М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.9

КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

А.А. Жидков, А.В. Калинин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Artem.Zhidkov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.02.2009

Рассматривается одна из математических моделей для описания квазистационарных электромагнитных полей в атмосфере. Предлагается и обосновывается итерационный метод решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: математическая модель, атмосферное электричество, система уравнений Максвелла, электромагнитные поля, функциональные пространства, корректность, итерационный метод.

Введение

В атмосфере Земли происходят весьма сложные электрофизические процессы, приводящие к появлению электромагнитных полей. Учет электромагнитных полей является важной составляющей при изучении крупномасштабных и мезомасштабных атмосферных явлений. В частности, достаточно сложные конвективные механизмы приводят к инициации грозовых образований, при которых создаются высокие разности потенциалов как внутри грозового облака, так и между грозовым облаком и поверхностью земли. Хорошо известно, что между поверхностью земли и верхними слоями атмосферы поддерживается достаточно устойчивая разность потенциалов (порядка 300 кВ), что осуществляется за счет сбалансированного распределения в атмосфере Земли токов проводимости, заряженных частиц и ряда других явлений. В этом случае говорят о глобальной электрической цепи в атмосфере. Исследованию этих вопросов посвящена достаточно обширная литература [1–3]. Строго говоря, полная система уравнений, описывающая электрофизические процессы, должна включать в себя нелинейную систему уравнений, описывающих перенос заряженных частиц различной природы, и, собственно, систему уравнений Максвелла. Попытки математического и численного моделирования этих процессов отражены в литературе [1, 4–6], но построение полной теории реально протекающих процессов далеко от завершения.

В настоящей работе рассматривается лишь одна часть проблемы, связанная с определением электрических полей, в предположении, что задана так называемая объемная плотность сторонних токов, которая и концентрирует в себе всю информацию о сложных процессах переноса заряженных частиц. Определение электрических полей в этом случае является самостоятельной и важной задачей, и изучение соответствующих математических формулировок задач открывает, в свою очередь, возможность для анализа и нахождения объемной плотности сторонних токов в рамках известных методов решения обратных задач.

Для описания электромагнитных полей используется система уравнений Максвелла, имеющая в гауссовой системе единиц следующий вид:

$$\operatorname{rot}\vec{H}(x,t)=\frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(x,t)}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x,t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\vec{B}(x,t)=0, \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}\vec{D}(x,t)=4\pi\rho(x,t). \qquad (4)$$

Здесь $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega\subset R^3$, Ω – область, диффеоморфная шаровому слою в пространстве R^3 с границей Γ, состоящей из двух компонент связности Γ_1 и Γ_2, диффеоморфных сфере в R^3, где Γ_1 – поверхность земли, Γ_2 – поверхность, ограничивающая верхние слои атмосферы; $t \in (0,T)$ – время ($T > 0$); $c > 0$ – скорость света в вакууме.

Неизвестные функции

$$\vec{H}:\Omega\times(0,T)\to R^3,\ \vec{E}:\Omega\times(0,T)\to R^3,$$

$$\vec{B}:\Omega\times(0,T)\to R^3,\ \vec{D}:\Omega\times(0,T)\to R^3,$$

$$\vec{J}:\Omega\times(0,T)\to R^3,\ \rho:\Omega\times(0,T)\to R^1$$

в линейной теории связаны материальными соотношениями [7, 8]

$$\vec{B}(x,t)=\mu(x)\vec{H}(x,t),\ \vec{D}(x,t)=\varepsilon(x)\vec{E}(x,t), \quad (5)$$

$$\vec{J}(x,t)=\sigma(x,t)\vec{E}(x,t)+\vec{J}^{\text{ñò}}(x,t). \quad (6)$$

При моделировании электромагнитных процессов в атмосфере обычно полагается

$$\varepsilon(x)=\mu(x)=1,\ x\in\Omega; \quad (7)$$

при этом удельная проводимость $\sigma(x,t)$ может существенно зависеть от координат $x\in\Omega$. Помимо экспоненциального возрастания в целом при удалении от поверхности земли, удельная проводимость подвержена локальным изменениям в зависимости от температуры, химического состава и многих других факторов, детализация которых является отдельной задачей физики атмосферных явлений. В настоящей работе полагается, что σ удовлетворяет условиям

$$0<\sigma_*\le\sigma(x,t)\le\sigma^*, \quad x\in\Omega, t\in[0,T].$$

При отсутствии возмущений в атмосфере принято считать [9], что

$$\sigma(x,t)=\sigma_0\cdot\exp\left(\frac{|x|-R_0}{h}\right), \quad (8)$$

где R_0 – радиус Земли, h и σ_0 – некоторые положительные постоянные.

Как отмечалось выше, $\vec{J}^{\text{ñò}}$ – объемная плотность сторонних токов – считается известной функцией.

При моделировании электромагнитных полей в атмосфере во многих случаях используется квазистационарное приближение, в котором предполагается потенциальность электрического поля. Это эквивалентно предположению, что в уравнении (2) пренебрегается изменением во времени вектора магнитной индукции.

С учетом материальных соотношений (5), (6) в квазистационарном электрическом приближении задача для определения электрического поля запишется в виде

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x,t)=0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,t)+4\pi\sigma(x,t)\vec{E}(x,t)+4\pi\vec{J}^{\text{ñò}}(x,t)=$$

$$=c\operatorname{rot}\vec{H}(x,t). \quad (10)$$

Учитывая, что проводимость земли существенно превышает проводимость приземных слоев атмосферы и что проводимость атмосферы возрастает с ростом высоты по экспоненциальному закону (8), будем считать, что границы рассматриваемой области Ω являются идеально проводящей средой, что соответствует заданию на границе Γ следующих условий для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля [7, 8]

$$\vec{E}_\tau(x,t)=0,\ x\in\Gamma \quad (11)$$

(для вектор-функции $\vec{u}$, определенной на $\overline{\Omega}$, приняты обозначения $u_n=(\vec{u}\cdot\vec{n})$, $\vec{u}_n=u_n\cdot\vec{n}$, $\vec{u}_\tau=\vec{u}-\vec{u}_n$, $x\in\Gamma$, где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали).

Предполагается, что функция $\vec{E}(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\vec{E}(x,0)=\vec{E}_0. \quad (12)$$

В работе рассматривается вопрос о корректности задачи об определении напряженности электрического поля $\vec{E}(x,t)$ и вихря магнитного поля $\operatorname{rot}\vec{H}(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям (9), (10), граничным условиям (11) и начальным условиям (12), где, как отмечалось выше, $\vec{J}^{\text{ñò}}(x,t)$ является известной функцией.

Следует отметить, что если $\vec{E}(x,t)$ найдено, то из (4) определяется плотность заряда $\rho(x,t)$, а из обобщенного закона Ома (6) – электрический ток $\vec{J}(x,t)$.

Зная $\operatorname{rot}\vec{H}(x,t)$, с учетом (3) и (5) при соответствующих граничных условиях можно найти и магнитное поле $\vec{H}(x,t)$.

В работе также предлагается и обосновывается один итерационный метод решения рассматриваемой задачи.

1. Основные функциональные пространства и их свойства

Определим функциональные пространства, необходимые для строгой постановки задачи.

Через $L_2(\Omega)$ обозначается гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом в Ω; через $\{L_2(\Omega)\}^3$ обозначается гильбертово пространство вектор-функций $\vec{u}:\Omega\to R^3$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})_{\{L_2(\Omega)\}^3}=\int_\Omega(\vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x))dx.$$

Через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L_2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2(\Omega), i=1, 2, 3\right\},$$

являющееся гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u\cdot v)_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega u(x)v(x)dx+\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

Аналогично, через $\{H^1(\Omega)\}^3$ обозначается пространство Соболева вектор-функций $\vec{u}:\Omega\to R^3$ со скалярным произведением

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)_{\{H^1(\Omega)\}^3}=$$

$$=\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)_{\{L_2(\Omega)\}^3}+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i}\right)_{\{L_2(\Omega)\}^3}.$$

Обозначим через $H(\mathrm{rot};\Omega)$ следующее пространство:

$$H(\mathrm{rot};\Omega)=\left\{\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3:\mathrm{rot}\,\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3\right\}$$

со скалярным произведением

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})_{H(\mathrm{rot};\Omega)}=\int_\Omega(\vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x))dx+$$

$$+\int_\Omega(\mathrm{rot}\,\vec{u}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}(x))dx,$$

где включение $\mathrm{rot}\,\vec{u}\in\{L_2(\Omega)\}^3$ понимается в смысле теории распределений, то есть существует функция $\vec{g}\in\{L_2(\Omega)\}^3$ такая, что для любой пробной функции $\vec{\eta}\in\{D(\Omega)\}^3$ справедливо равенство

$$\int_\Omega(\vec{u}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\eta}(x))dx=\int_\Omega(\vec{g}(x)\cdot\vec{\eta}(x))dx,$$

при этом, по определению, считается, что $\vec{g}=\mathrm{rot}\,\vec{u}$.

Для функций из пространства $H(\mathrm{rot};\Omega)$, в случае когда область $\Omega\subset R^3$ – открытое ограниченное подмножество с границей Γ класса C^2, может быть определено понятие следа тангенциальной составляющей на границе [8, 10]

$$\vec{u}_\tau\in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Через $\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ обозначается замыкание пространства пробных вектор-функций $\{D(\Omega)\}^3$ в $H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Может быть показано, что класс функций $\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega)$ с тангенциальной компонентой, равной нулю на регулярной границе Γ класса C^2, совпадает с $\overset{\circ}{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ [8, 10].

Через $Ker(\mathrm{rot};\Omega)$ будем обозначать ядро операции rot:

$$Ker(\mathrm{rot};\Omega)=\{\vec{u}\in H(\mathrm{rot};\Omega):\mathrm{rot}\,\vec{u}=0\}.$$

$Ker(\mathrm{rot};\Omega)$ – замкнутое подпространство $\{L_2(\Omega)\}^3$, которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением, индуцированным $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Через $\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)$ обозначается класс функций $\vec{u}\in Ker(\mathrm{rot};\Omega)$, для которых тангенциальная компонента на границе равна нулю.

Определим пространства $\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3$:

$$\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)=\{\vec{u}=\mathrm{rot}\,\vec{v}:\vec{v}\in H(\mathrm{rot};\Omega)\},$$

$$\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3=\left\{\vec{u}=\mathrm{rot}\,\vec{v}:\vec{v}\in\{H^1(\Omega)\}^3\right\}$$

со скалярным произведением

$$(\vec{u}\cdot\vec{w})_{\mathrm{rot}}=\int_\Omega(\vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x))dx.$$

В [10] доказана справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3$ – замкнутое подпространство в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Лемма 2. Справедливо следующее разложение пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$:

$$\{L_2(\Omega)\}^3=\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3\oplus\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega),$$

причем пространства $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3$ и $\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)$ ортогональны.

Справедлива

Лемма 3. $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3=\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, $\{H^1(\Omega)\}^3\subset$ $\subset H(\mathrm{rot};\Omega)$, следовательно, $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3\subset$ $\subset\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Покажем справедливость обратного включения $\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3\supset\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$.

Предположим, что существует элемент $\vec{u}\in\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)$ такой, что $\vec{u}\notin\mathrm{rot}\{H^1(\Omega)\}^3$. В этом случае справедливо разложение:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 ,$$

где

$$\vec{u}_1 \in \operatorname{rot}\left\{H^1(\Omega)\right\}^3 ,$$

$$\vec{u}_2 \in \operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega) \cap \overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega) ,\ \vec{u}_2 \neq 0 .$$

Поскольку $\left\{C^1(\overline{\Omega})\right\}^3 \subset \left\{H^1(\Omega)\right\}^3$, то для произвольной функции $\vec{v} \in \left\{C^1(\overline{\Omega})\right\}^3$ выполняется равенство

$$(\vec{u}_2 \cdot \operatorname{rot}\vec{v})_{\{L_2(\Omega)\}^3} = 0 . \qquad (13)$$

Поскольку $\vec{u}_2 \in \operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega)$, вектор-функция $\vec{u}_2$ представима в виде $\vec{u}_2 = \operatorname{rot}\vec{\psi}$ ($\vec{\psi} \in$ $\in H(\operatorname{rot};\Omega)$). Пространство $\left\{C^1(\overline{\Omega})\right\}^3$ всюду плотно в $H(\operatorname{rot};\Omega)$ [8, 10], тогда существует последовательность $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{C^1(\overline{\Omega})\right\}^3$ такая, что $\left\|\vec{v}_k - \vec{\psi}\right\|_{H(\operatorname{rot};\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$, и, следовательно, $\left\|\operatorname{rot}\vec{v}_k - \operatorname{rot}\vec{\psi}\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \to 0$.

Возьмем в (13) $\vec{v} = \vec{v}_k$. Получаем

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{rot}\vec{\psi}(x) \cdot \operatorname{rot}\vec{v}_k(x))dx = 0 ,$$

переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \left|\operatorname{rot}\vec{\psi}(x)\right|^2 dx = 0 ,$$

откуда следует $\vec{u}_2 = \operatorname{rot}\vec{\psi} = 0$, что противоречит сделанному предположению. Утверждение леммы доказано.

Из лемм 2 и 3 следует

Лемма 4. Для пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$ справедливо разложение в прямую сумму ортогональных пространств

$$\{L_2(\Omega)\}^3 = \operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega) \oplus \overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega) .$$

Лемма 5 [10]**.** Справедливо равенство

$$\overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega) = \Big\{ \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \vec{u} = \operatorname{grad} p,$$
$$p \in H^1(\Omega),\ p = const_i \text{ íà êàæäîì } \Gamma_i \Big\}.$$

Для банахова (и гильбертова) пространства функций H определим пространство сильно непрерывных функций $u : [0,T] \to H$, которое обозначается $C([0,T];H)$, и, аналогично, через $C^1([0,T];H)$ обозначается пространство функций $u \in C([0,T];H)$, для которых определена сильная производная $\dfrac{du}{dt} \in C([0,T];H)$.

Для каждой $\sigma \in C([0,T];L_\infty(\Omega))$ и $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ операция умножения $\sigma \cdot \vec{u}$ может рассматриваться как действие линейного ограниченного оператора

$$A_\sigma(t) : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3 ,$$

то есть $\sigma(t) \cdot \vec{u} = A_\sigma(t)[\vec{u}]$.

С учетом введенных функциональных пространств задача (9)–(12) сводится к задаче определения функций

$$\vec{E} \in C^1([0,T];\overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega)) ,$$

$$\vec{F} \in C([0,T];\operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega)) ,$$

удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d}{dt}\vec{E}(t) + 4\pi A_\sigma(t)[\vec{E}(t)] + 4\pi \vec{J}^{\,ñò}(t) = \vec{F}(t) \quad (14)$$

и начальному условию

$$\vec{E}\Big|_{t=0} = \vec{E}_0 \in \overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega) , \qquad (15)$$

где $\vec{J}^{\,ñò} \in C([0,T];\{L_2(\Omega)\}^3)$ – заданная функция.

2. Корректность задачи (14), (15)

В работе доказывается

Теорема 1. Для любой заданной функции $\vec{J}^{\,ñò} \in C([0,T];\{L_2(\Omega)\}^3)$ решение $\left\{\vec{E},\vec{F}\right\}$ задачи (14), (15) существует и единственно.

Доказательство. Введем операторы проектирования на ортогональные пространства $\overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega)$ и $\operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega)$:

$$P : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega) ;$$

$$P^\perp : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega) .$$

Из леммы 4 следует, что для любого вектора $\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ справедливо разложение

$$\vec{u} = P[\vec{u}] + P^\perp[\vec{u}] .$$

Применяя оператор проектирования $P : \{L_2(\Omega)\}^3 \to \overset{\circ}{Ker}(\operatorname{rot};\Omega)$ к уравнению (14) и учитывая, что

$$P\left[\frac{d\vec{E}}{dt}\right] = \frac{d\vec{E}}{dt} ,$$

получаем уравнение для нахождения $\vec{E}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{E}(t) + 4\pi P A_\sigma(t)[\vec{E}(t)] + \\ + 4\pi P[\vec{J}^{\,ñò}(t)] = 0 . \qquad (16)$$

Покажем, что семейство операторов $\{PA_\sigma(t)\}_{t\in[0,T]}$ сильно непрерывно по t, то есть

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\| PA_\sigma(t+\Delta t) - PA_\sigma(t)\right\| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ – операторная норма отображения

$$PA_\sigma(t):\{L_2(\Omega)\}^3 \to \{L_2(\Omega)\}^3 .$$

Пусть $\vec u \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и $\|\vec u\| = 1$, тогда

$$\left\| PA_\sigma(t+\Delta t) - PA_\sigma(t)\right\| =$$
$$= \sup_{\|\vec u\|=1}\left\|(PA_\sigma(t+\Delta t) - PA_\sigma(t))[\vec u]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского следует

$$\left\|\bigl(PA_\sigma(t+\Delta t) - PA_\sigma(t)\bigr)[\vec u]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$
$$\le \left\|\bigl(A_\sigma(t+\Delta t) - A_\sigma(t)\bigr)[\vec u]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$
$$\le \left(\int_\Omega \bigl((\sigma(x,t+\Delta t)-\sigma(x,t))\vec u(x)\bigr)^2 dx\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left\|\sigma(\cdot,t+\Delta t)-\sigma(\cdot,t)\right\|_{L_\infty(\Omega)}\left(\int_\Omega |\vec u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le$$
$$\le \left\|\sigma(\cdot,t+\Delta t)-\sigma(\cdot,t)\right\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Поскольку $\sigma \in C([0,T];L_\infty(\Omega))$, то из полученных оценок следует

$$\left\|PA_\sigma(t+\Delta t) - PA_\sigma(t)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0 .$$

Используя известные результаты о разрешимости линейных операторных уравнений [11], заключаем, что решение $\vec E \in C^1([0,T];\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega))$ уравнения (16) с начальными условиями (15) существует и единственно, и может быть записано формулой

$$\vec E(t) = \exp\left(-4\pi P\int_0^t A_\sigma(\xi)d\xi\right)[\vec E_0] -$$
$$-4\pi\int_0^t \exp\left(4\pi P\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi\right)P[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]d\tau . \tag{17}$$

Здесь $\exp A$ – операторная экспонента, задаваемая формулой

$$\exp A[\cdot] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n[\cdot].$$

При этом вектор-функция $\vec F(t)$ определяется единственным образом по формуле

$$\vec F(t) = 4\pi P^\perp[A_\sigma(t)[\vec E(t)]] + 4\pi P^\perp[\vec J^{\text{ñò}}(t)]. \tag{18}$$

Следует отметить, что теорема 1 может быть доказана для случая нелинейного семейства операторов $A_\sigma(t)$ при дополнительном предположении о липшицевости данного семейства. В этом случае для доказательства могут быть использованы, например, результаты, приведенные в [12].

3. Итерационный метод решения задачи (14), (15)

Для решения задачи (14), (15) может быть использован итерационный метод.

Пусть $\vec E^{(0)} = \vec E_0 \in \overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)$. Определим последовательность $\left\{\vec E^{(j+1)}, \vec F^{(j+1)}\right\}$, $j = 0, 1, \ldots$, с помощью рекуррентных соотношений

$$\frac{d}{dt}\vec E^{(j+1)}(t) + 4\pi A_\sigma(t)[\vec E^{(j+1)}(t)] +$$
$$+4\pi \vec J^{\text{ñò}}(t) = \vec F^{(j+1)}(t), \tag{19}$$
$$\vec E^{(j+1)}(0) = \vec E_0,$$

$$\vec F^{(j+1)}(t) = 4\pi P^\perp[A_\sigma(t)[\vec E^{(j)}(t)]] +$$
$$+4\pi P^\perp[\vec J^{\text{ñò}}(t)]. \tag{20}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. Рекуррентные соотношения (19), (20) однозначно определяют последовательности функций

$$\vec E^{(j+1)} \in C^1([0,T];\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)),$$
$$\vec F^{(j+1)} \in C([0,T];\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega)),$$

при этом $\vec E^{(j+1)} \to \vec E$ в $C^1([0,T];\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega))$, $\vec F^{(j+1)} \to \vec F$ в $C([0,T];\mathrm{rot}\,H(\mathrm{rot};\Omega))$ при $j\to\infty$, где $\vec E$, $\vec F$ – решение исходной задачи (14), (15).

Доказательство. Основываясь на формуле (17), решение уравнения (19) можно записать в следующем виде:

$$\vec E^{(j+1)}(t) = e^{-4\pi\int_0^t A_\sigma(\xi)d\xi}[\vec E_0] +$$
$$+\int_0^t e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi}[\vec F^{(j+1)}(\tau) - 4\pi\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]d\tau .$$

Оценим норму разности функций $\vec E^{(j)}(t)$ на первом и нулевом шагах:

$$\left\|\vec E^{(1)}(t) - \vec E^{(0)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} = \left\| \left(e^{-4\pi\int_0^t A_\sigma(\xi)d\xi} - 1\right)[\vec E_0] + \right.$$
$$\left. + \int_0^t e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi}[\vec F^{(1)}(\tau) - 4\pi\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]d\tau \right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} \le$$

$$\le \left\| \int_0^t e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi} [\vec F^{(1)}(\tau) - 4\pi \vec J^{\text{ñò}}(\tau)]d\tau \right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$

$$\le \int_0^t \left\| e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi}\right\| \cdot \left\|\vec F^{(1)}(\tau)-4\pi\vec J^{\text{ñò}}(\tau)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} d\tau.$$

Исходя из вида оператора $A_\sigma(t)$, можем получить следующую оценку:

$$\left\| e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi}\right\| \le e^{4\pi\sigma^*(\tau-t)} \le e^{4\pi\sigma^* T}.$$

Оценим $\left\|\vec F^{(1)}(\tau)-4\pi\vec J^{\text{ñò}}(\tau)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}$. Исходя из формулы (20)

$$\left\|\vec F^{(1)}(\tau)-4\pi\vec J^{\text{ñò}}(\tau)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} =$$

$$= \Big\| 4\pi P^\perp\left[A_\sigma(\tau)[\vec E^{(0)}]\right] +$$

$$+ 4\pi P^\perp[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)] - 4\pi \vec J^{\text{ñò}}(\tau)\Big\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$

$$\le 4\pi\Bigg(\left\| P^\perp\left[A_\sigma(\tau)[\vec E^{(0)}]\right]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} +$$

$$+ \left\|P[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}\Bigg) \le$$

$$\le 4\pi\left(2\sigma^*\left\|\vec E^{(0)}\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} + \left\|P[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\left\|\vec E^{(1)}(t) - \vec E^{(0)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} \le$$

$$\le 4\pi e^{4\pi\sigma^* T}\int_0^t \Bigg(2\sigma^*\left\|\vec E_0\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} +$$

$$+ \left\|P[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}\Bigg)d\tau \le$$

$$\le 4\pi e^{4\pi\sigma^* T}\Bigg(2\sigma^* T\left\|\vec E_0\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} +$$

$$+ \int_0^T \left\|P[\vec J^{\text{ñò}}(\tau)]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} d\tau\Bigg) = C_0(T).$$

Оценим норму разности $\vec E^{(2)}(t)$ и $\vec E^{(1)}(t)$:

$$\left\|\vec E^{(2)}(t) - \vec E^{(1)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} =$$

$$= \left\| \int_0^t e^{4\pi\int_t^\tau A_\sigma(\xi)d\xi} [\vec F^{(2)}(\tau) - \vec F^{(1)}(\tau)]d\tau \right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$

$$\le e^{4\pi\sigma^* T}\int_0^t \left\|\vec F^{(2)}(\tau) - \vec F^{(1)}(\tau)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} d\tau.$$

Для $\left\|\vec F^{(2)}(\tau) - \vec F^{(1)}(\tau)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3}$ справедливо следующее неравенство

$$\left\|\vec F^{(2)}(t) - \vec F^{(1)}(t)\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} =$$

$$= \left\|4\pi P^\perp[A_\sigma(t)[\vec E^{(1)}(t) - \vec E^{(0)}(t)]]\right\|_{\{L_2(\Omega)\}^3} \le$$

$$\le 4\pi\sigma^*\left\|\vec E^{(1)}(t) - \vec E^{(0)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} \le 4\pi\sigma^* C_0(T).$$

Таким образом, получаем оценку

$$\left\|\vec E^{(2)}(t) - \vec E^{(1)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} \le 4\pi\sigma^* e^{4\pi\sigma^* T} C_0(T)\cdot t.$$

С помощью метода математической индукции может быть показано

$$\left\|\vec E^{(j+1)}(t) - \vec E^{(j)}(t)\right\|_{\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)} \le 4\pi\sigma^* e^{4\pi\sigma^* T} C_0(T)\frac{t^j}{j!}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что последовательность $\left\{\vec E^{(j)}(t)\right\}$ фундаментальна в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)$, то есть она сходится к $\vec E(t) \in \overset{\circ}{Ker}(\mathrm{rot};\Omega)$. Из неравенства (21) также может быть получена равномерная сходимость данной последовательности, откуда следует непрерывность по t функции $\vec E(t)$ [11, 13]. Сходимость $\dfrac{d\vec E(t)}{dt}$ и непрерывность по t получается из равенств (19) и (20).

Равномерная сходимость последовательности $\left\{\vec F^{(j)}(t)\right\}$ очевидным образом следует из сходимости $\left\{\vec E^{(j)}(t)\right\}$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (регистрационный номер 2.1.1/3927).

Список литературы

1. Морозов В.Н. // Прикладная метеорология. Вып. 7 (555). СПб.: Гидрометеоиздат, 2006.

2. Давыденко С.С., Беспалов П.А. // Геомагнетизм и аэрономия. 2000. Т. 40. № 2. С. 71–77.

3. Hays P.B., Roble R.G. // J. Geophys. Res. 1979. Part I. V. 84. № A7. P. 3205–3305.

4. Illingworth A.J. and Latham J. // Journal of the Atmospheric Sciences. 1975. V. 32. P. 2206–2209.

5. Hager W.W., Nisbet J.S., Kasha J.R., Shann W.-C. // Journal of the Atmospheric Sciences. 1989. V. 46. № 23. P. 3542–3558.

6. Browning G.L., Tzur I., Roble R.G. // Journal of the Atmospheric Sciences. 1987. V. 44. № 15. P. 2166–2177.

7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.

8. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

9. Mareev E.A., Anisimov S.V. // Proc. 12th Int. Conf. on Atmospheric Electricity, Versailles, 2003. P. 797–800.

10. Темам Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.

12. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

13. Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972.

CORRECTNESS OF ONE MATHEMATICAL PROBLEM OF ATMOSPHERIC ELECTRICITY

A.A. Zhidkov, A.V. Kalinin

One of mathematical models developed to describe quasi-stationary electromagnetic fields in the atmosphere is considered. An iteration method for the solution of the problem considered is proposed and proved.

Keywords: mathematical model, atmospheric electricity, Maxwell equations, electromagnetic fields, functional spaces, correctness, iteration method.