УДК 519.21

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.А. Зорин, В.И. Мухин, Е.В. Гаврина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

ptv@vmk.ru

Поступила в редакцию 18.02.2009

Рассмотрены некоторые свойства сумм, являющихся смесями пуассоновских величин. В качестве примера рассмотрена некоторая модель процесса риска.

Ключевые слова: случайная величина, функция распределения, смесь распределений, процесс риска.

1. Введение

Развитие теории и применений вероятностных распределений приводит к проблеме выделения разных классов распределений случайных величин, для которых применяются разного рода представления в виде интегралов, в виде разложений в ряды Лагранжа (многочисленные примеры которых см. в [1]). Особо можно отметить применения в теории и на практике понятия смеси распределений, представляющих собой варианты представления распределения в виде интегралов Стилтьеса. В главе 12 работы [2] дано определение и рассмотрены некоторые свойства и применения понятия смеси вероятностных распределений.

Пусть даны: 1) семейство $G(x,u)=P(\xi_u<x)$ функций распределения случайных величин ξ_u при всех $u\in T$ для некоторого множества $T\subset R^1$; 2) случайная величина τ с множеством значений T и с функцией распределения $H(x)=P(\tau<x)$, $x\in R^1$. Тогда

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,u)\,dH(u)\,,\quad x\in R^1, \qquad (1)$$

называется смесью функций распределения $G(x,u)$.

Оказывается при этом, что $F(x)=P(\xi<x)$, где новая случайная величина $\xi=\xi_\tau$ принимает значения случайной величины ξ_u при выполнении события $\{\tau=u\}$. Применяя оператор E для обозначения математического ожидания, равенство (1) можно записать в виде $F(x)=E(G(x,\tau))$.

В работе [3] было получено аналитическое выражение нецентрального χ^2-распределения, давшее одно из первых представлений распределения в виде смеси распределений. В работе [4] изложены первые определения, связанные с понятием смеси вероятностных мер, рассмотрены многие их свойства. В дальнейшем появилось большое количество работ по теории и практике использования смесей (в книге [5] приводятся многочисленные примеры применения смесей распределения в теории очередей и во многих других задачах). В статье [6] сформулировано понятие смеси процессов Пуассона и дан обзор свойств таких процессов, нашедших много применений в теории процессов риска и в других задачах.

2. Определение и свойства специальных классов распределения

Пусть: i) дано вероятностное пространство (Ω,F,P), на котором даны случайные величины ξ_n, $n\in T\subset\{0,1,2,\ldots\}$; ii) предполагаем существование конечных значений $E(\xi_n)$, $n\in T$ и конечного значения величины $\varphi=\sum_{n\in T}(n!)^{-1}E(\xi_n)$.

Будем говорить, что распределение неотрицательной целочисленной случайной величины η, заданное равенствами

$$P(\eta=n)=\frac{E(\xi^n)}{n!\varphi},\quad n\in T\,, \qquad (2)$$

принадлежит классу $A[\xi_n,n\in T]$. Для краткости будем писать в этом случае $\eta\in A[\xi_n,n\in T]$. В случае $\xi_n=\xi^n$, при всех $n\in N=\{0,1,2,\ldots\}$, будем обозначать $\eta\in A[\xi]$. Отметим некоторые свойства случайных величин η этих классов.

Лемма. *Если неотрицательная дискретная случайная величина* ξ *имеет конечное математическое ожидание* $E(e^{\xi})$, *то случайная величина* $\eta \in A[\xi]$ *имеет распределение типа смеси распределения пуассоновских величин в виде*

$$P(\eta = n) = \sum_{k \in N} \frac{a_k^n e^{-a_k}}{n!} p_k \,,$$

$$p_k = \frac{e^{a_k}}{E(e^{\xi})} P(\xi = a_k)\,,\ n \in N\,.$$

Доказательство. Из условия леммы и свойств математического ожидания $E(\xi^n) = \sum_{k \in T} a_k^n P(\xi = a_k)$ непосредственно следует цепочка равенств:

$$P(\eta = n) = \sum_{n \in N} \frac{a_k^n}{n! E(e^{\xi})} P(\xi = a_k) =$$

$$= \sum_{n \in N} \frac{a_k^n e^{-a_k}}{n! E(e^{\xi})} P(\xi = a_k) e^{a_k}\,,$$

поэтому выполняется утверждение леммы.

Теорема 1. *Если неотрицательная дискретная величина* $\eta \in A[\xi]$ *порождена любой случайной величиной* $\xi \ge 0$, *для которой существует конечное значение* $E(e^{\xi})$, *то распределение величины* η *является результатом смешивания пуассоновского распределения.*

Доказательство. В общем случае доказательство следует из возможности [7] аппроксимации случайных величин с помощью последовательности соответствующих дискретных величин, $0 \le \xi_k \le \xi$, $\xi_k \uparrow \xi$, $k \to \infty$ для всех $\varpi \in \Omega$ и дальнейшего применения теоремы Лебега о предельном переходе под знаком математического ожидания.

Теорема 2. *Пусть: 1) даны взаимно независимые пары случайных величин* $(\xi_i, \eta_i)_{i=1,..,m}$, *2) существуют конечные значения величин* $\varphi_k = E(e^{\xi_k})$, $k = 1,\ldots,m$, *3) выполняются равенства* $P(\eta_k = n) = \dfrac{E(\xi_k^n)}{n!\varphi_k}$, *при всех* $n \in N$, $k = 1,\ldots,m$. *Тогда выполняются равенства*

$$P(\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_m = n) = \frac{E\{(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m)^n\}}{n!\varphi}\,,$$

$$n = 0\,,\,1\,,\ldots \qquad (3)$$

При этом использовано обозначение $\varphi = E(e^{\xi_1 + \cdots + \xi_m})$.

Доказательство. Используя независимость величин η_k, $k = 1,\ldots,m$, легко получим равенства:

$$P(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m = n) =$$

$$= \sum_{k_1 + \ldots + k_m = n} P(\eta_1 = k_1, \eta_2 = k_2, \eta_m = k_m) =$$

$$= \sum_{k_1 + \ldots + k_m = n} \prod_{i=1}^{m} P(\eta_i = k_i)\,.$$

Далее применим условия связи величин η_k, ξ_k, т.е. $\eta_k \in A[\xi_k]$, что приводит к равенствам

$$P(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m = n) =$$

$$= \sum_{k_1 + \ldots + k_m = n} \prod_{i=1}^{m} \frac{E(\xi_i^{k_i})}{k! \varphi_i} =$$

$$= \sum_{k_1 + \ldots + k_m = n} \frac{E(\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \cdots \xi_m^{k_m})}{k_1! k_2! \cdots k_m! \varphi_1 \cdots \varphi_m} =$$

$$= E \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n} \frac{\xi_1^{k_1} \cdots \xi_m^{k_m}}{k_1! \cdots k_m! \varphi_1 \cdots \varphi_m} =$$

$$= \frac{1}{n! \varphi_1 \cdots \varphi_m} E \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n} \frac{n! \xi_1^{k_1} \cdots \xi_m^{k_m}}{k_1! \cdots k_m!} =$$

$$= \frac{1}{n! \varphi_1 \cdots \varphi_m} E((\xi_1 + \cdots + \xi_m)^n)\,.$$

Таким образом, учитывая равенства $\prod_{i=1}^{m} \varphi_i = \prod_{i=1}^{m} E(e^{\xi_i}) = E(\prod_{i=1}^{m} e^{\xi_i}) = E(e^{\xi_1 + \cdots + \xi_m}) = \varphi$, получаем представление (3), что доказывает теорему.

Теорема 3. *Пусть на некотором вероятностном пространстве: 1) дана последовательность взаимно независимых пар случайных величин* $(\eta_k, \xi_k)_{k=1,2,\ldots}$, *таких, что* $\eta_k \in A[\xi_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *2) задана дискретная случайная величина* $\nu \ge 0$, *независимая от последовательности случайных величин* $(\xi_k)_{k=1,2,\ldots}$, *3) дано равенство* $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_\nu$, 4) $\eta \in A[\xi]$. *Тогда распределение величины* η *совпадает с распределением суммы* $\eta = \sum_{k=1}^{\tau} \eta_k$ *случайного числа* τ *величин. При этом выполняются равенства*

$$P(\tau = k) = \frac{\varphi_1 \cdots \varphi_k}{\varphi} P(\nu = k)\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Доказательство. Используя известные свойства математического ожидания случайных величин, в том числе свойство об условном математическом ожидании, будем иметь равенства

$$E((\xi_1+\cdots+\xi_\nu)^n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E\left(\left(\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)^n \mid \nu=k\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^n\right).$$

В конце этих равенств использована независимость величины ν от величин ξ_k, $k=0$, 1, 2, … Применяя далее утверждение теоремы 2, будем иметь равенства

$$E\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^n = n!\varphi_1\cdots\varphi_k P(\eta_1+\cdots+\eta_k=n),$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\varphi_k=E(e^{\xi_k})$, $\varphi=E(e^{\xi_1+\cdots+\xi_\nu})$.

Далее легко проверяются равенства (на основе свойств математических ожиданий случайных величин):

$$\varphi=E(e^{\xi_1+\cdots+\xi_\nu})=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E(e^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu}\mid \nu=k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E(e^{\xi_1+\ldots+\xi_k}\mid \nu=k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E(e^{\xi_1+\ldots+\xi_k})=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E(e^{\xi_1})\cdots E(e^{\xi_k})=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)\varphi_1\cdots\varphi_k\ .$$

Значит, выполняется равенство $\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)\times$ $\times\dfrac{\varphi_1\cdots\varphi_k}{\varphi}=1$, которое с учетом неотрицательности коэффициентов φ, φ_k позволяет утверждать о существовании неотрицательной целочисленной случайной величины τ такой, что

$$P(\eta=n)=\frac{1}{n!\varphi}E((\xi_1+\cdots+\xi_\nu)^n)=$$
$$=\frac{1}{n!\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)E((\sum_{i=1}^{k}\xi_i)^n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\nu=k)\frac{\varphi_1\cdots\varphi_k}{\varphi}P(\eta_1+\cdots+\eta_k=n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\tau=k)P(\eta_1+\cdots+\eta_k=n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(\tau=k)P(\eta_1+\cdots+\eta_k=n\mid\tau=k)=$$
$$=P(\eta_1+\cdots+\eta_\tau=n),$$

что доказывает теорему.

3. Примеры распределений класса $A[\xi]$

Пример 1. Если $P(\xi=a)=1$, $a>0$, то $E(\xi^n)=a^n$, $P(\eta=n)=\dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$.

Пример 2. Пусть случайная величина ξ является непрерывной случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения $G(x)=P(\xi<x)=1-e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$. Тогда легко видеть, что

$$E(\xi^n)=\int_0^{\infty}\lambda x^n e^{-\lambda x}dx=\frac{n!}{\lambda^n},$$
$$n=0,1,2,\ldots,\quad \lambda>1,$$
$$\varphi=E(e^{\xi})=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x+x}dx=\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^{-1},$$
$$P(\eta=n)=p^n(1-p),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad p=\lambda^{-1}.$$

Пример 3. Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вида $f(x)=\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-1}e^{-\lambda x}$ при $x>0$ и $f(x)=0$ при $x\leq 0$, $\alpha>0$, $\lambda>1$. Тогда непосредственные элементарные расчеты дают следующие соотношения

$$E(\xi^n)=\int_o^{\infty}x^n\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}dx=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n},$$
$$\varphi=E(e^{\xi})=\int_o^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x+x}dx=\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{\alpha},$$
$$P(\eta=n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)}(1-\frac{1}{\lambda})^{\alpha}\lambda^{-n},$$
$$n=0,1,2,\ldots.$$

Пример 4. Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)=(1+\alpha)x^{\alpha}$, $\forall x\in(0,1)$, $f(x)=0$, $\forall x\notin(0,1)$. Тогда стандартные вычисления дают следующие результаты:

$$P(\eta=n)=\frac{\alpha+1}{(\alpha+n+1)n!\varphi}, \quad \varphi=(\alpha+1)\int_0^1 x^\alpha e^x dx, \quad n=0,1,2,\ldots\,.$$

Пример 5. Пусть непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)=(\alpha-1)x^{-\alpha}$, $\forall x\in(0,1)$, $f(x)=0$, $\forall x\notin(0,1)$, при фиксированном $\alpha>1$.

Тогда $E(\xi^n)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha-n-1}$ и, следовательно, $P(\eta=n)=\dfrac{\alpha-1}{n!(\alpha-1-n)\varphi}$, $0\le n<\alpha-1$.

Пример 6. *Рассмотрим процесс риска* следующего вида

$$\zeta_n=x+cn-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\eta_i}\xi_{ik}, \quad n=1,2,\ \ldots,$$

в котором константа $c>0$ соответствует постоянной интенсивности страховых премий, поступающих в каждый из периодов $n=1,2,\ldots$ в страховую компанию. В период с номером $i=1,2,\ \ldots,n$ производятся выплаты $\xi_{i1},\ldots,\xi_{i\eta_i}$, Предполагаем дополнительно: a) все случайные величины $\eta_i,\xi_{i1},\ldots,\xi_{ik},\ldots$ взаимно независимы при всех $0\le i\le n$; b) все случайные величины $\xi_{i1},\ldots,\xi_{ik},\ldots$ одинаково распределенные, $0\le i\le n$; c) целочисленные случайные величины $\eta_i\ge 0$ имеют распределения вида $P(\eta_i=n)=\dfrac{E(\vartheta_i^n)}{n!E(e^{\vartheta_i})}$, $n=1,2,\ldots$, при каждом $0\le i\le n$, с некоторыми случайными величинами $\vartheta_k\ge 0$.

Обозначим вероятность неразорения $\beta(x)=P(\zeta_n\ge 0,\forall n\ge 1)$ при начальном резерве $x\ge 0$. Тогда $\alpha(x)=1-\beta(x)$ задает вероятность разорения данного процесса риска.

Обозначим $V_i=\sum_{k=1}^{\eta_i}\xi_{ik}-c$. Тогда из приведенной выше конструкции процесса риска ζ_n, $n=1,2,\ldots$, следует, что V_i, $0\le i\le n$, образуют последовательность взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин, причем $\zeta_n=x-\sum_{i=1}^{n}V_i$, $n\ge 1$.

Условие существования положительного числа $R>0$, удовлетворяющего уравнению $E(e^{RV_i})=1$, достаточно (см. [8]) для выполнения неравенства Лундберга $\alpha(x)\le e^{-Rx}$, $\forall x\ge 0$. Поэтому, с учетом вида величин V_i, получим следующее уравнение для $R>0$:

$$E(e^{RV_i})=e^{-Rc}E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{i\nu_i})})=1.$$

Проведем типичные преобразования полученного уравнения с учетом условий на модель процесса риска, приведенных в начале данного примера:

$$E(e^{RV_i})=E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{i\eta_i}-c)})=$$
$$=e^{-cR}E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{i\eta_i})})=$$
$$=e^{-cR}\sum_{k=0}^{\infty}P(\eta_i=k)E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{i\eta_i})}\mid\eta_i=k).$$

Поэтому, принимая во внимание условия независимости введенных в процессе риска наборов случайных величин, получим

$$E(e^{RV_i})=$$
$$=e^{-cR}\sum_{k=0}^{\infty}P(\eta_i=k)E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{ik})}\mid\eta_i=k)=$$
$$=e^{-cR}\sum_{k=0}^{\infty}P(\eta_i=k)E(e^{R(\xi_{i1}+\cdots+\xi_{ik})}).$$

Таким образом, учитывая независимость и одинаковые распределения случайных величин ξ_{ik}, приходим к уравнению

$$E(e^{RV_i})=e^{-cR}\sum_{k=0}^{\infty}P(\eta_i=k)\prod_{i=1}^{k}E(e^{R\xi_{ik}})=$$
$$=e^{-cR}\sum_{k=0}^{\infty}P(\eta_i=k)(E(e^{R\xi_{ik}}))^k=1.$$

Преобразуем это уравнение к более компактному виду. Обозначим $h(z)=E(z^{\eta_1})$, $g(u)=E(e^{u\xi_{11}})$. Предположим, что $h(z)$ существует при $|z|<r$ с некоторым значением $r>1$, соответственно $g(z)$ определена при области $u\in[0,a)$. Далее проведем стандартные преобразования, которые приведут к следующим равенствам:

$$h(z)=\sum_{k\ge 0}z^kP(\eta_1=k)=$$
$$=\sum_{k\ge 0}z^k\frac{E(\vartheta_1^k)}{k!E(e^{\vartheta_1})}=\frac{E(e^{z\vartheta_1})}{E(e^{\vartheta_1})}.$$

Поэтому для постоянной $R>0$ получаем уравнение $h(g(R))=e^{cR}$. С учетом приведенного выше вида функции $h(z)$ получим окончательно следующую форму уравнения для $R>0$:

$$E(e^{g(R)\vartheta_1})=e^{cR}E(e^{\vartheta_1}).$$

Список литературы

1. Consul Prem C., Famoye F. Lagrangian probability distributions. Boston: Birkhäuser, 2006. 335 p.
2. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с.
3. Fisher R.A. The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient // Proc. Soc. ser. A. 1928. Vol. 121. P. 664–673.
4. Robbins H. Mixture of distributions // Ann. Math. Stat.1948. V. 19. P. 360–369.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
6. Гранделл Я. Смешанные пуассоновские процессы // Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: Изд-во ТВП, 1998. Т. 5. Вып. 1. С. 44–65.
7. Ширяев А.Н. Вероятность: В 2 кн. / 3-е изд. перераб. и доп. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.
8. Sundt B. An introduction to Non-Life insurance Mathematics. Ed. 4, Karlsruhe, Verlag Versicherungswirtsch, 1999. 222 p.

ON ONE CLASS OF RANDOM VARIABLES

V.A. Zorine, V.I Mukhin., E.V. Gavrina

Some properties of sums being mixtures of Poisson variables have been considered. A risk process model has been taken as an application example.

Keywords: random variables, probability distribution functions, distributions mixture, risk processes, ruin probability.