МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.21

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РЕКУРРЕНТНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ ИТЕРАТИВНО-МАЖОРАНТНЫМ МЕТОДОМ

А.М. Федоткин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

fandr@vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 15.04.2009

Изучаются предельные свойства одномерных распределений конечного семейства управляемых векторных марковских цепей со счётным числом состояний. При этом компоненты марковской цепи определяются некоторым функционально-рекуррентным соотношением. Предлагается эффективный метод определения достаточных условий существования стационарного распределения целого класса управляемых векторных марковских цепей.

Ключевые слова: рекуррентная марковская цепь, одномерное распределение, производящая функция, стационарное распределение, итеративно-мажорантный метод, нелокальное описание потоков событий.

Введение

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ — основное вероятностное пространство, ω — произвольный элемент достоверного события Ω и $\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A, где $A \in \Im$ и $A \subset \Omega$. Эта статья является непосредственным продолжением работы [1]. Поэтому исходным материалом для нас послужат обозначения и результаты из [1]. В работе [1] рассматриваются инвариантные свойства конечного семейства $\{(\Gamma_i(\omega), æ_{j,\,i}(\omega), \xi'_{j,\,i-1}(\omega)); i \geq 0\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, из управляемых векторных марковских цепей с пространством состояний вида $\Gamma \times X \times Y_j$. При этом множество Γ содержит элементы $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$, множество $X = \{0, 1, \ldots\}$ и множество $Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$, где $m \geq 2$, $l_1, l_2, \ldots, l_m$ – заранее заданные натуральные числа. Каждая марковская цепь $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i \geq 0\}$ рассматривается на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ и задаётся рекуррентно-функциональным соотношением

$$(\Gamma_{i+1}, æ_{j,\,i+1}, \xi'_{j,\,i}) = (u(\Gamma_i), \max\{0, æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i} - \xi_{j,\,i}\}, \min\{æ_{j,\,i} + \eta_{j,\,i}, \xi_{j,\,i}\}), \quad (1)$$

циклическим отображением $u(\Gamma^{(s)})\colon \Gamma \to \Gamma$ вида

$$u(\Gamma^{(s)}) = \begin{cases} \Gamma^{(s+1)} \text{ при } s = 1, 2, \ldots, 2m-1; \\ \Gamma^{(1)} \text{ при } s = 2m, \end{cases} \quad (2)$$

и некоторым семейством случайных величин $\eta_{j,\,i}(\omega) \in X$ и $\xi_{j,\,i}(\omega) \in Y_j$. В [1] считается, что при $\Gamma^{(s_k)} \in \Gamma$, $x_k \in X$, $y_k \in Y_j$, $\Gamma^{(s_i)} = \Gamma^{(s)}$, $k = \overline{0,i}$ и $A_{0,\,i} = \{\omega\colon \Gamma_k(\omega) = \Gamma^{(s_k)}, æ_{j,\,k}(\omega) = x_k, \xi'_{j,\,k-1}(\omega) = y_k, k = \overline{0,i}\}$ условные распределения случайных величин $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$ удовлетворяют равенствам:

$$\mathbf{P}(\eta_{j,\,i} = n \mid A_{0,\,i}) = \mathbf{P}(\eta_{j,\,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}) = = \varphi_j(n; T_s) = = e^{-\lambda_j T_s} \sum_{r=0}^{[n/2]} C_{n-r}^{r}\, p_j^{\,n-2r} q_j^{\,r} \frac{(\lambda_j T_s)^{n-r}}{(n-r)!}\,, \quad n \in X, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}(\xi_{j,\,i} = b \mid A_{0,\,i}\, \eta_{j,\,i} = n) = = \mathbf{P}(\xi_{j,\,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(s)}) = \beta_j(b; \Gamma^{(s)}) = = \begin{cases} 1, \text{ если } b = l_j \text{ и } \Gamma^{(s)} = \Gamma^{(2j-1)}; \\ 1, \text{ если } b = 0 \text{ и } \Gamma^{(s)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j-1)}\}; \\ 0 \ \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

В соотношениях (3) и (4) при $j = 1, 2, \ldots, m$ и $s = 1, 2, \ldots, 2m$ числа λ_j, T_s, p_j, $q_j = 1 - p_j$, l_j строго положительные и являются параметрами условных распределений величин $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$, а символ $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$. При этом параметры λ_j и p_j фиксированы, а величины T_1, $T_2, \ldots, T_{2m}$, $l_1, l_2, \ldots, l_m$, можно выбирать. Поэтому при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$ векторная случайная последовательность $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i \geq 0\}$ будет управляемой. В [1] проведена полная классификация по Колмогорову пространства $\Gamma \times X \times Y_j$ состояний такого рода управляемых марковских цепей. В терминах параметров распределений (3) и (4) были определены легко проверяемые необходимые условия существования стационарного распределения семейства $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i \geq 0\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, из управляемых цепей Маркова.

Достаточное условие существования стационарного распределения управляемой цепи Маркова $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i \geq 0\}$

Прежде всего, получим ограничения на параметры условных распределений случайных величин $\eta_{j,\,i}$ и $\xi_{j,\,i}$, при которых каждая управляемая векторная марковская цепь вида $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i \geq 0\}$ имеет единственное стационарное распределение и не происходит неограниченное увеличение при $i \to \infty$ математического ожидания $Mæ_{j,\,i}$ случайной величины $æ_{j,\,i}$ при любом $j = 1, 2, \ldots, m$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для существования единственного стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,\,i}, \xi'_{j,\,i-1}); i = 0, 1, \ldots\}$ при $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_{2m}$ достаточно выполнения неравенства $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится итеративно-мажорантным методом [2–4], который основан на анализе рекуррентных соотношений (16)–(18) из [1] для производящих функций $\Phi_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $\Phi_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$, $\Phi_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0)$, где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j) = = \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}, \Gamma^{(2j+1)}\}$. Подробно рассмотрим рассуждения на примере соотношения (16) из [1]

$$\Phi_{j,\,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) =$$

$$= r_j(z)\,\Phi_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + A_{j,\,2mi}(z), \qquad (5)$$

где

$$r_j(z) = z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\},$$

$$A_{j,\,2mi}(z) = z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - z^{-l_j}\times$$

$$\times \sum_{v=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_{j,\,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{l_j - v - 1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1}).$$

Для остальных последовательностей из производящих функций рассуждения аналогичные. Далее, построим доказательство от противного и в два этапа.

а) Итак, имеем $\lambda_j T(1 + q_j) - l_j < 0$. Пусть не существует стационарного режима работы системы. В этом случае [5, с. 549 – 550] имеем $\lim\limits_{i\to+\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(s)}, x, y) = 0$ при любых допустимых s, x, y. Оценим математическое ожидание $Mæ_{j,\,2mi}$ случайной величины $æ_{j,\,2mi}$ при $i \to \infty$. Для этого представим математическое ожидание $Mæ_{j,\,2mi}$ в следующем виде:

$$Mæ_{j,\,2mi} = \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{r=1}^{2m} \sum_{y=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, y) =$$

$$= \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \sum_{x=0}^{\infty} x\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) +$$

$$+ \sum_{x=0}^{\infty} x\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j - 1} 0 \times$$

$$\times \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) =$$

$$= \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \sum_{x=0}^{N} x\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) +$$

$$+ \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \sum_{x=N+1}^{\infty} x\,\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) +$$

$$+ \sum_{x=0}^{N} x\,\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) +$$

$$+ \sum_{x=N+1}^{\infty} x\,\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) \geq$$

$$\geq \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \sum_{x=N+1}^{\infty} x\,\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) +$$

$$+ \sum_{x=N+1}^{\infty} x\,\boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) \geq$$

$$\geq N\Bigl(\sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \sum_{x=N+1}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) +$$

$$+ \sum_{x=N+1}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j)\Bigr) =$$

$$= N\Big(1 - \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}}\sum_{x=0}^{N} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) - \sum_{x=0}^{N} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) - \sum_{y=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\Big).$$

Так как $\lim_{i\to+\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,2mi}(\Gamma^{(s)}, x, y) = 0$ при $s = 1, 2, \ldots, 2m$, $x \in X$ и $y \in Y_j$, то для любого натурального N и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $I(N, \varepsilon)$, что при всех $i > I(N, \varepsilon)$ будет выполнено:

$$\sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}}\sum_{x=0}^{N} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, x, 0) + \sum_{x=0}^{N} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) < \varepsilon \text{ и } \mathrm{M}æ_{j,2mi} \ge N(1-\varepsilon).$$

Другими словами, математическое ожидание длины очереди $\mathrm{M}æ_{j,2mi}$ по потоку Π_j стремится к бесконечности при $i \to \infty$.

b) Рассмотрим соотношение (5) и функцию $r_j(z)$. Так как $r_j(1) = 1$ и $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} r_j(z)|_{z=1} = -l_j + \lambda_j T(1 + q_j) < 0$, то существует такое число $z^* > 1$, что в области $D = \{z\colon 1 < z \le z^*\}$ верно неравенство $r_j(z) < 1$. Используя формулу для $A_{j,2mi}(z)$, оценим значение $A_{j,2mi}(z)$ в области D:

$$|A_{j,2mi}(z)| \le |z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}\sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)| + |z^{-l_j}\sum_{v=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)z^v \times \sum_{k=0}^{l_j-v-1} z^k \varphi_j(k; T_{2j-1})| \le$$

$$\le |z^{-l_j}\exp\{\lambda_j T(p_j z + q_j z^2 - 1)\}| + |z^{-l_j}\sum_{w=0}^{l_j-1}\sum_{v=0}^{w} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \times \varphi_j(w-v; T_{2j-1})\, z^w| \le$$

$$\le r_j(z) + z^{-l_j}\sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) z^w = r_j(z) + \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) z^{w-l_j} < K_{2j} < 2,$$

где K_{2j} – некоторая константа. Выберем для цепи Маркова $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i \ge 0\}$ начальное распределение $\{\boldsymbol{Q}_{j,0}(\Gamma^{(s)}, x, y)\colon (\Gamma^{(s)}, x, y) \in \Gamma \times X \times Y_j\}$ такое, что $\Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z^*, l_j) < \infty$. Это всегда можно сделать, если в качестве начального распределения выбрать вырожденное распределение $Q_{j,0}(\Gamma^{(2j)}; 0; l_j) = 1$ и $\boldsymbol{Q}_{j,0}(\Gamma^{(s)}, x, y) = 0$ для всех $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in \Gamma \times X \times Y_j \setminus \{(\Gamma^{(2j)}; 0; l_j)\}$. Напомним, что при наличии единственного неразложимого класса существенных состояний поведение марковской цепи со счетным числом состояний не зависит от начального распределения. Построим новую последовательность функций $\{\widetilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j);\ i = 0, 1, \ldots\}$, которая определяется равенством $\widetilde{\Phi}_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z^*, l_j) = \Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z^*, l_j)$ и рекуррентным соотношением

$$\widetilde{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = r_j(z)\widetilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + K_{2j}. \tag{6}$$

Очевидно, что $|\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)| \le |\widetilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)|$ при всех $i = 0, 1, \ldots$ Так как в области D выполняется неравенство $r_j(z) < 1$, то известно [6, с. 605–606], что отображение (6) будет сжимающим. Поэтому последовательность $\{\widetilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j);\ i = 0, 1, \ldots\}$ сходится и ограничена, т. е. $|\widetilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)| \le C_{2j}$ и $|\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)| \le C_{2j}$ для всех $i = 0, 1, \ldots$ и $z \in D$. Так как функции $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $i = 0, 1, \ldots$, являются аналитическими в области $G = \{z\colon |z| \le z^*\}$, то они имеют ограниченные производные в этой области [7, с. 80–86], и, значит,

$$\left|\frac{d}{dz}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\right| \le L_{2j}. \tag{7}$$

Как уже отмечалось ранее, для остальных рекуррентных соотношений (17) и (18) из [1], которые определяют последовательности из производящих функций $\Phi_{j,\,2mi}(\Gamma^{(s)}, z, 0)$, $i \ge 0$, $s \in \{1, 2, \ldots, 2m\} \setminus \{2j\}$, рассуждения аналогичны. Поэтому приведем для них следующий конечный результат:

$$\left|\frac{d}{dz}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(s)}, z, 0)\right| \le L_s,\quad s \in \{1, 2, \ldots, 2m\} \setminus \{2j\}. \tag{8}$$

Теперь оценим математическое ожидание $\mathrm{M}æ_{j,\,2mi}$ случайной величины $æ_{j,2mi}$, используя свойства (7) и (8) производящих функций:

$$\mathrm{M}æ_{j,2mi} = \sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}} \frac{d}{dz}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(r)}, z, 0)\Big|_{z=1} + \frac{d}{dz}\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)\Big|_{z=1} \le \sum_{r=1}^{2m} L_r.$$

Значит, величина $Mæ_{j,2mi}$ ограничена при любом $i = 0, 1, \ldots$ Отсюда получили противоречие. Итак, при $\lambda_j T\,(1+q_j)-l_j<0$ стационарное распределение существует. Теорема 1 установлена.

Пусть $\boldsymbol{æ}_i = (æ_{1,i}, æ_{2,i}, \ldots, æ_{m,i})$ и $\xi'_{i-1} = (\xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}, \ldots, \xi'_{m,i-1})$. Тогда, применяя методику работы [1] и этого раздела для последовательности $\{(\Gamma_i, \boldsymbol{æ}_i, \xi'_{i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$, легко показать следующее утверждение.

Теорема 3. Для существования стационарного распределения управляемой марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \boldsymbol{æ}_i, \xi'_{i-1});\ i = 0, 1, \ldots\}$ необходимо и достаточно выполнения неравенств $\lambda_j T(1+q_j)-l_j<0, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Из этих теорем следует, что для семейства $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i \ge 0\}$, $j \in \overline{1,m}$, из управляемых векторных марковских цепей возможно существование стационарного распределения как для отдельной управляемой векторной марковской цепи, так и для всего указанного семейства в зависимости от выполнения соответственно неравенства $\lambda_j T\,(1 + q_j) - l_j < 0$ только лишь при каком-либо j или же m неравенств $\lambda_j T\,(1 + q_j) - l_j < 0,\ j \in \overline{1,m}$.

Вычисление стационарных вероятностей

Запишем выражения (9)–(12) из [1] для стационарного распределения:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(x+l_j-v;\, T_{2j-1}),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) = \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\varphi_j(x;\, T_{2j}) + \sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, v, l_j)\varphi_j(x-v;\, T_{2j}),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r)}, x, 0) = \sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r-1)}, v, 0)\times \times\varphi_j(x-v;\, T_{r-1}), \qquad (9)$$

где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j - 1\}$. Последовательно вычислим вероятность $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j)})$, предворительно полагаем, что начальное распределение является стационарным:

$$\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j)}) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x+l_j} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\times \varphi_j(x+l_j-v;\, T_{2j-1}) + \sum_{y=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= \sum_{y=l_j}^{\infty} \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\times \varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}) + \sum_{y=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{y} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0)\varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \sum_{y=v}^{\infty} \varphi_j(y-v;\, T_{2j-1}) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j-1)}).$$

Аналогично для $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j+1)})$ получаем:

$$\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j+1)}) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\varphi_j(x;\, T_{2j}) + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j)\,\varphi_j(x-v;\, T_{2j}) =$$

$$= \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) + \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i-1}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) =$$

$$= \sum_{w=0}^{l_j-1} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) + \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2j)}).$$

Наконец, рассуждая подобным способом для $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)})$, где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$, имеем:

$$\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = \sum_{x=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(r)}, x, 0) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{x} \boldsymbol{Q}_{j,\,i-1}(\Gamma^{(r-1)}, v, 0)\varphi_j(x-v; T_{r-1}) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,i-1}(\Gamma^{(r-1)}, v, 0)\sum_{x=v}^{\infty} \varphi_j(x-v; T_{r-1}) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,i-1}(\Gamma^{(r-1)}, v, 0) = \sum_{v=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}_{j,\,i}(\Gamma^{(r-1)}, v, 0) =$$

$$= \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r-1)}).$$

Учитывая всё это и $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(1)}) + \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2)}) + \ldots + \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2m-1)}) + \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(2m)}) = 1$, найдем, что $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = 1/2m$ для всех $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, если начальное и стационарное распределения совпадают. Заметим, что в силу соотношения (1) вероятность $\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)} \mid \Gamma_k = \Gamma^{(sk)},\ k = \overline{0,i}) = \mathbf{P}(u(\Gamma_i) = \Gamma^{(r)} \mid \Gamma_k = \Gamma^{(sk)},\ k = \overline{0,i}) = \mathbf{P}(u(\Gamma^{(si)}) = \Gamma^{(r)} \mid \Gamma_k = \Gamma^{(sk)},\ k = \overline{0,i}) = \mathbf{P}(u(\Gamma^{(si)}) = \Gamma^{(r)})$ и вероятность $\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r)} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(si)}) = \mathbf{P}(u(\Gamma_i) = \Gamma^{(r)} \mid \Gamma_i = \Gamma^{(sk)}) = \mathbf{P}(u(\Gamma^{(si)}) = \Gamma^{(r)})$. Отсюда с учётом равенства (2) вытекает, что случайная последовательность $\{\Gamma_i;\ i = 0, 1, \ldots\}$ является марковской с периодом $2m$. Поэтому результат $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = 1/2m$ является вполне ожидаемым.

Перейдём теперь к получению соотношений между стационарными вероятностями $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r)}, 0, 0)$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$ *и* $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$, $y \in \{1, 2, \ldots, l_j\}$. Из соотношения (9) имеем:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(1)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_{2m})\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m)}, 0, 0),\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_1)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(1)}, 0, 0),\ \ldots,\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_{2j-2}) \times \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-2)}, 0, 0),\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_{2j-1})\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0),\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_{2j})\sum_{y=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+2)}, 0, 0) =$$

$$= \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0)\varphi_j(0; T_{2j+1}),\ \ldots,\ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m)}, 0, 0) =$$

$$= \varphi_j(0; T_{2m-1})\,\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m-1)}, 0, 0).$$

Преобразуем одно из этих равенств, а именно $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \varphi_j(0; T_{2j-1})\,\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$, используя оставшиеся. Тогда получим, что

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) =$$

$$= \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)\,\varphi_j(0; T_{2j-1}) = \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-2)}, 0, 0) \times$$

$$\times\, \varphi_j(0; T_{2j-2})\varphi_j(0; T_{2j-1}) = \ldots = \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(1)}, 0, 0) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_1)\,\varphi_j(0; T_2) \times \ldots \times \varphi_j(0; T_{2j-2})\,\varphi_j(0; T_{2j-1}) =$$

$$= \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m)}, 0, 0)\varphi_j(0; T_{2m})\varphi_j(0; T_1)\times\ldots\times \varphi_j(0; T_{2j-2}) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_{2j-1}) = \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m-1)}, 0, 0)\varphi_j(0; T_{2m-1}) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_{2m})\varphi_j(0; T_1) \times\ldots\times \varphi_j(0; T_{2j-2})\varphi_j(0; T_{2j-1}) =$$

$$= \ldots = \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0)\varphi_j(0; T_{2j+1}) \times \ldots \times$$

$$\times\, \varphi_j(0; T_{2m})\varphi_j(0; T_1) \times\ldots\times \varphi_j(0; T_{2j-2})\varphi_j(0; T_{2j-1}) =$$

$$= \sum_{y=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) \ldots \times \varphi_j(0; T_{2m}) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_1) \times\ldots \times \varphi_j(0; T_{2j-2})\varphi_j(0; T_{2j-1}) = e^{-\lambda_j T} \times$$

$$\times \sum_{y=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y).$$

Значит,

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) =$$

$$= e^{-\lambda_j T}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) + e^{-\lambda_j T}\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

или

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) =$$

$$= e^{-\lambda_j T}\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)/(1 - e^{-\lambda_j T}). \qquad (10)$$

Используя соотношение (10), найдём выражение для $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0)$:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) =$$

$$= \sum_{y=0}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) = \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_{2j}) + \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} \times e^{-\lambda_j T}\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) \times$$

$$\times \varphi_j(0; T_{2j}) + \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) =$$

$$= [e^{-\lambda_j T}(1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} + 1]\varphi_j(0; T_{2j})\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1}\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)\varphi_j(0; T_{2j}) =$$

$$= e^{-\lambda_j T_{2j}}(1 - e^{-\lambda_j T})^{-1}\sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y).$$

Аналогичным способом получим формулы для вероятностей $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r)}, 0, 0)$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$. Запишем теперь окончательные равенства для вероятностей $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r)}, 0, 0)$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T_{2j}} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+2)}, 0, 0) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T_{2j}} e^{-\lambda_j T_{2j+1}} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+3)}, 0, 0) = (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T_{2j}} \times$$

$$\times e^{-\lambda_j T_{2j+1}} e^{-\lambda_j T_{2j+2}} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2m)}, 0, 0) = (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T_{2j}} \times$$

$$\times \ldots \times e^{-\lambda_j T_{2m-1}} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y),$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0) = (1 - e^{-\lambda_j T})^{-1} e^{-\lambda_j T_{2j}} \times$$

$$\times \ldots \times e^{-\lambda_j T_{2j-2}} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y). \qquad (11)$$

Нетрудно видеть, что всего в левых частях равенств (11) присутствуют $2m$ неизвестных, а в правых частях — l_j. Тогда для решения системы нам понадобится ещё l_j уравнений. Получим их из следующих соображений. Рассмотрим формулы (16) — (18) из работы [1] в случае стационарного распределения для марковской цепи $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i-1});\ i \geq 0\}$:

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) +$$

$$+ z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j - 1} (\exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\} - z^w) \times$$

$$\times \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w),$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) +$$

$$+ \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \Psi_j(T_{2j}, z)(z^{l_j} - z^w),$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, 0) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\} \times$$

$$\times \Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, 0) + z^{-l_j} \Psi_j(T_{r-1}, z) \times$$

$$\times \ldots \times \Psi_j(T_{2j}, z) \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)(z^{l_j} - z^w),$$

где $\Gamma^{(r)} \in \Gamma(j)$. Эти соотношения можно представить в следующем виде:

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = (z^{l_j} - \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} (\exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\} - z^w) \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w),$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = (z^{l_j} - \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\})^{-1} \times$$

$$\times \exp\{\lambda_j T_{2j}(p_j z + q_j z^2 - 1)\} \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)(z^{l_j} - z^w),$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, 0) = (z^{l_j} - \exp\{\lambda_j T (p_j z + q_j z^2 - 1)\})^{-1} \times$$

$$\times \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j+1}, z) \Psi_j(T_{2j}, z) \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)(z^{l_j} - z^w).$$

Представим выражения для

$$\sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w),\ \Phi_j(\Gamma^{(s)}, z, 0),\ \Gamma^{(s)} \in \Gamma$$

в следующем виде:

$$\sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \times$$

$$\times (z^{l_j} - \Psi_j(T, z) \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w), \qquad (12)$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} (\Psi_j(T, z) - z^w) \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w), \qquad (13)$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) =$$

$$= (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \Psi_j(T_{2j}, z) \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} (z^{l_j} - z^w) \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w), \qquad (14)$$

$$\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, 0) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times$$

$$\times \Psi_j(T_{2j}, z) \sum_{w=0}^{l_j - 1} (z^{l_j} - z^w) \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w). \qquad (15)$$

Рассмотрим, например, выражение для функции $\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$. Так как $\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$ является степенной функцией по z и $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, x, 0) \in (0, 1)$, $x \in X$, то $\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$ является функцией, ограниченной на единичном круге $|z| \leq 1$. Таким образом, внутри единичного круга и на его границе числитель имеет нули, которые совпадают со всеми нулями знаменателя внутри единичного круга и на его границе. Покажем, что знаменатель $(z^{l_j} - \Psi_j(T, z))$ имеет ровно l_j нулей внутри единичного круга $|z| \leq 1$ и на его границе $|z| = 1$. Используем теорему Руше: если две функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в замкнутой области, ограниченные контуром C и удовлетворяют на этом контуре условию $|g(z)| < |f(z)|$, то внутри контура C функции $f(z)$

и $f(z)+g(z)$ имеют одинаковое число нулей. Рассмотрим круг $\{z: |z| \le 1+\delta\}$, где δ – достаточно малое положительное число. Пусть $f(z)=z^{l_j}$, $g(z)=-\Psi_j(T,z)=-\exp\{\lambda_j T(p_j z+q_j z^2-1)\}$. Функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в круге $\{z: |z| \le 1+\delta\}$. Сравним теперь функции $f(z)$ и $g(z)$ на контуре $C=\{z: |z|=1+\delta\}$. При $z=(1+\delta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ проверим выполнение неравенства $|g(z)|<|f(z)|$:

$$|\exp\{\lambda_j T((1+\delta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)p_j+ +q_j(1+\delta)^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)-1)\}|< <|(1+\delta)^{l_j}(\cos(l_j\varphi)+i\sin(l_j\varphi))|. \qquad (16)$$

Оценим левую часть неравенства (16):

$$|\exp\{\lambda_j T((1+\delta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)p_j+ +(1+\delta)^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)q_j-1)\}|=$$
$$=\exp\{\lambda_j T((1+\delta)p_j\cos\varphi+(1+\delta)^2 q_j\cos 2\varphi-1)\}<$$
$$<\exp\{\lambda_j T((1+\delta)p_j+(1+\delta)^2 q_j-1)\}=$$
$$=\exp\{\lambda_j T((p_j+\delta p_j+q_j+2\delta q_j+\delta^2 q_j-1)\}=$$
$$=\exp\{\lambda_j T((p_j+\delta-\delta q_j+q_j+2\delta q_j+\delta^2 q_j-1)\}=$$
$$=\exp\{\lambda_j T(\delta+\delta q_j+\delta^2 q_j)\}=$$
$$=1+\lambda_j T\,\delta(1+q_j)+O(\delta^2).$$

Для правой части неравенства имеем:

$$|(1+\delta)^{l_j}(\cos l_j\varphi+i\sin l_j\varphi)|=$$
$$=(1+\delta)^{l_j}=1+l_j\delta+O(\delta^2).$$

Таким образом, неравенство (16) сводится к неравенству $\lambda_j T(1+q_j)<l_j+O(\delta)$. Поскольку для стационарного потока выпоняется условие (8), то существует такое достаточно малое $\delta>0$, что справедливо и неравенство $\lambda_j T(1+q_j)<l_j+O(\delta)$, а значит и неравенство (16). Условия теоремы Руше выполнены. Поскольку $f(z)=z^{l_j}$ имеет l_j нулей в круге $\{z: |z| \le 1+\delta\}$, то сумма функций $f(z)+g(z)=z^{l_j}-\Psi_j(T,z)$, также имеет l_j нулей.

Оказывается также, что все корни уравнения

$$z^{l_j}-\Psi_j(T,z)=0 \qquad (17)$$

различны. Действительно, если был хотя бы один кратный корень z_k, то первая производная от $(z^{l_j}-\Psi_j(T,z))$ также бы обращалась в ноль при подстановке $z=z_k$. Тогда $z_k^{l_j}-\Psi_j(T,z_k)=0$, и $l_j z_k^{l_j-1}-\lambda_j T(p_j+2q_j z_k)\Psi_j(T,z_k)=0$ или $z_k^{l_j}==\Psi_j(T,z_k)$, $l_j z_k^{l_j-1}-\lambda_j T(p_j+2q_j z_k)z_k^{l_j}=0$. Отсюда $\lambda_j T(p_j+2q_j z_k)z_k=l_j$. С учётом условия $\lambda_j T(1+q_j)-l_j<0$ последовательно имеем: $\lambda_j T(1+q_j)<\lambda_j T(p_j+2q_j z_k)z_k$, $2q_j z_k^2+(1-q_j)z_k-(1+q_j)>0$, $(z_k+1+p_j/2q_j)(z_k-1)>0$, $z_k<1-p_j/2q_j$, $z_k>1$. Но все найденные корни должны лежать внутри круга $|z|\le 1+\delta$. Получили противоречие, которое показывает, что кратных корней уравнение (17) не имеет. Итак, существует l_j различных корней $z_0, z_1, \dots z_{l_j-1}$ уравнения (17).

Рассмотрим соотношение (14). В числителе этого соотношения величина $\Psi_j(T_{2j},z)\ne 0$ при любых z. Поэтому корни уравнения (17) должны совпадать с корнями полинома

$$\sum_{w=0}^{l_j-1}(z^{l_j}-z^w)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)=0. \qquad (18)$$

Очевидно, что $z_0=1$ есть один из корней знаменателя и числителя. Существует методика нахождения корней уравнения (17). Эта методика подробно описана (Downton F. On Limiting Distributions Arising in Bulk Service Queues // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1956. Vol. 18. P. 265–274). Подставляя корни $z_1, \dots z_{l_j-1}$ в (18), получим ещё l_j-1 дополнительное уравнение к системе (11):

$$\sum_{w=0}^{l_j-1}(z_k^{l_j}-z_k^w)\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)= =0,\ k\in\{1,2,\dots,l_j-1\}. \qquad (19)$$

Наконец, найдём последнее уравнение, добавление которого к системам (11) и (19) приведёт к их однозначной разрешимости относительно неизвестных вероятностей. Для этого сложим выражения (12)–(15) и составим сумму $\Phi_j(z)$:

$$\Phi_j(z)=\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)+\Phi_j(\Gamma^{(2j)},z,l_j)+ +\sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}}\Phi_j(\Gamma^{(r)},z,0)=$$
$$=(z^{l_j}-\Psi_j(T,z))^{-1}[\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)\times$$
$$\times(z^{l_j}-\Psi_j(T,z))+\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(\Psi_j(T,z)-z^w)+$$
$$+\sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}}\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(z^{l_j}-z^w)\times$$
$$\times\Psi_j(T_{r-1},z)\times\dots\times\Psi_j(T_{2j},z)]=$$
$$=(z^{l_j}-\Psi_j(T,z))^{-1}[\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(z^{l_j}-z^w)+$$
$$+\sum_{\Gamma^{(r)}\in\Gamma\setminus\{\Gamma^{(2j)}\}}\sum_{w=0}^{l_j-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)},0,w)(z^{l_j}-z^w)\times$$

$$\times\Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j}, z)] =$$

$$= (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(z^{l_j} - z^w) \times$$

$$\times (1 + \sum_{\Gamma^{(r)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(2j)}\}} \Psi_j(T_{r-1}, z) \times \ldots \times \Psi_j(T_{2j}, z)) =$$

$$= (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1}(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) +$$

$$+ \ldots + \Psi_j(T - T_{2j-1}, z)) \times$$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(z^{l_j} - z^w).$$

Итак, для производящей функции $\Phi_j(z)$ получили следующее равенство:

$$\Phi_j(z) = (z^{l_j} - \Psi_j(T, z))^{-1} \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(z^{l_j} - z^w) \times$$

$$\times (1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) +$$

$$+ \ldots + \Psi_j(T - T_{2j-1}, z)). \qquad (20)$$

При $z \to 1 - 0$ имеем $\Phi_j(z) \to 1$, а применение к правой части (20) правила Лопиталя при $z \to 1 - 0$ даёт $2m(l_j - \lambda_j T(1 + q_j))^{-1} \times$

$$\times \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(l_j - w).$$

Таким образом, получаем

$$2m(l_j - \lambda_j T(1 + q_j))^{-1} \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(l_j - w) = 1,$$

$$2m \sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(l_j - w) =$$

$$= l_j - \lambda_j T(1 + q_j). \qquad (21)$$

Объединим уравнения (10), (21), (19) в систему:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) - e^{-\lambda_j T} \sum_{y=1}^{l_j} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)/(1 - e^{-\lambda_j T}) = 0,$$

$$\sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(l_j - w)\, 2m = l_j - \lambda_j T(1 + q_j),$$

$$\sum_{w=0}^{l_j - 1} \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w)\,(z_k^{\,l_j} - z_k^{\,w}) =$$

$$= 0,\ k \in \{1, 2, \ldots, l_j - 1\}.$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы равен

$$\begin{vmatrix} -1 & \dfrac{e^{-\lambda_j T}}{1 - e^{-\lambda_j T}} & \cdots & \dfrac{e^{-\lambda_j T}}{1 - e^{-\lambda_j T}} & \dfrac{e^{-\lambda_j T}}{1 - e^{-\lambda_j T}} \\ l_j & l_j - 1 & \cdots & 1 & 0 \\ z_1^{l_j} - 1 & z_1^{l_j} - z_1 & \cdots & z_1^{l_j} - z_1^{l_j - 1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{l_j-1}^{l_j} - 1 & z_{l_j-1}^{l_j} - z_{l_j-1} & \cdots & z_{l_j-1}^{l_j} - z_{l_j-1}^{l_j-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{l_j + 2} \frac{e^{-\lambda_j T}}{1 - e^{-\lambda_j T}} \begin{vmatrix} l_j & l_j - 1 & \cdots & 1 \\ z_1^{l_j} - 1 & z_1^{l_j} - z_1 & \cdots & z_1^{l_j} - z_1^{l_j - 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{l_j-1}^{l_j} - 1 & z_{l_j-1}^{l_j} - z_{l_j-1} & \cdots & z_{l_j-1}^{l_j} - z_{l_j-1}^{l_j-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{l_j + 2} \frac{e^{-\lambda_j T}}{1 - e^{-\lambda_j T}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{l_j - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{l_j-1} & \cdots & z_{l_j-1}^{l_j-1} \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{l_j - 1} (z_i - 1)$$

и отличен от нуля, так как последний определитель является определителем Вандермонда и все величины 1, z_1, … z_{l_j-1} различны. Поэтому вероятности $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j\}$ находятся однозначно. А поскольку вид функций $\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, y)$ также станет известным, то для рассматриваемого случайного процесса $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \xi'_{j,i} - 1);\ i = 0, 1, \ldots\}$ будут найдены и все оставшиеся стационарные вероятности.

Проделаем вышеуказанные вычисления для случая $l_j = 1$. Система уравнений (11), (19), (21) принемает вид

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) - e^{-\lambda_j T}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 1)/(1 - e^{-\lambda_j T}) = 0,$$

$$2m\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = 1 - \lambda_j T(1 + q_j).$$

Решение системы выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 1) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1-e^{-\lambda_j T}}{e^{-\lambda_j T}}.$$

Остальные вероятности вида $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(r)}, 0, 0)$ вычисляются так:

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+2)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j (T_{2j}+T_{2j+1})},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j (T_{2j}+T_{2j+1}+\ldots+T_{2j-2})},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\times \frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j (T_{2j}+T_{2j+1}+\ldots+T_{2j-2}+T_{2j-1})} = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T} = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}.$$

Другие вероятности находятся исходя из вида формул $\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, 0)$. Рассмотрим, например, выражение для производящей функции $\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$:

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\times (z-1)\,\Psi_j(T_{2j}, z)/(z - \Psi_j(T, z)).$$

Отсюда находим

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 0, 0) = \Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)\,|_{z=0} = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}},$$

$$\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j+1)}, 1, 0) = \frac{d}{dz}\Phi_j(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)\,|_{z=0} = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,[\Psi_j(T_{2j}, z)/(z - \Psi_j(T, z)) + (z-1)\lambda_j T_{2j}(p_j + 2q_j z - 1)\times \Psi_j(T_{2j}, z)/(z-\Psi_j(T, z)) - (z-1)\,\Psi_j(T_{2j}, z)\times (1 - \lambda_j T(p_j + 2q_j z - 1)\times \Psi_j(T, z))/(z-\Psi_j(T, z))^2]\,|_{z=0} =$$

$$= \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,[-\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}} + \lambda_j T_{2j}(q_j+1)\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}} + (e^{\lambda_j T} - \lambda_j T(q_j+1))\,\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}}] =$$

$$= \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}(-1 + \lambda_j T_{2j}(q_j+1) + e^{\lambda_j T} - \lambda_j T(q_j+1))\frac{1}{e^{-\lambda_j T}}e^{-\lambda_j T_{2j}}$$

и так далее.

Вычислим теперь стационарные вероятности вида $\mathbf{P}(æ_j = x)$, $x \in X$. Воспользуемся выражением (20) для $\Phi_j(z)$. Так как $\Phi_j(z)$ получается сложением функций $\Phi_j(\Gamma^{(r)}, z, y)$, $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $y \in \{0, 1, \ldots, l_j\}$, то $\Phi_j(z)$ представляет собой производящую функцию для последовательности случайных величин $\{æ_{j,i};\ i = 0, 1, \ldots\}$, отражающих сосотояние очереди требований, ожидающей обслуживания. Вероятности $\mathbf{P}(æ_j = x)$, $x \in X$, являются коэффициентами при соответствующих степенях z в разложении функции $\Phi_j(z)$ в ряд Маклорена и вычисляются следующим образом: $\mathbf{P}(æ_j = x) = \frac{1}{x!}\frac{d^x}{dz^x}\Phi_j(z)\,|_{z=0}$. Для случая $l_j = 1$ функция $\Phi_j(z)$ запишется в виде $\Phi_j(z) = (z-1)(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) + \ldots + \Psi_j(T - T_{2j-1}, z))(z - \Psi_j(T, z))^{-1} \times \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)$. Для некоторых конкретных вероятностей вида $\mathbf{P}(æ_j = x)$ получим, что

$$\mathbf{P}(æ_j = 0) = \Phi_j(z)\,|_{\,z=0} =$$
$$= (0 - e^{-\lambda_j T})^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(0-1) \times$$
$$\times\,(1 + e^{-\lambda_j T_{2j}} + e^{-\lambda_j(T_{2j}+T_{2j+1})} + \ldots + e^{-\lambda_j(T - T_{2j-1})}) =$$
$$= \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} +$$
$$+ e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}) =$$
$$= \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} +$$
$$+ e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}),$$

$$\mathbf{P}(æ_j = 1) = \frac{d}{dz}\,\Phi_j(z)\,|_{\,z=0} = [\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(z-1)\times$$
$$\times\,(1 - \lambda_j T\,(p_j + 2q_j\,z - 1)\Psi_j(T, z)) \times$$
$$\times\,(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) + \ldots +$$
$$+ \Psi_j(T - T_{2j-1}, z))\,/\,(z - \Psi_j(T, z))^2 +$$
$$+ (z - \Psi_j(T, z))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\times$$
$$\times\,(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) + \ldots +$$
$$+ \Psi_j(T - T_{2j-1}, z)) +$$
$$+ (z - \Psi_j(T, z))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(z-1) \times$$
$$\times\,(\lambda_j T_{2j}\,(p_j + 2q_j\,z - 1)\Psi_j(T_{2j}, z) + \ldots +$$
$$+ \lambda_j(T - T_{2j-1})\,(p_j + 2q_j\,z - 1)\Psi_j(T - T_{2j-1}, z))]\,|_{\,z=0} =$$
$$= -\,\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(e^{\lambda_j T} - \lambda_j T\,(q_j + 1)) \times$$
$$\times(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} + e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}) +$$
$$+ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} +$$
$$+ e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}) +$$
$$+ \boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,(q_j + 1)\,(\lambda_j T_{2j}\,e^{\lambda_j(T - T_{2j})} + \ldots +$$
$$+ \lambda_j(T - T_{2j-1})\,e^{\lambda_j T_{2j-1}}) =$$
$$= -\,\frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,(e^{\lambda_j T} - \lambda_j T\,(q_j + 1)) \times$$
$$\times\,(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} + e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}) +$$
$$+ \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,(e^{\lambda_j T} + e^{\lambda_j(T - T_{2j})} +$$
$$+ e^{\lambda_j(T - T_{2j} - T_{2j+1})} + \ldots + e^{\lambda_j T_{2j-1}}) +$$
$$+ \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,(q_j + 1)\,(\lambda_j T_{2j}\,e^{\lambda_j(T - T_{2j})} + \ldots +$$
$$+ \lambda_j(T - T_{2j-1})\,e^{\lambda_j T_{2j-1}})$$

и так далее.

Получим теперь формулу для математического ожидания $Mæ_j$ величины очереди, если система функционирует в стационарном режиме. Так как $Mæ_j = \frac{d}{dz}\,\Phi_j(z)\,|_{z=1}$, то последовательно имеем:

$$\frac{d}{dz}\,\Phi_j(z)\,|_{z=1} = [-(z - \Psi_j(T, z))^{-2}\times$$
$$\times(1 - \lambda_j T\,(p_j + 2q_j z)\Psi_j(T, z))\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)(z-1) \times$$
$$\times\,(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) + \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) + \ldots +$$
$$+ \Psi_j(T - T_{2j-1}, z)) +$$
$$+ (z - \Psi_j(T, z))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\times(1 + \Psi_j(T_{2j}, z) +$$
$$+ \Psi_j(T_{2j} + T_{2j+1}, z) + \ldots + \Psi_j(T - T_{2j-1}, z)) +$$
$$+ (z - \Psi_j(T, z))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)(z-1) \times$$
$$\times\,(\lambda_j T_{2j}\,(p_j + 2q_j\,z)\Psi_j(T_{2j}, z) + \ldots + \lambda_j(T - T_{2j-1})\times$$
$$\times\,(p_j + 2q_j\,z)\Psi_j(T - T_{2j-1}, z))]|_{z=1} =$$
$$= 2m\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)[-(z - \Psi_j(T, z))^{-2}\times$$
$$\times\,(1 - \lambda_j T\,(1 + q_j))(z-1) + (z - \Psi_j(T, z))^{-1}]|_{z=1} +$$
$$+ (1 - \lambda_j T\,(1 + q_j))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\lambda_j(1 + q_j) \times$$
$$\times\,((2m-1)T_{2j} + (2m-2)T_{2j+1} + \ldots + T_{2j-2}).$$

Применяя теперь при $z \to 1 - 0$ правило Лопиталя к первому слагаемому дважды и ко второму слагаемому один раз, окончательно для среднего значения $Mæ_j$ размера очереди при $\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0) = \frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}$ получим:

$$Mæ_j = 2m\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\,[-(z - \Psi_j(T, z))^{-2}\times$$
$$\times\,(1 - \lambda_j T\,(1 + q_j)) + (z - \Psi_j(T, z))^{-1}]|_{z=1} +$$
$$+ (1 - \lambda_j T\,(1 + q_j))^{-1}\boldsymbol{Q}_j(\Gamma^{(2j)}, 0, 0)\lambda_j(1 + q_j) \times$$
$$\times\,((2m-1)T_{2j} + (2m-2)T_{2j+1} + \ldots + T_{2j-2}) =$$
$$= 2m\,\frac{1-\lambda_j T(1+q_j)}{2m}\,2^{-1}(1 - \lambda_j T\,(1 + q_j))^{-2}\times$$
$$\times\,((\lambda_j T)^2\,(1 + q_j)^2 + 2\lambda_j T q_j) +$$
$$+ (2m)^{-1}\,\lambda_j(1 + q_j)((2m-1)T_{2j} + (2m-2) \times$$
$$\times T_{2j+1} + \ldots + T_{2j-2}) =$$
$$= 2^{-1}(1 - \lambda_j T\,(1 + q_j))^{-1}(2\,\lambda_j T q_j + (\lambda_j T)^2(1 + q_j)^2) +$$
$$+ (2m)^{-1}\,\lambda_j(1 + q_j)((2m-1)T_{2j} +$$
$$+ (2m-2)T_{2j+1} + \ldots + T_{2j-2}).$$

Список литературы

1. Федоткин А.М. Свойства управляемой векторной марковской цепи со счетным числом состояний, удовлетворяющей рекуррентным соотношени-

ям // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 152–161.

2. Федоткин М.А. О существовании эргодического распределения в системе с переменной структурой обслуживания конфликтных потоков // Теория вероятностей и её применения. 1976. Т. XXI. № 4. С. 792–801.

3. Федоткин М.А. Строение пространства состояний случайного процесса, описывающее динамическое поведение систем с переменной структурой обслуживания при управлении конфликтными потоками в классе нелинейных однородных алгоритмов. II // Литовский математический сборник. 1977. Т. XVII. № 2. С. 203–217.

4. Федоткин М.А. О предельных свойствах распределений для состояния систем с переменной структурой обслуживания заявок при управлении конфликтными потоками в классе нелинейных однородных алгоритмов. III // Литовский математический сборник. 1977. Т. XVII. № 3. С. 73–85.

5. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

7. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

DEFINITION OF THE STATIONARY MODE OF RECURRENT MARKOV CHAINS BY THE ITERATIVE-MAJORANT METHOD

A.M. Fedotkin

Limiting properties are studied of one-dimensional distributions of controlled vector Markov chain finite family with a countable number of states. Markov chain components are defined by some function-recurrent relation. An effective method is proposed to define sufficient conditions of existence of a stationary distribution of the whole class of controlled vector Markov chains.

Keywords: recurrent Markov chain, one-dimensional distribution, generating function, stationary distribution, iterative-majorant method, nonlocal description of event flows.