0,i}\} = A_{0,i}$. Далее, ради упрощения записи, обозначим элемент $\Gamma^{(s_i)}$ через $\Gamma^{(s)}$. Будем предполагать, что при $\Gamma^{(s_k)} \in \Gamma$, $x_k \in X$, $y_k \in Y_j$ и $k = \overline{0,i}$ условные распределения случайных величин $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{P}(\eta_{j,i} = n \mid A_{0,i}) = \mathbf{P}(\eta_{j,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}) =$$
$$= \varphi_j(n; T_s) =$$
$$= e^{-\lambda_j T_s} \sum_{r=0}^{[n/2]} C_{n-r}^r \, p_j^{\,n-2r} q_j^{\,r} \frac{(\lambda_j T_s)^{n-r}}{(n-r)!},$$
$$n \in X, \quad (3)$$
$$\mathbf{P}(\xi_{j,i} = b \mid A_{0,i} \;\; \eta_{j,i} = n) =$$

$$= \mathbf{P}(\xi_{j,\,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}) = \beta_j(b;\, \Gamma^{(s)}) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ åñëè } b = l_j \text{ è } \Gamma^{(s)} = \Gamma^{(2j-1)}; \\ 1, \text{ åñëè } b = 0 \text{ è } \Gamma^{(s)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j-1)}\}; \\ 0 \text{ â îñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ.} \end{cases} \quad (4)$$

В соотношении (3) при любом $s = 1, 2, \ldots, 2m$ числа λ_j, T_s, p_j, $q_j = 1 - p_j$ строго положительные и являются параметрами условных распределений величин $\eta_{j,\,i}$, а символ $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$. При этом параметры λ_j и p_j фиксированы, а величины $T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$ можно выбирать. Следовательно, изменяя величины $T_1 > 0$, $T_2 > 0, \ldots, T_{2m} > 0$, мы тем самым изменяем условные распределения (3) и конечномерные распределения векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$. Итак, векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$ будет управляемой. В следующих разделах этой работы изучим вероятностные свойства семейства из управляемых векторных случайных последовательностей вида $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$, $j \in \overline{1, m}$.

2. Разбиение пространства состояний последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$

Пусть теперь j принимает фиксированное значение из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$. Используя соотношения (1), (2) и равенство $\Gamma^{(s_i)} = \Gamma^{(s)}$, вычислим для любых фиксированных $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $x \in X$, $y \in Y_j$, $\Gamma^{(s_k)} \in \Gamma$, $x_k \in X$, $y_k \in Y_j$ и $k = \overline{0, i}$ условную вероятность

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x, \xi'_{j,\,i} = y \mid A_{0,\,i}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x, \xi'_{j,\,i} =$$
$$= y, \eta_{j,\,i} = n, \xi_{j,\,i} = b \mid A_{0,\,i}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \mathbf{P}(\eta_{j,\,i} = n \mid A_{0,\,i}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\xi_{j,\,i} = b \mid A_{0,\,i}, \eta_{j,\,i} = n) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x, \xi'_{j,\,i} = y \mid A_{0,\,i}, \eta_{j,\,i} =$$
$$= n, \xi_{j,\,i} = b) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \varphi_j(n;\, T_s)\beta_j(b;\, \Gamma^{(s)}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(s)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, x_i + n - b\} =$$
$$= x, \min\{x_i + n, b\} = y \mid A_{0,\,i}, \eta_{j,\,i} = n, \xi_{j,\,i} = b) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \varphi_j(n;\, T_s)\beta_j(b;\, \Gamma^{(s)})\mathbf{P}(u(\Gamma^{(s)}) = \Gamma^{(r)},$$
$$\max\{0, x_i + n - b\} = x, \min\{x_i + n, b\} = y). \quad (5)$$

Аналогичным способом найдём, что для любых $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $x \in X$, $y \in Y_j$, $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x_i \in X$, $y_i \in Y_j$ условная вероятность $\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x, \xi'_{j,\,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}, æ_{j,\,i} = x_i, \xi'_{j,\,i-1} = y_i)$ вычисляется по формуле (5). Значит, управляемая последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$ является марковской. Непосредственно из (5) для векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i \geq 0\}$ следует, что все ее условные вероятности перехода за один шаг не изменяется во времени. Поэтому рассматриваемая цепь будет однородной по времени. Используя терминологию и определения из [2, с. 534–538], покажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пространство состояний управляемой векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ разбивается на замкнутое подмножество $\bigcup_{s=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(s)})$ существенных периодических состояний с периодом $2m$ и на незамкнутое подмножество $\{(\Gamma^{(r)}, x, y)$: $\Gamma^{(r)} \in \Gamma \setminus \Gamma^{(2j)}, x \in X, y = 1, \ldots, l_j\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j)}, x, y)$: $x > 0$, $y = 0, 1, \ldots, l_j - 1\}$ несущественных состояний, где $E_j(\Gamma^{(s)}) = \{(\Gamma^{(s)}, x, 0)$: $x \in X\}$ при $s \in \{1, 2, \ldots, 2m\} \setminus \{2j\}$ и $E_j(\Gamma^{(2j)}) = \{(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)$: $x \in X\} \bigcup \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$: $y = 0, 1, \ldots, l_j - 1\}$.

Доказательство. Используя обозначение вероятности $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i} = x, \xi'_{j,\,i-1} = y)$ через функции $\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(r)}, x, y)$, известную формулу полной вероятности для несчетного числа гипотез $\{\omega$: $\Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(s)}, æ_{j,\,i}(\omega) = v, \xi'_{j,\,i-1}(\omega) = w\}$, $(\Gamma^{(s)}, v, w) \in \Gamma \times X \times Y_j$, соотношение (5) и равенство (2), последовательно найдём:

$$\boldsymbol{Q}_{j,\,i+1}(\Gamma^{(r)}, x, y) = \sum_{s=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(s)}, v, w) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)}, æ_{j,\,i+1} = x, \xi'_{j,\,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}, æ_{j,\,i} =$$
$$= v, \xi'_{j,\,i-1} = w) =$$
$$= \sum_{s=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(s)}, v, w) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \beta_j(b;\, \Gamma^{(s)})\varphi_j(m;\, \mathrm{T}_s) \times$$
$$\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(s)}) = \Gamma^{(r)}, \max\{0, v + m - b\} =$$
$$= x, \min\{v + m, b\} = y) =$$
$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(r-1)}, v, w) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0,\, l_j\}} \beta_j(b;\, \Gamma^{(r-1)})\varphi_j(m;\, \mathrm{T}_{r-1}) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\max\{0, v + m - b\} = x, \min\{v + m, b\} = y), \quad (6)$$

где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $x \in X$, $y \in Y_j$, $\Gamma^{(0)} \equiv \Gamma^{(2m)}$, $T_0 \equiv T_{2m}$. Принимая во внимание определение функции $\beta_j(b;\Gamma^{(r-1)})$ с помощью равенства (2), обозначение $v+m$ через c и выполняя в связи с этим обозначением соответствующую замену переменных, непосредственно из (6) для $r=2j$ и $r\in\{1, 2, \ldots, 2m\}\setminus\{2j\}$ получим два следующих соотношения:

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)},x,y)=$$
$$=\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,w)\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_j(m;T_{2j-1})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\max\{0,v+m-l_j\}=x,\min\{v+m,l_j\}=y)=$$
$$=\sum_{c=1}^{l_j-1}\sum_{v=0}^{c}\sum_{w=0}^{l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,w)\,\varphi_j(c-v;T_{2j-1})\times$$
$$\times\mathbf{P}(0=x,c=y)+$$
$$+\sum_{c=l_j}^{\infty}\sum_{v=0}^{c}\sum_{w=0}^{l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,w)\times$$
$$\times\varphi_j(c-v;T_{2j-1})\,\mathbf{P}(c-l_j=x,l_j=y)\,; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)},x,y)=$$
$$=\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)},v,w)\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_j(m;T_{r-1})\times$$
$$\times\mathbf{P}(\max\{0,v+m\}=x,\min\{v+m,0\}=y)=$$
$$=\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)},v,w)\,\varphi_j(x-v;T_{r-1})\times$$
$$\times\mathbf{P}(x\ge 0,0=y). \tag{8}$$

Из равенств (7), (8) видно, что для всех $i=0$, 1, … ненулевыми остаются только формулы для вероятностей $\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)},0,y)$, $\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)},x,l_j)$, $\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)},x,0)$, где $y=0, 1, \ldots, l_j-1$, $r\in\{1, 2, \ldots, 2m\}\setminus\{2j\}$, $x\in X$. Отсюда ясно, что множество $(\Gamma\times X\times Y_j)\setminus\bigcup_{s=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(s)})$ состоит из несущественных состояний, а соотношения (7) и (8) можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)},0,y)=$$
$$=\sum_{v=0}^{y}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\varphi_j(y-v;T_{2j-1}), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)},x,l_j)=$$
$$=\sum_{v=0}^{x+l_j}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\varphi_j(x+l_j-v;T_{2j-1}), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)},x,0)=$$
$$=\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)},0,w)\varphi_j(x;T_{2j})+$$
$$+\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)},v,l_j)\,\varphi_j(x-v;T_{2j}), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)},x,0)=$$
$$=\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)},v,0)\varphi_j(x-v;T_{r-1}), \tag{12}$$

где $i\ge 1$, $\Gamma^{(2m+1)}\equiv\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)=\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)},\Gamma^{(2j+1)}\}$, $x\in X$, $y=0, 1, \ldots, l_j-1$. При любом фиксированном $j\in\overline{1,m}$ марковская цепь $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i=0, 1, \ldots\}$ из любого несущественного состояния в начальный момент за один шаг переходит в некоторое состояние множества $\bigcup_{s=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(s)})$. Поэтому при изучении вероятностных свойств этой марковской цепи будем в дальнейшем задавать её начальное распределение только на множестве состояний вида $\bigcup_{r=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(r)})$. Тогда соотношения (9)–(12) определяют динамику одномерных распределений марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i=0, 1, \ldots\}$. Так как функция $\varphi_j(n;T_s)>0$ для всех $j\in\overline{1,m}$, $n\in X$, $T_s>0$, $s\in\overline{1,2m}$, то соотношения (9)–(12) вычисляют ненулевые вероятности перехода за один шаг марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i=0, 1, \ldots\}$ для множества состояний вида $\bigcup_{r=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(r)})$. Например, из соотношения (9) легко определяется условная вероятность перехода за один шаг $\mathbf{P}(\Gamma_{i+1}=\Gamma^{(2j)}, æ_{j,i+1}=0, \xi'_{j,i}=y\mid\Gamma_i=\Gamma^{(2j-1)}, æ_{j,i}=v, \xi'_{j,i-1}=0)$, которая равна $\varphi_j(y-v;T_{2j-1})>0$, где $v=0, 1, \ldots, y$ и $y=0, 1, \ldots, l_j-1$. Используя этот факт, нетрудно найти хотя бы одну конечную цепочку переходов марковской цепи из любого состояния $(\Gamma^{(r)}, v, w)\in\bigcup_{r=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(r)})$ в любое состояние $(\Gamma^{(r)},x,y)\in\bigcup_{r=1}^{2m}E_j(\Gamma^{(r)})$ с ненулевой вероятностью. При этом для всех $s=\overline{1,2m}$, если марковская цепь в начальный момент находится в одном из состояний множества $E_j(\Gamma^{(s-1)})$, то она на следующем шаге непременно переходит в некоторое состояние из множества $E_j(\Gamma^{(s)})$ и возвращается с ненулевой вероятностью в это начальное состояние через $2mi$ шагов ($i = 1, 2, \ldots$). Суммируя всё это, получаем, что для векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ множества $E_j(\Gamma^{(1)})$, $E_j(\Gamma^{(2)}), \ldots, E_j(\Gamma^{(2m)})$ представляют собой циклические подклассы состояний замкнутого множества $\bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})$ существенных состояний с периодом $2m$. Теорема 1 доказана.

В [1] подробно изучены свойства условного распределения $\mathbf{P}(\eta_{j,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}) = \varphi_j(n;T_s) = e^{-\lambda_j T_s} \sum_{r=0}^{[n/2]} C_{n-r}^{r}\, p_j^{\,n-2r} q_j^{\,r} \dfrac{(\lambda_j T_s)^{n-r}}{(n-r)!}$, $n \in X$ случайной величины $\eta_{j,i}$ при каждом фиксированном $j = 1, 2, \ldots, m$ и $T_s = T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$. В частности, для производящей функции $\Psi_j(T_s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n;\, T_s) z^n$ указанного условного распределения случайной величины $\eta_{j,i}$ была приведена формула вида $\Psi_j(T_s, z) = \exp\{\lambda_j T_s(p_j z + q_j z^2 - 1)\}$.

3. Рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i \geq 0\}$

При каждом $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$ и $y \in Y_j$ равенство $\mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(s)}, z, y) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s)}, x, y) z^x$ определяет производящую функцию по z ($|z| \leq 1$), которая соответствует семейству вероятностей $\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(s)}, x, y)$, $x \in X$. Покажем следующее утверждение.

Теорема 2. Для производящих функций вида $\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$, выполняются следующие рекуррентные по $i \geq 0$ соотношения:

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = z^{-l_j} \mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0)\Psi_j(T_{2j-1}, z) - z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k;\, T_{2j-1}), \tag{13}$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = \mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\Psi_j(T_{2j}, z) + \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\Psi_j(T_{2j}, z), \tag{14}$$

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(r)}, z, 0) = \mathbf{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(r-1)}, z, 0)\Psi_j(T_{r-1}, z)\,. \tag{15}$$

Доказательство. Используя соотношение (10), вычислим функцию $\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$:

$$\mathbf{\Phi}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)\, z^x =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} z^x \sum_{v=0}^{x+l_j} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, \varphi_j(x + l_j - v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z^v \sum_{x=0}^{\infty} z^{x+l_j-v} \varphi_j(x + l_j - v;\, T_{2j-1}) +$$

$$+ z^{-l_j} \sum_{v=l_j}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z \sum_{x=v-l_j}^{\infty} {}^{v}z^{x+l_j-v} \varphi_j(x + l_j - v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z \sum_{k=l_j-v}^{\infty} {}^{v}z^k \varphi_j(k,\, T_{2j-1}) +$$

$$+ z^{-l_j} \sum_{v=l_j}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z^v \sum_{x=v-l_j}^{\infty} z^{x+l_j-v} \varphi_j(x + l_j - v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v \sum_{k=0}^{\infty} z^k \varphi_j(k;\, T_{2j-1}) +$$

$$+ z^{-l_j} \sum_{v=l_j}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v\, \Psi_j(T_{2j-1}, z) -$$

$$- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times z^v \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k;\, T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^v\, \Psi_j(T_{2j-1}, z) -$$

$$- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1}) =$$
$$= z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},0,z)\,\Psi_j(T_{2j-1},z)-$$
$$-z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$
$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1}).$$

Алогичным способом, используя соотношения (11) и (12), получим соответственно формулы (14) и (15). Теорема 2 доказана.

Рекуррентные соотношения (13), (14) и (15) не позволяют непосредственно изучить предельное поведение при $i\to\infty$ каждой из производящих функций вида $\boldsymbol{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,i}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, где $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$. В связи с этим получим рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений векторной марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i=0,1,\dots\}$ за $2m$ шагов её перехода. Для этого введём производящие функции: $\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)=\sum_{x=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)},x,l_j)\,z^x$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)=\sum_{x=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)},x,0)\,z^x$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0)=\sum_{x=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)},x,0)\,z^x$, где $j\in\{0,1,\dots,m\}$, $i\in\{0,1,\dots\}$, $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$, $|z|\le 1$. Используя выражения (13), (14) и (15), найдём рекуррентные по времени i выражения для производящих функций $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, где $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$. Обозначим период смены состояний обслуживающего устройства (светофора) через символ T, т. е. $T=T_1+T_2+\dots+T_{2m}$. Пусть $\Gamma^{(-2)}\equiv\Gamma^{(2m-2)}$, $\Gamma^{(-3)}\equiv\Gamma^{(2m-3)}$, ..., $\Gamma^{(-2m+1)}\equiv\Gamma^{(1)}$ и, наконец, $T_{-2}\equiv T_{2m-2}$, $T_{-3}\equiv T_{2m-3}$, ..., $T_{-2m+1}\equiv T_1$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Для производящих функций вида $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, где $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$, $|z|\le 1$, выполняются следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)=z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\times$$
$$\times\exp\{\lambda_j T(p_j z+q_j z^2-1)\}+$$
$$+z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z+q_j z^2-1)\}\times$$
$$\times\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)},0,w)-$$
$$-z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$
$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1}), \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)=$$
$$=z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)\exp\{\lambda_j T(p_j z+q_j z^2-1)\}+$$
$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z)-$$
$$-z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$
$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})\,\Psi_j(T_{2j},z), \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0)=$$
$$=z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0)\exp\{\lambda_j T(p_j z+q_j z^2-1)\}-$$
$$-z^{-l_j}\Psi_j(T_{r-1},z)\times\dots\times\Psi_j(T_{2j-1},z)\times$$
$$\times\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}$$
$$\varphi_j(k;T_{2j-1})+$$
$$+\Psi_j(T_{r-1},z)\times\Psi_j(T_{r-2},z)\times\dots\times\Psi_j(T_{2j-1},z)\times$$
$$\times\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z), \tag{18}$$

где $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$, $s=r-2j-1$, если $r>2j+1$, или $s=r+2m-2j-1$, если $r<2j$.

Доказательство. Покажем справедливость соотношений (16), (17) и (18).

1) Используя последовательно выражение (13) однократно, равенство (15) ровно $(2m-2)$ раз подряд и соотношение (14) однократно, получаем

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)=$$
$$=z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0)\,\Psi_j(T_{2j-1},z)-$$
$$-z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-2)},\,z,\,0)\Psi_j(T_{2j-1},\,z)\times$$

$$\times\Psi_j(T_{2j-2},z) - z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,\,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-2m+1}(\Gamma^{(2j-2m+1)},\,z,\,0)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j-1},\,z)\,\Psi_j(T_{2j-2},\,z)\times\,\ldots\,\times\Psi_j(T_{2j-2m+1},\,z) -$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,\,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-2m+1}(\Gamma^{(2j-2m+1)},\,z,\,0)\,\times$$

$$\times\prod_{k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,2m\}\,\setminus\,\{2j\}}\Psi_j(T_k,\,z) -$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,\,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j}\prod_{k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,2m\}\setminus\{2j\}}\Psi_j(T_k,\,z)\times$$

$$\times\Big(\mathbf{\Phi}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j-2m)},\,z,\,l_j)\,\Psi_j(T_{2j},\,z) +$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z)\Big) -$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}) =$$

$$= z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-2m}(\Gamma^{(2j-2m)},\,z,\,l_j)\times$$

$$\times\prod_{k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,2m\}\setminus\{2j\}}\Psi_j(T_k,\,z)\,\Psi_j(T_{2j},\,z) +$$

$$+ z^{-l_j}\prod_{k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,2m\}\setminus\{2j\}}\Psi_j(T_k,\,z)\times$$

$$\times\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j)},\,0,\,w)\,\Psi_j(T_{2j},z) -$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,\,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}).$$

Итак, в результате этих преобразований получим, что

$$\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)},\,z,\,l_j) = z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2mi}\,(\Gamma^{(2j)},\,z,\,l_j)\,\times$$

$$\times\exp\{\,\lambda_j T\,(p_j\,z + q_j\,z^2 - 1)\}\,+$$

$$+ z^{-l_j}\,\exp\{\,\lambda_j T\,(p_j\,z + q_j\,z^2 - 1)\}\times$$

$$\times\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j)},\,0,\,w)\,-$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)},\,v,\,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\,\varphi_j(k;\,T_{2j-1}).$$

Это и доказывает истинность рекуррентного выражения (16) для производящих функций вида $\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)},\,z,\,l_j)$.

2) Используя последовательно выражения (14) и (13) однократно и формулу (15) в точности $(2m-2)$ раз подряд, получаем

$$\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)},\,z,\,0) = \mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},\,z,\,l_j)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j},\,z)\,+$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},\,0,\,w)\,\Psi_j(T_{2j},\,z) =$$

$$= z^{-l_j}\,\mathbf{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)},\,z,\,0)\,\Psi_j(T_{2j-1},\,z)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j},z) - z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times\, z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})\,\Psi_j(T_{2j},z)+$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z)=$$

$$= z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2j-2)},z,0)\,\Psi_j(T_{2j-2},z)\times$$

$$\times\Psi_j(T_{2j-1},z)\,\Psi_j(T_{2j},z)\,-$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})\,\Psi_j(T_{2j},z)+$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z)=$$

$$= z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j+1-2m)},z,0)\prod_{k\in\{1,\,2,\,\ldots,\,2m\}}\Psi_j(T_k,z)\,-$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times\, z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})\,\Psi_j(T_{2j},z)+$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z).$$

Следовательно, окончательно имеем равенство (17):

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)},z,0)=$$

$$= z^{-l_j}\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j+1)},z,0)\exp\{\lambda_j T\,(p_j z+q_j z^2-1)\}-$$

$$- z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\,z^{v}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})\,\Psi_j(T_{2j},z)+$$

$$+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\,\Psi_j(T_{2j},z).$$

3) Считаем теперь, что $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$. Ниже используем, в общем случае, последовательно равенство (15) ровно $s=r-2j-1$ раз подряд при $r>2j+1$ или в точности $s=r+2m-2j-1$ раз подряд при $r<2j$. Затем воспользуемся соотношениями (14) и (13) однократно. Наконец, выражение (15) применим ровно $(2m-2-s)$ раз подряд. Все это дает возможность получить для производящих функций $\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)},z,0)$, $\Gamma^{(r)}\in\Gamma(j)$, рекуррентные выражения. Действительно, последовательно получаем:

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(r)},z,0)=\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(r-1)},z,0)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{r-1},z)\;=\ldots=$$

$$=\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-s}(\Gamma^{(2j+1)},z,0)\,\Psi_j(T_{r-1},z)\,\Psi_j(T_{r-2},z)\times$$

$$\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j+2},z)\,\Psi_j(T_{2j+1},z)=$$

$$=\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)},z,l_j)\;\Psi_j(T_{r-1},z)\,\Psi_j(T_{r-2},z)\times$$

$$\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j+1},z)\,\Psi_j(T_{2j},z)+$$

$$+\,\Psi_j(T_{r-1},z)\,\Psi_j(T_{r-2},z)\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j+1},z)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j},z)\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-s-1}\times(\Gamma^{(2j)},0,w)=$$

$$= z^{-l_j}\;\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)},z,0)\times$$

$$\times\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j-1},z)-$$

$$- z^{-l_j}\,\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j-1},z)\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times\, z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})+\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j-1},z)\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)$$

$$\times\Psi_j(T_{2j},z)=z^{-l_j}\,\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2m(i+1)-s-3}(\Gamma^{(2j-2)},z,0)\times$$

$$\times\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times\Psi_j(T_{2j-1},z)\Psi_j(T_{2j-2},z)-$$

$$- z^{-l_j}\,\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times$$

$$\times\Psi_j(T_{2j-1},z)\sum_{v=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)},v,0)\times$$

$$\times\, z^{v}\sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\,\varphi_j(k;T_{2j-1})+\Psi_j(T_{r-1},z)\times\ldots\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j-1},z)\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)},0,w)\times$$

$$\times\,\Psi_j(T_{2j},z)=\ldots=z^{-l_j}\;\boldsymbol{\Phi}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)},z,0)\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{2m} \Psi_j(T_k, z) - z^{-l_j}\, \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times$$

$$\times\, \Psi_j(T_{2j-1}, z) \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,\, 2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times$$

$$\times\, z^{v} \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\, \varphi_j(k;\, T_{2j-1}) +$$

$$+\Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j-1}, z) \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,\, 2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\, \Psi_j(T_{2j}, z).$$

Итак,

$$\boldsymbol{\Phi}_{j,\, 2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0) = z^{-l_j}\, \boldsymbol{\Phi}_{j,\, 2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0) \times$$

$$\times \exp\{\lambda_j T\,(p_j z + q_j z^2 - 1)\} -$$

$$- z^{-l_j}\, \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times$$

$$\times\, \Psi_j(T_{2j-1}, z) \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,\, 2m(i+1)-s-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times$$

$$\times\, z^{v} \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\, \varphi_j(k;\, T_{2j-1}) + \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times$$

$$\times\, \Psi_j(T_{2j-1}, z) \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,\, 2m(i+1)-s-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\Psi_j(T_{2j}, z),$$

где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$, $s = r - 2j - 1$, если $r > 2j + 1$, или $s = r + 2m - 2j - 1$, если $r < 2j$. Этим доказана истинность рекуррентного выражения (18) для производящих функций $\boldsymbol{\Phi}_{j,\, 2m(i+1)}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Для существования единственного стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\, i}, \xi'_{j,\, i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ необходимо $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$.

Доказательство. Пусть существует стационарное распределение последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\, i}, \xi'_{j,\, i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$, которое обозначим через $\{\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(s)}, x, y)\colon (\Gamma^{(s)}, x, y) \in \bigcup_{r=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(r)})\}$. В дальнейшем будем проводить рассуждение для производящей функции $\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)\, z^x$. Так как существует стационарное распределение, то можно записать следующее соотношение для указанной производящей функции $\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$:

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) =$$

$$= z^{-l_j}\, \boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) \exp\{\lambda_j T\,(p_j z + q_j z^2 - 1)\} +$$

$$+ z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T\,(p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times$$

$$\times\, z^{v} \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\, \varphi_j(k;\, T_{2j-1}), \tag{19}$$

Соотношение (19) получается из (16), если в качестве начального выбрать стационарное распределение. Разложим функцию $r_j(z) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}$ в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z = 1$:

$$r_j(z) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T\,(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\big|_{z=1} +$$

$$+ (-l_j z^{-l_j-1} \exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\} +$$

$$+ \lambda_j T(p_j + 2q_j z) z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\})\big|_{z=1}(z-1) +$$

$$+ o(z-1) = 1 + (\lambda_j T(1 + q_j) - l_j)(z - 1) +$$

$$+ o(z-1). \tag{20}$$

Разложим в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z = 1$ также и функцию

$$A_j(z) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times$$

$$\times\, z^{v} \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^{k}\, \varphi_j(k;\, T_{2j-1}).$$

Прежде преобразуем это выражение, используя формулу (9). В случае стационарной векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\, i}, \xi'_{j,\, i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ выражение для вероятности $\boldsymbol{Q}_{j,\, i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \sum_{v=0}^{w} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(w - v;\, T_{2j-1}).$$

Тогда для $A_j(z)$ получим:

$$A_j(z) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T\,(p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) -$$

$$-z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\, z^{v} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k\, \varphi_j(k;\, T_{2j-1}) = z^{-l_j} \times$$

$$\times \exp\{\lambda_j T\,(p_j\, z + q_j\, z^2 - 1)\} \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) -$$

$$-z^{-l_j}\sum_{w=0}^{l_j-1}\sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\,)\times$$

$$\times\varphi_j(w-v;\, T_{2j-1})\, z^w =$$

$$= z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T\,(p_j\, z + q_j\, z^2 - 1)\}\times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) z^w =$$

$$= z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} (\exp\{\lambda_j T\,(p_j\, z + q_j\, z^2 - 1)\} - z^w)\times$$

$$\times \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w).$$

Легко проверить, что $A_j(1) = 0$ и

$$\frac{d}{dz} A_j(z) = \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \times$$

$$\times [z^{-l_j}(\lambda_j T(p_j + 2q_j z)\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\} -$$

$$- wz^{w-1}) - l_j z^{-l_j}(\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\} - z^{w})^{-1})],$$

$$\frac{d}{dz} A_j(z)|_{z=1} = \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\, (\lambda_j T(1 + q_j) - w).$$

Поэтому $A_j(z)$ можно представить в виде

$$A_j(z) = A_j(1) + (z-1)\,(\frac{d}{dz} A_j(z)\,|_{z=1}) + o(z-1) =$$

$$= (z-1) \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\, (\lambda_j T\,(1 + q_j) - w) +$$

$$+ o(z-1). \tag{21}$$

Подставим найденные выражения (20) и (21) в формулу (19) и получим:

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\,(1 + (\lambda_j T\,(1 + q_j) - l_j)\times$$

$$\times(z-1) + o(z-1)) +$$

$$+ (z-1) \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\, (\lambda_j T\,(1 + q_j) - w) +$$

$$+ o(z-1).$$

Преобразовывая это выражение, найдем:

$$0 = \boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)[\lambda_j T(1 + q_j) - l_j] +$$

$$+ \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)[\lambda_j T(1 + q_j) - w] +$$

$$+ o(z-1)\,/\,(z-1).$$

Пусть z – действительное число; переходя теперь к пределу при $z \to 1$ и $z < 1$, можно последовательно найти:

$$0 = \boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\,(\lambda_j T\,(1 + q_j) - l_j) +$$

$$+ \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)[\lambda_j T(1 + q_j) - w],$$

$$0 = [\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)]\times$$

$$\times[\lambda_j T\,(1 + q_j) - l_j] + \sum_{w=0}^{l_j-1} (l_j - w)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w).$$

Так как $\boldsymbol{\Phi}_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) > 0$ при $z > 0$ и $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)(l_j - w) > 0$, $w = 0, 1, \ldots, l_j - 1$, то необходимо выполнение неравенства $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$. Теорема 5 доказана.

Список литературы

1. Федоткин А.М. Математические модели транспортных потоков на автомагистрали и на управляемом по циклическому алгоритму перекрестке / Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского. 2009. с. 30. Деп. в ВИНИТИ 11.01.09, № 5-В2009.

2. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

PROPERTIES OF A CONTROLLED VECTOR COUNTABLE-STATE MARKOV CHAIN SATISFYING RECURRENT RELATIONS

A.M. Fedotkin

Invariant properties of a finite assemblage of controlled vector countable-state Markov chains are considered. Each Markov chain is given by a functional relation and a set of random variables. A full Kolmogorov classification of state space for such controlled Markov chains has been carried out. Easily verifiable necessary conditions for the existence of a stationary distribution for such controlled vector countable-state Markov chains are defined in terms of distribution parameters.

Keywords: controlled vector Markov chain, essential and inessential states, cyclic subclasses, one-dimensional distributions of a Markov chain, generating function, stationary distribution.