УДК-504.14:681.511.4

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ НА ДИНАМИКУ АСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

pmk@unn.ac.ru

Поступила в редакцию 15.04.2009

Решается задача анализа влияния диссипации энергии на динамику синтезатора частоты с неидеальной записью и хранением информации об управляющем сигнале.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика систем, точечное отображение, устойчивость, функция Ляпунова.

Введение

Известно, что в технике связи и управления, в радиоавтоматике, в радиоизмерительных комплексах и других системах авторегулирования все шире применяются системы автоподстройки частоты с элементами дискретизации [1]. В связи с постоянным ужесточением требований, предъявляемых к системам синхронизации, и вынужденным переходом в уже существующих системах на новую элементную базу постоянно появляются многочисленные технические решения, основанные на интуитивных соображениях, направленные на повышение эффективности их работы за счет усложнения структуры и применения более совершенных алгоритмов управления [2]. Однако доказательство преимуществ предполагаемых технических решений невозможно без всестороннего численно-аналитического, а по возможности, и качественного исследования динамики соответствующих им математических моделей (ММ).

Типичными представителями систем фазовой синхронизации с элементами дискретизации являются синтезаторы частоты (СЧ) [3]. В контуре автоподстройки таких систем осуществляется широтно-импульсная модуляция управляющего сигнала, причем момент срабатывания импульсного элемента определяется интегральными свойствами функции сравнения, определенной на произвольной траектории системы. В силу этого СЧ являются принципиально нелинейными динамическими системами [4], допускающими даже в простейшем случае движения хаотического типа [5]. Использование в СЧ фазовых детекторов, выполненных на основе Д-триггеров с запоминанием информации на астатизирующей емкости [3], обусловливает тот факт, что ММ таких систем являются частным случаем систем с переменной структурой (СПС). А это делает целесообразным сведение исследования динамики таких систем к изучению свойств точечных отображений, соответствующих различным переходам фазовых траекторий из подпространства в подпространство, каждое из которых отвечает постоянству выходного сигнала фазового детектора (ФД).

Одним из необходимых требований адекватности реального процесса и его ММ является требование ограниченности движений. Однако, если ограниченность движений в непрерывных и дискретных системах синхронизации с ограниченной характеристикой ФД при наличии в контуре регулирования диссипативных потерь, возрастающих линейно с ростом величины фазовых координат, почти очевидна [1, 2], то в случае формирования выходного сигнала ФД с использованием генераторов тока на основе логического анализа относительного расположения импульсов сигнала эталонного генератора (ЭГ) и выходных импульсов счетчика механизм ограниченности движений становится неочевидным и требует дополнительного рассмотрения.

Реализация принципа исследования «от простого к сложному» показала, что использование в ММ СЧ идеального запоминающего устройства приводит к необходимости анализа склеенных неподвижных точек точечного отображения, в окрестности которых в линейном приближении реализуются движения центрального типа. И поэтому, несмотря на то, что после учета нелинейных свойств точечных отображений во втором приближении удалось по методу функций Ляпунова показать, что основной режим может быть устойчивым, в технических приложениях такие ММ являются структурно слабо устойчивыми с неудовлетворительным качеством переходных процессов [6].

В настоящей работе решается задача анализа влияния диссипации энергии на динамику СЧ с неидеальной записью и хранением информации об управляющем сигнале и, в том числе, задача анализа влияния параметра потерь μ на характер поведения фазовых траекторий ММ СЧ в каждом из подпространств, соответствующих интервалам постоянства во времени сигнала управления, на условия перехода фазовых траекторий из одного подпространства в другое и, как следствие, на методику и результаты построения функций последования соответствующих точечных отображений, обеспечивающих новые возможности для построения условно-экстремальных функций Ляпунова [7] и изучения условий устойчивости процесса управления и качества переходных процессов.

Математическая модель системы

При учете неидеальности записи и хранения информации в интервалах постоянства выходного сигнала ФД напряжение (V) на выходе фильтра определяется уравнением [3]

$$C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R}=i_\partial(t), \qquad (1)$$

в котором R – включенное параллельно запоминающей емкости C эквивалентное сопротивление диссипативных потерь, $i_\partial(t)$ – выходной ток импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД), выполненного с использованием двух триггеров и схемы И–ИЛИ, принимающий в зависимости от динамики процесса одно из трех постоянных значений $+I_\partial$, 0, $-I_\partial$. При использовании уравнения для набега фазы ϕ перестраиваемого генератора (ПГ) в общепринятой форме [9]

$$\frac{d\phi}{dt}=2\pi f_0 g(V), \qquad (2)$$

где f_0 – частота управляемого генератора, $g(V)$ – нормированная на единицу монотонно возрастающая характеристика ПГ, и при использовании в качестве фазовой координаты тракта ПГ–ДПКД степени заполненности счетчика θ от (2) переходим к уравнению

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{f_0}{N}g(V)\ (0\le\theta\le 1), \qquad (3)$$

в котором N – показатель делителя с перестраиваемым коэффициентом деления (ДПКД).

Уравнения (1), (3) являются уравнениями ММ СЧ. С целью минимизации количества параметров в ММ СЧ перейдем в (1), (3) к безразмерному времени $\tau = t/T_0$, где T_0 – период сигнала эталонного генератора (ЭГ), показателю счетчика $\alpha = N/f_0T_0$, безразмерным: напряжению $x = V/V_н$, где нормирующее напряжение $V_н = T_0I_\partial/C$, параметру диссипации $\mu = T_0/RC$ и управлению $u = i_\partial(t)/I_\partial$.

Тогда безразмерные уравнения ММ СЧ в произвольном периоде ЭГ принимают вид

$$\begin{aligned}&\dot{x}+\mu x = u(\tau),\\ &\alpha\dot{\theta}=g(x(\tau)),\end{aligned}\quad (0\le\theta\le 1,\, 0\le\tau\le 1), \qquad (4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по τ.

Как и в случае идеального хранения информации (при μ = 0) [8], за счет кусочно-постоянного характера изменения во времени управления $u(\tau)$ исследование динамики ММ СЧ можно проводить с привлечением трех подпространств Π_1, Π_2 и Π_3, характеризующихся тем, что в каждом из них $u(\tau)$ принимает соответственно значение +1, 0, –1. Тогда полное представление о динамических свойствах ММ СЧ получается при изучении поведения изображающих точек в каждом из подпространств и характера перехода траекторий из одного подпространства в другое.

В случае линейной характеристики

$$g(x)=1+Sx\ \ (x>-(1/S)) \qquad (5)$$

и использования для реализуемых фазовыми траекториями переходов между различными сечениями подпространств Π_1, Π_2 и Π_3 задача исследования динамики СЧ сводится к необходимости изучения свойств последовательностей соответствующих точечных отображений. Для определенности примем для сечений C_{ij} подпространств Π_i точечных отображений $T_{ijk,ln}$ и областей G_{ijk} их определения следующие значения индексов: i – номер отображаемого подпространства; j = 1 соответствует отображению сечения θ = 0, j = 2 – отображению сечения τ = 0; k = 1 и 2 характеризуют разделение отображаемого сечения на части; l – номер подпространства, в которое попадает отображаемая точка; n = 1 соответствует сечению θ = = 0. Тогда анализ поведения фазовых траекторий ММ СЧ в каждом из подпространств показывает, что точки сечения $\tau = 0$ (C_{12}) подпространства Π_1, являющиеся начальными при изучении регулярных движений, либо остаются в Π_1 и их поведение описывается отображением

$$T_{121,12}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu} + (1-e^{-\mu})\mu^{-1}, \\ (\theta_0 < \theta_0(\Gamma_1(\mu)) \in G_{121};\ \bar{x}, \bar{\theta} \in C_{12}), \\ \bar{\theta} = \theta_0 + \alpha^{-1}[1 + S(1-e^{-\mu})\mu^{-1}x_0 + \\ + S\mu^{-1}(1-(1-e^{-\mu})\mu^{-1})], \end{array} \quad (6)$$

либо уходят в подпространство Π_2 и их поведение определяется отображением

$$T_{121,12}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu\bar{\tau}} + (1-e^{-\mu\bar{\tau}})\mu^{-1}, \\ (\theta_0 > \theta_0(\Gamma_1(\mu)) \in G_{122};\ \bar{x}, \bar{\tau} \in C_{21}), \\ \bar{\tau} + S(1-e^{-\mu\bar{\tau}})\mu^{-1}x_0 + \\ + S\mu^{-1}(\bar{\tau} - (1-e^{-\mu\bar{\tau}})\mu^{-1}) = \alpha(1-\theta_0). \end{array} \quad (7)$$

В (6), (7) используется обозначение границы $\Gamma_1(\mu)$ вида

$$\Gamma_1(\mu):\ \theta_0 = \theta_0(\Gamma_1) = \\ = 1 - \alpha^{-1}[1 + S(1-e^{-\mu})\mu^{-1}x_0 + \\ + S\mu^{-1}(1-(1-e^{-\mu})\mu^{-1})]. \quad (8)$$

Остальные случаи преобразования сечений подпространств определяются точечными отображениями: сечения C_{21} –

$$T_{211,12}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu(1-\tau_0)}, \\ (x_0 < x_0(\Gamma_2(\mu)) \in G_{211};\ \bar{x}, \bar{\theta} \in C_{12}), \\ \bar{\theta} = \alpha^{-1}[1 - \tau_0 + S(1-e^{-\mu(1-\tau_0)})\mu^{-1}x_0], \end{array} \quad (9)$$

$$T_{212,31}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)}, \\ (x_0 > x_0(\Gamma_2(\mu)) \in G_{212};\ \bar{x}, \bar{\tau} \in C_{31}), \\ \bar{\tau} - \tau_0 + S(1-e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)})\mu^{-1}x_0 = \alpha, \end{array} \quad (10)$$

где граница

$$\Gamma_2(\mu):\ x_0 = x_0(\Gamma_2(\mu)) = \\ = \mu S^{-1}(\alpha - 1 + \tau_0)(1-e^{-\mu(1-\tau_0)})^{-1} \quad (11) \\ (x_0, \tau_0 \in C_{21});$$

сечения C_{22} –

$$T_{222,31}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu\bar{\tau}}, \\ (x_0 > x_0(\Gamma_4(\mu)) \in G_{222};\ \bar{x}, \bar{\tau} \in C_{31}), \\ \bar{\tau} + S(1-e^{-\mu\bar{\tau}})\mu^{-1}x_0 = (1-\theta_0)\alpha, \end{array} \quad (12)$$

$$T_{221,12}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu}, \\ (x_0 < x_0(\Gamma_1(\mu)) \in G_{221};\ \bar{x}, \bar{\theta} \in C_{12}), \\ \bar{\theta} = \theta_0 + \alpha^{-1}[1 + S(1-e^{-\mu})\mu^{-1}x_0], \end{array} \quad (13)$$

где граница

$$\Gamma_4(\mu): \theta_0 = \theta_0(\Gamma_4(\mu)) = \\ = 1 - \alpha^{-1}[1 + S(1-e^{-\mu})\mu^{-1}x_0]; \quad (14)$$

сечения C_{31} –

$$T_{311,22}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu(1-\tau_0)} + (1-e^{-\mu(1-\tau_0)})\mu^{-1}, \\ (x_0 < x_0(\Gamma_3(\mu)) \in G_{311};\ \bar{x}, \bar{\theta} \in C_{22}), \\ \bar{\theta} = \alpha^{-1}[1 - \tau_0 + S(1-e^{-\mu(1-\tau_0)})\mu^{-1}x_0 + \\ + S\mu^{-1}(1 - \tau_0 - (1-e^{-\mu(1-\tau_0)})\mu^{-1})], \end{array} \quad (15)$$

$$T_{312,31}(\mu): \begin{array}{l} \bar{x} = x_0 e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)} + (1-e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)})\mu^{-1}, \\ (x_0 > x_0(\Gamma_3(\mu)) \in G_{312};\ \bar{x}, \bar{\theta} \in C_{31}), \\ \bar{\tau} - \tau_0 + S(1-e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)})\mu^{-1}x_0 + \\ + S\mu^{-1}(\bar{\tau} - \tau_0 - (1-e^{-\mu(\bar{\tau}-\tau_0)})\mu^{-1}) = \alpha, \end{array} \quad (16)$$

где граница

$$\Gamma_3(\mu):\ x_0 = x_0(\Gamma_2(\mu)) = \mu S^{-1}(\alpha - 1 + \tau_0) \times \\ \times (1-e^{-\mu(1-\tau_0)})^{-1} + (1-e^{-\mu(1-\tau_0)})^{-1} \times \\ \times (1 - \tau_0 - (1-e^{-\mu(1-\tau_0)})\mu^{-1}). \quad (17)$$

Исследование динамики системы

Анализ приведенных точечных отображений показал, что в зависимости от величины синтезируемой частоты, т. е. от величины параметра α, и значений остальных параметров устанавливаются различные последовательности точечных отображений. Так при

$$1 \le \alpha \le 1 + S\mu^{-1} \quad (18)$$

основной синхронный режим соответствует произведению точечных отображений $T_{221,12}$ и $T_{122,21}$ и внутри области G_{211} имеет неподвижную точку (x^*, τ^*) с координатами

$$x^* = (1-e^{-\mu\tau^*})(\mu(1-e^{-\mu}))^{-1}, \\ \tau^* = \mu(\alpha-1)S^{-1}. \quad (19)$$

Неподвижная точка (x^*, τ^*) устойчива в линейном приближении в области своего существования (18) на плоскости параметров α, S при значениях S, лежащих под границей N_- устойчивости [10]

$$N_-:\ \alpha=\alpha(N_-)=$$
$$=1-S\mu^{-2}\ln[\mu(1-e^{-\mu})S^{-1}+g(\mu)]$$
$$(\alpha>1), \qquad (20)$$

где

$$g(\mu)=(1+4e^{-\mu}-e^{-2\mu})(2(1+e^{-\mu}))^{-1}. \qquad (21)$$

При

$$1-S\mu^{-1}\le\alpha\le 1 \qquad (22)$$

основной синхронный режим соответствует произведению точечных отображений $T_{222,31}$ и $T_{311,12}$ и внутри области G_{222} имеет неподвижную точку (x^*,θ^*) с координатами

$$x^*=-(1-e^{-\mu(1-\bar\tau^*)})(\mu(1-e^{-\mu}))^{-1},$$
$$\theta^*=1-\alpha^{-1}(\bar\tau^*-S(1-e^{-\mu(1-\bar\tau^*)})\times \qquad (23)$$
$$\times(1-e^{-\mu\bar\tau^*}))(\mu^2(1-e^{-\mu}))^{-1},$$

где

$$\bar\tau^*=1+\mu(\alpha-1)S^{-1}. \qquad (24)$$

Неподвижная точка (x^*,θ^*) устойчива в линейном приближении в области своего существования, определяемой неравенством (22) при значениях S, лежащих под границей N_- устойчивости, где

$$N_-:\ \alpha=\alpha(N_-)=$$
$$=1-S\mu^{-2}\ln[\mu(e^{\mu}-1)S^{-1}+ \qquad (25)$$
$$+(4+e^{-\mu}-e^{\mu})(2(1+e^{-\mu}))^{-1}].$$

При α = 1 граница устойчивости (20) непрерывно переходит в границу (24), претерпевая положительный скачок наклона в сторону увеличения α.

Учет механизма диссипации (μ > 0) приводит к тому, что при малых переключениях по диапазону переходные процессы являются апериодическими: при $\alpha<$ 1 только при циклическом включении $u(\tau)$ = –1, а при α > 1 – только при включении $u(\tau)$=+1. При значительных, определяемых величиной параметра μ, переключениях α по диапазону в пределах области устойчивости переходные процессы являются на первых этапах колебательными, а окончание процесса по-прежнему является апериодическим.

Необходимо отметить, что поскольку при α >(<)1 свободный член характеристического уравнения, определяющего устойчивость неподвижных точек (19), (22), равен exp(-μ) и при $\mu=+0$ обращается в единицу, система по линейному приближению приходит в пространстве параметров на границу устойчивости N_ϕ [10], так что ее устойчивость обеспечивается только нелинейными свойствами второго приближения [8]. Но это, в свою очередь, означает, что при использовании в модели СЧ астатизирующей емкости использование идеальных моделей генераторов тока приводит к вырождению соответствующей ММ СЧ.

Качественная сторона методики анализа динамики ММ связана в первую очередь с анализом условий выхода фазовых траекторий движения на сечения C_{ij} (i – номер подпространства, j – номер сечения), соответствующих выполнению условий $\theta(\bar\tau\le 1)$=1 или $\theta(\tau=\bar\tau_0)\le 1$, $\bar\tau_0$=1. В зависимости от C_{ij} фазовая траектория либо остается в i-м подпространстве, либо переходит в другое подпространство. При изучении регулярных движений, связанных с переходом от одного стационарного движения на другое за счет скачкообразного изменения параметра α со значения $\alpha=\alpha_0$ (начальное) на значение $\alpha=\alpha_н$ (новое), определяются преимущественно начальные сечения C^0_{ij}. Последнее обстоятельство позволяет свести исследование динамики ММ к изучению свойств произведения точечных отображений плоскости в плоскость со степенями отображений, определяемых, в конечном счете, параметрами α и μ. При μ = = 0 (идеальное хранение информации) точечные отображения T_{ijk} k-х частей i-х подпространств определяются точными аналитическими формулами, при 0< μ <<1 – приближенными для функции $g(x)$ общего вида и аналитическими для $g(x)=1+Sx$ $(x>-(1/S))$.

Сведение исследования динамики ММ с уравнениями (4) к изучению точечных отображений позволило сформулировать условия существования и устойчивости в «малом» основного режима управления в параметрическом виде, представив соответствующие границы на плоскости основных параметров и связав их с условиями ограниченности и управляемости системы в «большом». Показано, что при $\mu\to 0$ режим управления соответствует склеенной неподвижной точке, расположенной на стыке сечений C_{21} и C_{22}, при этом в линейном приближении существует центральное движения, соответствующее определенным сечениям квадратичной функции Ляпунова. При $\mu\ne 0$ для исследования устойчивости в «большом» возможно использование процедуры условно-экстремальной функции Ляпунова [7]. В силу существенной нелинейности функций последования отображения T_{ijk} целесообразно перенесение из [8] процедуры их исследования с представлением результатов либо в виде построения таблиц на плоскости $(\alpha_0, \alpha_н)$, либо в виде соответствующих поверхностей. Последнее позволяет связать вопросы устойчивости в «большом» с проблемами оптимизации быстродействия системы управления.

Заключение

Исследование показало, что границы, разделяющие фазовые траектории с различным качественным поведением в каждом из подпространств ММ СЧ, непрерывно зависят от параметра μ, обеспечивая тем самым преемственность свойств функций последования точечных отображений. Однако при этом, при увеличении μ от нуля и при значении величины параметра управления $\alpha >(<)\ 1$ неподвижные точки циклов соответствующих произведений точечных отображений сходят с границ областей своего определения. В зависимости от величины параметра управления уход неподвижных точек возможен в различные сечения подпространств ММ. При значении параметра $\alpha = 1$ неподвижные точки циклов отображений, как и в случае $\mu = 0$, лежат на линии склейки различных сечений подпространств состояний. Показано, что при $\mu > 0$ неподвижные точки становятся устойчивыми в линейном приближении. Несмотря на то, что удалось получить аналитические уравнения границ существования и устойчивости [11], фактическое исследование взаимодействия линейных (при $\mu \to +0$, $\alpha \to 1$) и нелинейных механизмов устойчивости и качества переходных процессов удалось провести с помощью построения условно-экстремальных функций Ляпунова [7], сечения которых касаются различных границ областей определения точечных отображений, в том числе и при $\mu \to +0$.

Следует отметить, что не только результаты фактического исследования динамики СЧ, но и предложенные и апробированные в настоящей работе методики обладают определенной новизной не только с точки зрения приложения методики построения условно-экстремальных функций Ляпунова, но и с точки зрения развития фактических возможностей получения достоверной информации о взаимодействии линейных и нелинейных механизмов устойчивости в системах управления с широтно-импульсной модуляцией и запоминанием сигнала.

Список литературы

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А., Карякин В.Л. и др. Системы фазовой синхронизации с элементами дискретизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1989. 320 с.
2. Шахгильдян В.В., Пестряков А.В. // Электросвязь. 1993. № 11. С. 38–42.
3. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989. 232 с.
4. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
5. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Материалы VII Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 1–6 октября 2004 г. С. 56–57.
6. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. № 6. С. 135–140.
7. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Труды VIII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». Москва, 26–30 января 2009 г. С. 968–975.
8. Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Палочкин Ю.П. // Труды 61-й научной сессии, посвященная Дню радио. Москва, 16–17 мая 2006 г. С. 260–262.
9. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Фазовая автоподстройка частоты. М.: Связь, 1966. 334 с.
10. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
11. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Лобашов Н.И. // В сб.: Динамика систем: Управление и оптимизация. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 59–72.

ON ENERGY DISSIPATION INFLUENCE ON DYNAMICS OF AN ASTATIC SYSTEM WITH A PULSE WIDTH MODULATED CONTROL SIGNAL

O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov

An analysis is given of the energy dissipation influence on dynamics of a frequency synthesizer with nonideal record and storage of control signal data.

Keywords: mathematical modeling, system dynamics, point mapping, stability, Lyapunov function.