УДК 517.53

КРАЙНИЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В.П. Важдаев

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

vestnik@unn.ru

Поступила в редакцию 03.03.2009

Рассматривается задача нахождения наилучшей константы c_n в оценке нормы $\| S_n \|_p \le \le c_n \| S_n \|_1$ $(p > 1)$ в классе P_n неотрицательных тригонометрических полиномов. Основным результатом является доказательство того, что крайние точки в этом классе – полиномы, все нули которых вещественны. Получена оценка c_n, порядок которой точен. В случае $p = 2$ приведён явный вид функции, экстремум которой даёт точную оценку нормы.

Ключевые слова: неотрицательные тригонометрические полиномы, крайние точки.

1. Введение

Неотрицательные тригонометрические полиномы встречаются во многих задачах теории функций. Достаточно напомнить, что ядро Фейера

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left|1 + e^{it} + e^{i2t} + \ldots + e^{int}\right|^2 = = \frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{n+1}{2}t \Big/ \sin\frac{t}{2}\right)^2, \quad (1)$$

являющееся одним из центральных понятий в теории рядов Фурье – неотрицательный тригонометрический полином. И многие глубокие факты этой теории получены именно благодаря нетрицательности $F_n(t)$.

Неотрицательные тригонометрические полиномы нашли также применение в задаче о распределении нулей дзета-функции Римана (см. [1, 2]).

В 1977 г. в Бюллетене Лондонского математического общества был помещён обзор [3]. В частности, под номером 1 Pr. 4.26 была предложена следующая задача: найти $\sup(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)$, где $a_1,\ldots,a_n$ выбираются так, что полином $p(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ имеет положительную вещественную часть в круге $|z|<1$.

В 1984 г. в журнале Journal of the London Mathematical Society появляется статья [4], где эта задача решается в следующей постановке: найти

$$\Lambda_n = \sup_{q\in P_n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (q(e^{it}))^2\, dt, \quad (2)$$

где P_n – множество неотрицательных тригонометрических полиномов степени не выше n и с постоянным членом, равным единице, т.е. полиномы вида

$$q(e^{it}) = 1 + \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \ldots + + \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt. \quad (3)$$

Эквивалентность этих двух задач вытекает из того, что вещественная часть алгебраического полинома $p(z)$ есть тригонометрический полином (3). В силу требования неотрицательности вещественной части полинома $p(z)$ тригонометрический полином $q(e^{it})$ – неотрицательный.

Поскольку $\Lambda_n = f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)$, то мы имеем задачу на условный экстремум функции $2n$ переменных в области, определяемой условиями неотрицательности полинома (3). Описание области значений коэффициентов такого полинома является сложной задачей. Поэтому особую важность приобретает теорема Фейера – Рисса, согласно которой любой неотрицательный тригонометрический полином может быть отождествлён с квадратом модуля некоторого полинома (см. [5]):

$$S_n(t) = \left|d_0 + d_1 e^{it} + \ldots + d_n e^{int}\right|^2,$$

$$d_0 > 0,\ d_k = \gamma_k + i\delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Равенство единице свободного члена полинома приводит к условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} |d_k|^2 = 1. \qquad (4)$$

Таким образом, задача нахождения экстремума функционала (2) в классе полиномов (3), удовлетворяющих условию (4), есть задача на условный экстремум в пространстве размерности $(2n+1)$ на сфере

$$d_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\delta_k^2 = 1.$$

В работе [4] было доказано, что экстремум достигается для чётных полиномов, т.е. полиномов вида $S_n(t) = 1 + \alpha_1 \cos t + ... + \alpha_n \cos nt$. Это вдвое уменьшает размерность задачи. Нельзя ли ещё продвинуться на этом пути?

Простое наблюдение, что квадрат тригонометрического полинома – неотрицательный полином, наводит на мысль о возможности представления неотрицательного тригонометрического полинома в виде квадрата некоторого полинома, порядок которого, естественно, вдвое ниже. Например, если все корни неотрицательного тригонометрического полинома вещественны, то такое представление возможно. Известно, что всякий тригонометрический полином порядка n имеет в полосе комплексной плоскости ширины 2π ровно n нулей, с учётом кратности, и представляется через эти нули следующим образом (см., например, [6])

$$S_n(z) = A\prod_{k=1}^{2n}\sin\frac{z - z_k}{2}, \quad A = \text{const}.$$

Но если полином неотрицательный, а все его нули $z_k = t_k$ вещественны, то кратность каждого нуля равна двум и мы имеем представление

$$S_n(t) = A\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{t - t_k}{2}.$$

При чётном $n = 2m$ имеем

$$S_{2m}(t) = (x_0 + x_1\cos t + y_1 \sin t + ... + x_m \cos mt + y_m \sin mt)^2,$$

а при нечётном $n = 2m+1$

$$S_{2m+1}(t) = \left(x_0\cos\frac{t}{2} + y_0\sin\frac{t}{2} + ... + x_m\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t + y_m\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)^2.$$

Ещё в 1930 г. С.Н. Бернштейн (см. [7], а также [8]) указывал на один метод П.Л. Чебышёва, с помощью которого доказывается, что в некоторых экстремальных задачах в классе неотрицательных тригонометрических полиномов экстремальные полиномы имеют только вещественные нули. К сожалению, этот метод применим только к линейным экстремальным задачам.

В настоящей работе рассматривается задача нахождения

$$\Lambda_n = \sup_{S_n \in P_n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n^p(t)dt, \; p > 1. \qquad (5)$$

Эта задача нелинейная. Существенным здесь является то, что P_n – выпуклое множество. Максимум выпуклого функционала (5) достигается в его крайних точках. Оказывается, что крайние точки множества P_n как раз и есть полиномы, все нули которых вещественны.

2. P_n – выпуклое множество

Напомним, что выпуклым множеством называется множество, которое вместе со своими любыми двумя точками x_1 и x_2 содержит и весь отрезок $[x_1, x_2]$ (см., например, [9]). Аналитически это свойство выражается следующим образом: если для $x_{1,2} \in X$ и

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_\lambda \in X, \; 0 \le \lambda \le 1, \qquad (6)$$

то множество X – выпуклое. Действительно, пусть полиномы $S_{1,2} \in P_n$ и их свободные члены равны единице. Тогда

$$S_\lambda = \lambda S_1 + (1-\lambda)S_2, \; 0 \le \lambda \le 1,$$

также неотрицательный тригонометрический полином порядка не выше n.

Нормирующее условие (4) для него также, очевидно, выполняется.

Далее нам удобнее иметь представление полинома в виде

$$S_n(e^{it}) = a\prod_{k=1}^{n}\left|e^{it} - \lambda_k\right|^2, \; a > 0, \; |\lambda_k| \le 1, \qquad (7)$$

следующем из теоремы Фейера – Рисса. Постоянная a, согласно нормирующему условию (4), вычисляется по формуле

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{k=1}^{n}\left|e^{it} - \lambda_k\right|^2 dt.$$

3. Крайние точки множества P_n

Точка $x \in X$ выпуклого множества называется его крайней точкой, если не существует точек $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, для которых x есть внутренняя точка отрезка $[x_1, x_2]$. Другими словами, точка $x \in X$ является крайней точкой этого множества в том и только в том случае, когда нет другого способа представить *x* в виде линейной комбинации (6), кроме как $\lambda x + (1-\lambda)x = x,\ 0 \le \lambda \le 1$, (см., например, [10]). Простейшие примеры: вершины треугольника – это его крайние точки, крайние точки круга – это точки ограничивающей его окружности. Естественно возникает вопрос: какие условия выделяют из представления (7) любой точки множества P_n его крайние точки?

Утверждение 1. Крайняя точка P_n – это полином порядка *n*.

Предположим, что некоторый полином $S_l(e^{it})$ является крайней точкой P_n, но его порядок меньше, чем *n*. С учётом тождества

$$\left|1+e^{it}\right|^2 + \left|1-e^{it}\right|^2 = 4$$

этот полином можно представить в виде суммы

$$S_l(e^{it}) = \frac{a}{4}\frac{1}{a_1}a_1\,|1+e^{it}|^2 \prod_{k=1}^{l}|e^{it}-\lambda_k|^2 +$$

$$+\frac{a}{4}\frac{1}{a_2}a_2\,|1-e^{it}|^2 \prod_{k=1}^{l}|e^{it}-\lambda_k|^2 =$$

$$= \frac{a}{4a_1}S_1(e^{it}) + \frac{a}{4a_2}S_2(e^{it}),$$

$$\frac{1}{a_{1,2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1\pm e^{it}|^2\prod_{k=1}^{l}|e^{it}-\lambda_k|^2 dt.$$

Если заметить, что постоянные $\lambda_{1,2} = a/4a_{1,2}$ связаны соотношением

$$\lambda_1+\lambda_2 = \frac{a}{4}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\left|1+e^{it}\right|^2+\left|1-e^{it}\right|^2\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{l}\left|e^{it}-\lambda_k\right|^2 dt = a\frac{1}{a} = 1,$$

то получается, что полином S_l представлен в виде выпуклой комбинации двух различных полиномов из P_n $S_l = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$, $\lambda_1+\lambda_2 = 1$, что для крайней точки невозможно. Итак, крайние точки P_n – это полиномы, порядок которых равен *n*.

Утверждение 2. Для крайней точки $S_n(e^{it}) \in P_n$ в представлении (7) $|\lambda_k| = 1$, т.е. все корни полинома $S_n(e^{it})$ лежат на единичной окружности или все корни тригонометрического полинома $S_n(t)$ вещественны.

Рассмотрим тригонометрический полином

$$s(t) = |\lambda - e^{it}|^2 = ||\lambda|e^{i\gamma} - e^{it}|^2 =$$

$$= 1 + |\lambda|^2 - 2|\lambda|\cos(t-\gamma).$$

Очевидна следующая оценка

$$1+|\lambda|^2 - 2|\lambda|\cos(t-\gamma) \ge 1+|\lambda|^2 - 2|\lambda| =$$

$$= (1-|\lambda|)^2.$$

Если $|\lambda|<1$, то между полиномом $s(t)$ и нулём есть «зазор», равный $(1-|\lambda|)^2$, и $s(t) \ge (1-|\lambda|)^2 > 0,\ |\lambda|<1,\ t\in[0,\ 2\pi]$. Поэтому если к полиному $s(t)$ добавить или вычесть из него функцию $\varphi(t) = (1-|\lambda|)^2\cos t$, то снова получатся неотрицательные тригонометрические полиномы, т.к. $|\varphi(t)| \le (1-|\lambda|)^2 \le s(t)$. Обозначим эти полиномы соответственно через

$$s_{1,2}(t) = |\lambda - e^{it}|^2 \pm \varphi(t) \ge 0.$$

Таким образом, неотрицательный тригонометрический полином $s(t)$ представлен в виде суммы также неотрицательных полиномов первого порядка $s(t) = s_1(t)/2 + s_2(t)/2$.

Рассмотрим теперь полином порядка *n* и предположим, что один из его корней, например λ_n, не лежит на единичной окружности, т.е. $|\lambda_n|<1$. Выделим в представлении (7) этого полинома множитель, соответствующий этому корню

$$S_n(e^{it}) = a|\lambda_n - e^{it}|^2\prod_{k=1}^{n-1}|e^{it}-\lambda_k|^2,\quad |\lambda_k| \le 1.$$

Пользуясь представлением этого полинома $s(t) = s_1(t)/2 + s_2(t)/2$, будем иметь

$$S_n(t) = \frac{a}{2}\frac{1}{a_1}a_1 s_1(t)\prod_{k=1}^{n-1}|e^{it}-\lambda_k|^2 +$$

$$+\frac{a}{2}\frac{1}{a_2}a_2 s_2(t)\prod_{k=1}^{n-1}|e^{it}-\lambda_k|^2 =$$

$$= \frac{a}{2a_1}q_1(t) + \frac{a}{2a_2}q_2(t),$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}s_i(t)\prod_{k=1}^{n-1}|e^{it}-\lambda_k|^2\,dt,\ i=1,2.$$

Заметим, что полиномы $q_{1,2}(t)$ неотрицательны, их порядок равен *n*, а свободные члены равны единице. Также легко проверяется, что в линейной комбинации $S_n = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ сумма $\alpha_1+\alpha_2 = 1$. Таким образом, полином $S_n(t)$, являющийся крайней точкой P_n, представлен в виде выпуклой комбинации различных полиномов $q_{1,2}(t) \in P_n$, что невозможно. Значит, крайние точки множества P_n – это полиномы $S_n(e^{it})$, все нули которых лежат на единичной окружности, что означает, что все корни тригонометрического полинома $S_n(t)$ вещественны.

4. Крайние точки P_n – экстремальные для функционала (5)

Функционал (5) – это p-я степень L_p-нормы в классе неотрицательных тригонометрических полиномов. Инвариантность класса P_n относительно сдвига и выпуклость нормы $L_p(p>1)$ позволяют установить, что экстремальные полиномы – чётные. В самом деле, в силу периодичности полинома $S_n(t)$ можно перейти к промежутку $[-\pi, \pi]$. При этом нормирующее условие (4) сохраняется. Если полином $S_n(t)$ экстремальный, то полином $S_n(-t)$ тоже экстремальный. Покажем, что чётный полином $S_n^*(t) = (S_n(t) + S_n(-t))/2$ тоже экстремальный. Условие (4) для него легко проверяется, а к интегралу

$$J = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_n^*(t)]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)/2 + S_n(-t)/2]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

применим неравенство Минковского (см., например, [11])

$$J \le \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)/2]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(-t)/2]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(t)]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Итак, supremum функционала (6) в классе P_n неотрицательных тригонометрических полиномов достигается в его подклассе чётных неотрицательных полиномов, т.е. полиномов вида $S_n(t) = 1 + \alpha_1 \cos t + ... + \alpha_n \cos nt$.

Утверждение 3. Если существует такой полином $S_n^* \in P_n$, что

$$\Lambda_n = \sup_{S_n \in P_n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n^p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[S_n^*(t) \right]^p dt, \ p > 1,$$

то этот полином является крайней точкой P_n.

Допустим, что это не так и S_n^* – внутренняя точка, а значит, представима в виде выпуклой комбинации двух различных точек из P_n

$$S^* = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Тогда в цепочке неравенств

$$\Lambda_n^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[S_n^*(t) \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\lambda_1 S_1(t) + \lambda_2 S_2(t)]^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \lambda_1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} + \lambda_2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_2^p(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \lambda_1 \Lambda_n^{1/p} + \lambda_2 \Lambda_n^{1/p} = \Lambda_n^{1/p}$$

везде должны быть знаки равенства, т.е. мы имеем случай равенства в неравенстве Минковского, что возможно, если только $S_1(t) = C S_2(t)$. Значение постоянной найдём из условия (4), что даёт $C = 1$.

Итак, $S_1(t) \equiv S_2(t)$. Это как раз и означает, что S_n^* – крайняя точка.

5. Оценка Λ_n

Дадим оценку сверху величины Λ_n для любого $p > 1$:

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^p(t) dt \le \max_t S_n^{p-1}(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^p(t) dt =$$

$$= \max_t S_n^{p-1}(t).$$

Для неотрицательных тригонометрических полиномов известна оценка (см. [5], т. 2, отдел 6) $\max_t S_n(t) \le n+1$, поэтому $\Lambda_n \le (n+1)^{p-1}$. Покажем, что порядок этой оценки точный. Оценим снизу величину интеграла (5) для ядра Фейера (1)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_n^p(t) dt \ge \frac{1}{\pi} \frac{1}{(n+1)^p} \int_0^{\pi/(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2p} dt \ge$$

$$\ge \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2p} (n+1)^{p-1}.$$

Здесь для оценки подынтегрального выражения применены неравенства

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \ \sin x \leq x, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p} (n+1)^{p-1} \leq \Lambda_n \leq (n+1)^{p-1}$, т.е. порядок оценки точный.

6. Точная оценка величины Λ_n для $p = 2$

В случае чётного значения $n = 2m$ экстремум достигается полиномами вида

$$S_{2m}(t) = (x_0 + x_1 \cos t + ... + x_m \cos mt)^2$$

и задача сводится к поиску максимума функции

$$\Lambda_n = 1 + \frac{0.5\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i-j=k} x_i x_j + 0.5 \sum_{i+j=k} x_i x_j\right)^2\right)}{\left(x_0^2 + 0.5\sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)^2}.$$

При нечётном значении $n = 2m+1$ экстремальные полиномы имеют вид

$$S_{2m+1}(t) = \left(x_0 \cos\frac{t}{2} + x_1 \cos\frac{3t}{2} ... + x_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)t\right)^2$$

и нужно найти максимум функции

$$\Lambda_n = 1 + \frac{2\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i-j=k} x_i x_j + 0.5 \sum_{i+j=k-1} x_i x_j\right)^2\right)}{\left(\sum_{k=0}^{m} x_k^2\right)^2}.$$

Вычисление величин Λ_n реализовано с помощью пакета МатЛаб.

Приведём с точностью до четырёх знаков первые из них

Λ_2=2.1429; Λ_3=2.8088; Λ_4=3.4835;
Λ_5=4.1623; Λ_6=4.8434; Λ_7=5.5261.

Список литературы

1. Стечкин С.Б. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Математические заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 411–422.
2. Стечкин С.Б. О нулях дзета-функции Римана // Математические заметки. 1970. Т. 8. № 4. С. 419–429.
3. Anderson J.M., Barth K.E. and Brannan D.A. Research problems in complex analysis // The Bulletin of the London Mathematical Society. 1977. V. 9. No 26. P. 129–162.
4. Goldstein M. and McDonald J.N. An extremal problem for non-negative trigonometric polynomials //Journal of the London Mathematical Society. 1984. V. 29. No 29. P. 81–88.
5. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2. 431 с.
6. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 510 с.
7. Бернштейн С.Н. Приложение метода Чебышева к классу задач М. Фейера // Изв. АН СССР – ОФМН. 1930. № 5. С. 381–398.
8. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений. Т. 1. Изд-во АН СССР, 1952. 581 с.
9. Лехтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 272 с.

EXTREME POINTS OF A SET OF NONNEGATIVE TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

V.P. Vazhdaev

The best-constant problem for the L_p – norm estimate in the class of nonnegative trigonometric polynomials is considered. The main result is the proof that extreme points of this class are polynomials with all zeros real. An exact order estimate for the best constant has been obtained. In the case p = 2, the explicit function whose extremum gives an exact norm estimate has been derived.

Keywords: non-negative trigonometrical polynomials, extreme points.