Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2009, № 4, с. 146–148

УДК 519.17

КОРОТКИЕ ЦИКЛЫ В ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЧЕТЫРЕ

Е.В. Бурков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

evgeny.burkov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.04.2009

Рассматривается задача нахождения циклов, которые гарантированно присутствуют в обыкновенных планарных графах со степенями вершин не менее четырех.

Ключевые слова: граф, планарный граф, цикл, степень вершины.

Введение

Рассматриваются обыкновенные планарные графы со степенями вершин не менее четырех. Работа примыкает к серии публикаций, посвященных оптимальному синтезу графов [1–3].

Известное следствие [4] из формулы Эйлера гласит, что для числа вершин *n* и числа ребер *m* произвольного обыкновенного планарного графа, не содержащего цикла C_3, выполняется неравенство $m \le 2n-4$. Отсюда следует, что любой обыкновенный планарный граф со степенями вершин не менее четырех содержит C_3.

Аналогичное утверждение для цикла C_4 неверно. Примером обыкновенного планарного графа со степенями вершин не менее четырех, свободного от C_4, является икосододекаэдр.

О существовании циклов длины четыре и пять

Назовем *графом-бабочкой* граф из двух треугольников, пересекающихся по одной вершине. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. В каждом обыкновенном планарном графе со степенями вершин не менее четырех найдется цикл C_4 или подграф-бабочка, центральная вершина которого смежна только с вершинами этого подграфа.

Доказательство. Рассматриваем произвольную плоскую укладку обыкновенного планарного графа G со степенями вершин не менее четырех и предполагаем, что он является контрпримером к утверждению теоремы. Введем обозначения:

n_4 – число вершин степени 4;

r_3 – число граней ранга 3;

V – множество вершин;

V_4 – множество вершин степени 4;

V_x – множество вершин степени 5 и более;

$tr(v)$ – число треугольников, содержащих вершину v.

Рассмотрим вспомогательный двудольный граф G^R, вершины первой доли которого соответствуют ребрам графа G, вершины второй доли – граням графа G, а ребро (v_1^R, v_2^R) принадлежит G^R тогда и только тогда, когда ребро графа G, соответствующее v_1^R, входит в грань графа G, соответствующую v_2^R.

Степень каждой вершины первой доли графа G^R равна 2, поэтому число ребер графа G^R равно удвоенному числу ребер графа G. Степени вершин второй доли графа G^R равны рангам соответствующих граней графа G, поэтому, с другой стороны, число ребер графа G^R равно сумме по всем граням графа G рангов этих граней. Учитывая отсутствие в графе G граней ранга четыре, можно записать:

$$2m \ge 3r_3 + 5(r - r_3).$$

Отсюда, заменяя r по формуле Эйлера, элементарными преобразованиями получаем оценку для числа ребер:

$$m < \frac{5}{3}n + \frac{2}{3}r_3 . \qquad (1)$$

Далее, так как граф G не содержит C_4, то каждое ребро входит не более чем в один треугольник. Следовательно, если вершина входит в треугольник, то два инцидентных ей ребра принадлежат этому и только этому треугольнику. Поэтому каждая вершина v графа G входит не более чем в $\frac{deg(v)}{2}$ треугольников, то есть

$$tr(v) \le \frac{deg(v)}{2}. \quad (2)$$

Из отсутствия в графе G подграфа-бабочки, центральная вершина которого смежна только с вершинами этого подграфа, вытекает, что каждая вершина графа G степени 4 входит не более чем в один треугольник, то есть

$$deg(v) = 4 \Rightarrow tr(v) \le 1. \quad (3)$$

Рассмотрим вспомогательный двудольный граф G^T, вершины первой доли которого соответствуют вершинам графа G, вершины второй доли – треугольникам графа G, а ребро (v_1^T, v_2^T) принадлежит G^T тогда и только тогда, когда вершина графа G, соответствующая v_1^T, входит в треугольник графа G, соответствующий v_2^T.

Степень каждой вершины второй доли графа G^T равна 3, поэтому число ребер графа G^T равно утроенному числу треугольников графа G, что не меньше, чем утроенное число треугольных граней в плоской укладке графа G. С другой стороны, число ребер графа G^T равно сумме степеней вершин первой доли, то есть сумме по всем вершинам v графа G $tr(v)$, поэтому можно записать:

$$3r_3 \le \sum_{v \in V} tr(v) = \sum_{v \in V_4} tr(v) + \sum_{v \in V_x} tr(v).$$

Отсюда с учетом (2) и (3) можно записать:

$$r_3 \le \frac{1}{3}(n_4 + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)}{2}) =$$

$$= \frac{1}{3}(n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)-2}{2}) \le \frac{1}{3}n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)-4}{2}.$$

Совмещая эту оценку с (1), получаем:

$$m < \frac{17}{9}n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)-4}{3}.$$

Вычисляя число ребер как полусумму степеней вершин, получаем:

$$m \ge 2n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)-4}{2}.$$

Противоречие между последними двумя неравенствами доказывает теорему.

Теорема 2. В каждом обыкновенном планарном графе со степенями вершин не менее четырех найдется цикл C_5.

Доказательство. Рассматриваем произвольную плоскую укладку обыкновенного планарного графа G со степенями вершин не менее четырех и предполагаем, что он свободен от C_5. Ниже будут использоваться следующие дополнительные обозначения:

r_4 – число граней ранга 4;

r_x – число граней ранга 5 или более;

m_{33} – число ребер, находящихся на пересечении двух граней ранга 3;

m_{44} – число ребер, находящихся на пересечении двух граней ранга 4;

m_{3x} – число ребер, находящихся на пересечении грани ранга 3 и грани ранга не менее 6;

m_{4x} – число ребер, находящихся на пересечении грани ранга 4 и грани ранга не менее 6;

m_{xx} – число ребер, находящихся на пересечении двух граней ранга не менее 6.

Рассмотрим вспомогательный двудольный граф G^R, вершины первой доли которого соответствуют ребрам графа G, вершины второй доли – граням графа G, а ребро (v_1^R, v_2^R) принадлежит G^R тогда и только тогда, когда ребро графа G, соответствующее v_1^R, входит в грань графа G, соответствующую v_2^R.

Степень каждой вершины первой доли графа G^R равна 2, поэтому число ребер графа G^R равно удвоенному числу ребер графа G. Степени вершин второй доли графа G^R равны рангам соответствующих граней графа G, поэтому, с другой стороны, число ребер графа G^R равно сумме по всем граням графа G рангов этих граней. Учитывая отсутствие в графе G граней ранга пять, можно записать:

$$2m \ge 3r_3 + 4r_4 + 6(r - r_3 - r_4).$$

Отсюда, заменяя r по формуле Эйлера, элементарными преобразованиями получаем оценку для числа ребер:

$$m < \frac{3}{2}n + \frac{3r_3 + 2r_4}{4}. \quad (4)$$

При помощи аналогичного вспомогательного двудольного графа подсчитаем число пар «3-грань – ребро», в которых ребро входит в грань ранга 3, двумя способами:

$$3r_3 = 2m_{33} + m_{3x}.$$

Теперь подсчитаем число пар «4-грань – ребро», в которых ребро входит в грань ранга 4, двумя способами:

$$4r_4 = 2m_{44} + m_{4x}.$$

Так как в графе G нет C_5, в нем нет и ребер, находящихся на пересечении грани ранга 3 и грани ранга 4. Отсюда и из двух предыдущих равенств следует:

$$3r_3 + 2r_4 = 2m_{33} + m_{3x} + \\ + \frac{2m_{44} + m_{4x}}{2} \le m + m_{33} - m_{xx}. \quad (5)$$

Так как в графе G нет C_5, то каждая вершина, инцидентная ребру между двумя гранями ранга 3 и имеющая степень 4, инцидентна ребру между двумя гранями ранга не менее 6.

Каждое $x-x$-ребро между двумя гранями ранга не менее 6 инцидентно не более чем двум вершинам степени 4, инцидентным 3-3-ребру, следовательно, число W_1 пар «3-3-ребро – x-x-ребро» ребер между двумя гранями ранга 3 и между двумя гранями ранга не менее 6, инцидентными одной и той же вершине степени 4, не превосходит $2m_{xx}$.

Каждая вершина степени $deg(v) \ge 5$ инцидентна не более чем $\frac{deg(v)}{3}$ 3-3-ребрам, следовательно, число W_2 пар «3-3-ребро – x-вершина» инцидентных ребер между двумя гранями ранга 3 и вершин степени не менее 5 не превосходит $\sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)}{3}$.

Каждое 3-3-ребро инцидентно двум вершинам, следовательно, $2m_{33} = W_1 + W_2$, откуда $2m_{33} \le 2m_{xx} + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)}{3}$, то есть

$$m_{33} - m_{xx} \le \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)}{6}. \quad (6)$$

Совмещая оценки (4), (5) и (6), элементарными преобразованиями получаем:

$$m < 2n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v)}{18}.$$

Вычисляя число ребер как полусумму степеней вершин, получаем:

$$m \ge 2n + \sum_{v \in V_x} \frac{deg(v) - 4}{2}.$$

Противоречие между последними двумя неравенствами доказывает теорему.

Заключение

Существует обыкновенный планарный граф с минимальной степенью четыре, не содержащий простых циклов длиной 7 или более. Примером такого графа является октаэдр. Заметим также, что из октаэдров можно составить сколь угодно большие графы, не содержащие простых циклов длиной 7 или более.

Таким образом, в каждом планарном графе со степенями вершин не менее четырех найдутся циклы C_3 и C_5. Этого нельзя сказать о цикле длины 4 и циклах длины 7 и более. Вопрос о существовании цикла C_6 в рассматриваемом классе графов остается открытым.

Список литературы

1. Иорданский М.А. Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3. № 4. С. 35–63.
2. Бурков Е.В., Иорданский М.А. Конструктивные описания эйлеровых планарных графов // Тез. докл. VI Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». Москва, 7–11 декабря 2004 г. С. 167–169.
3. Бурков Е.В. Еще один операционный базис класса эйлеровых планарных графов // Тез. докл. XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Казань, 2–7 июня 2008 г. С. 13.
4. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.

SHORT CYCLES IN PLANAR GRAPHS WITH MINIMUM DEGREE FOUR

E.V. Burkov

A problem is considered to find short cycles which are necessarily present in ordinary planar graphs with minimum degree four.

Keywords: graph, planar graph, cycle, vertex degree.