

УДК 621.311

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ СДВИГА  
ПО ТРАЕКТОРИЯМ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРОВ  
НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПОДВЕСКЕ**

© 2010 г.

Е.Ф. Сабеев, Т.А. Сабеева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

sabaeva@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 10.03.2009

Рассмотрены основные сведения теории устойчивости для монотонных операторов сдвига по траекториям и примеры применения этой теории к исследованию устойчивости роторов на электромагнитных подшипниках.

*Ключевые слова:* монотонный оператор, устойчивость, ротор, электромагнитные подшипники, скользящие режимы.

Роторы и электромагнитные подшипники являются составной частью различных машин: газовых турбин, систем охлаждения ЯЭУ и др., где возникают трудности со смазкой вращающихся частей или она полностью невозможна.

Теория монотонных операторов сдвига развита в работах [1, 2]. Получены условия устойчивости непосредственно по виду правых частей системы уравнений, используемых в математической модели. Приведём результаты теории монотонных операторов, которые понадобятся в дальнейшем.

1. Пусть  $A$  – монотонный оператор, то есть если  $x \geq y$  (неравенства понимаются по конусу), то  $Ax \geq Ay$ .

2. Если из  $x \in K$  следует  $Ax \in K$ , то оператор  $A$  называется положительным. Таким образом, монотонный оператор – это положительный оператор по отношению к приращениям.

3. Если  $x_0 \in K$  и  $Ax_0 \in -K$ , то уравнение  $\dot{x} = Ax$  имеет решение  $x(t, x_0)$ , удовлетворяющее неравенству  $x(t, x_0) \leq x_0$ . Аналогично, если непрерывная кривая  $x_0(\alpha) \subset K$  и  $Ax_0(\alpha) \subset -K$ , и  $x_0(0) = 0$ , то решение  $x = 0$  уравнения  $\dot{x} = Ax$  полуустойчиво сверху. Если  $x_0(\alpha) \subset -K$  и  $Ax_0(\alpha) \subset K$ , и  $x_0(0) = 0$ , то решение  $x = 0$  уравнения  $\dot{x} = Ax$  полуустойчиво снизу. Решение полуустойчиво сверху и снизу будет устойчиво.

4. Монотонный оператор будет положительным для отклонений (и обратно).

Введем конус неотрицательных матриц  $H$ :  $H \in K$ ,  $K = \{H \in \mathcal{L}(R^n, R^n): q^T H q \geq 0 \text{ для всех } q \in R^n\}$ , и матричное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA^T.$$

Оператор сдвига по траекториям для таких уравнений будет монотонным.

Уравнение  $HA + A^T X = -G$  называется уравнением Ляпунова. Это уравнение имеет положительное решение  $H = \int_0^\infty e^{A^T t} G e^{At} dt \geq 0$ , если

спектр матрицы  $A$   $\sigma(A)$  лежит в открытой левой полуплоскости, то есть  $\text{Re} \sigma(A) < 0$ .

Далее рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + af(\sigma), \quad \sigma = b^T x. \quad (1)$$

Поставим в соответствие (1) матричное уравнение для  $X = xx^T$ . Дифференцируя  $X$  в силу (1), имеем

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA^T + (ab^T X + Xba^T) f(\sigma) / \sigma \quad (2)$$

и уравнение в приращениях записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \Delta x = A \Delta x + \Delta x A^T + (ab^T \Delta x + \Delta x ba^T) f'_\sigma. \quad (3)$$

При выполнении неравенств  $\frac{f(\sigma)}{\sigma} \geq 0$  и  $f'_\sigma \geq 0$  оба уравнения (2) и (3) имеют *положительный оператор сдвига по траекториям*. Таким образом, оператор сдвига по траекториям для (2) будет монотонным оператором. Следовательно, критерий устойчивости запишется в виде  $\text{Re} \sigma(A + ab^T f(\sigma) / \sigma) < 0$ .

Заметим, что если  $f(\sigma) = \sigma$ ,  $\sigma = b^T x$ , то уравнение становится линейным и для этих уравнений  $\det|\lambda I - A - ab^T| = 0$  и спектр матрицы лежит в левой полуплоскости, то есть условия устойчивости переходят в условия устойчиво-

сти для линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если  $\text{Re}\sigma(A + ab^T f(\sigma)/\sigma) < 0$  для всех  $\sigma \in [0, \infty)$ , то состояние равновесия будет устойчиво в целом. Располагая ЭВМ, можно построить область притяжения к состоянию равновесия. Для этого нужно найти точку  $x_0 \in K$ , в которой вектор скорости принадлежит  $-K$ .

*Пример 1.* Исследуем простейший случай вертикального ротора на электромагнитных подшипниках с безынерционными катушками индуктивности:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{x_0}x - 2g\text{Sign}(ax + bx), \quad (4)$$

где  $x$  – координата ротора,  $g$  – ускорение свободного падения,  $x_0$  – расстояние до ограничителей,  $a$  и  $b$  – параметры системы управления. Матричное уравнение, соответствующее этому случаю, имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA^T - 2g \frac{\text{Sign}\sigma}{\sigma} uX - 2gXu^T \frac{\text{Sign}\sigma}{\sigma},$$

где  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $y = \dot{x}$ ,  $X = \begin{vmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{vmatrix}$ ,  $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2g & 0 \end{vmatrix}$ .

Соответствующая матрица  $A - 2g(a, b)X/\sigma$  система будет

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2g}{x_0}x - 2g \frac{ay + bx}{\sigma}. \quad (5)$$

На плоскости  $(x, y)$  фазовые траектории уравнения (4) представлены на рис. 1, где обозначено цифрами: 1 – линия скользящих движе-

ний, 2 и 3 – сепаратрисы седел в точках  $(x_0, 0)$  и  $(-x_0, 0)$ . Заметим, что фазовая плоскость для уравнений (5) совпадает с фазовой плоскостью для уравнения (4). Условия устойчивости будут иметь вид:

$$\lambda^2 = -\frac{b}{|\sigma|}2g, \quad a \geq 0, \text{ то есть } a \geq 0, b \geq 0.$$

Так как  $ay + bx = \sigma$ , то траектории на фазовой плоскости  $(x, y)$  совпадают с представленными на рис.1. Прямая  $ay + bx = 0$  является прямой скользящих движений. Таким образом, система уравнений (5) дает полную картину поведения траекторий уравнения (4).

*Пример 2.* Движение по вертикали ротора на электромагнитных подшипниках описывается уравнениями

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{x_0}x - \frac{i}{i_0}2g, \quad (6)$$

$$T\tau \frac{d^2i}{dt^2} + (T + \tau) \frac{di}{dt} + i = i_0 \text{Sign}\sigma, \quad \sigma = (ax + bx).$$

Здесь  $x$  – координата ротора,  $g$  – ускорение свободного падения,  $x_0$  – расстояние до ограничителей,  $a$  и  $b$  – параметры системы управления,  $T = L/R$ ,  $L$  – индуктивность катушки, а  $R$  – ее сопротивление,  $\tau$  – малая постоянная времени,  $i$  – текущее значение тока через катушки индуктивности,  $i_0$  – его максимальное значение.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\lambda^2 - \frac{2g}{x_0}\right)(T\tau\lambda^2 + (T + \tau)\lambda + 1) + \frac{2g}{|\sigma|}(a\lambda + b) = 0. \quad (7)$$

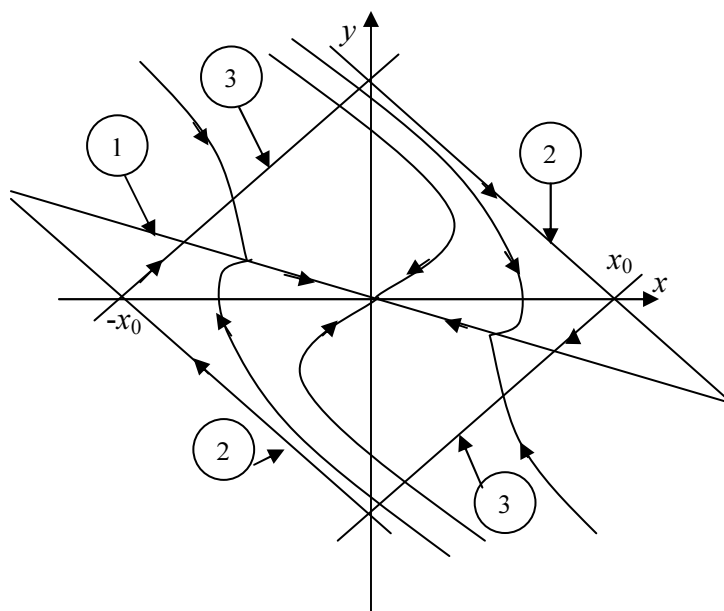


Рис. 1

Необходимые условия устойчивости:  $1 - \frac{2g}{x_0} \tau T > 0$ .

При нарушении этого условия ротор будет неустойчив при любых других значениях параметров.

*Замечание.* Поскольку вес ротора в уравнение не вошел, то можно подумать, что ротор большего размера можно исследовать с помощью ротора малого веса. Но это не так, так как  $T$  пропорционально  $L$ . При возрастании веса ротора  $P$  увеличиваются габариты магнитов, а следовательно, и  $L$ .

Область устойчивости в плоскости параметров  $(a, b)$  определяется  $D$ -разбиением, описываемым системой

$$\begin{aligned} \frac{2g}{|\sigma|} a &= (T + \tau) \left[ \omega^2 + \frac{2g}{x_0} \right], \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \\ \frac{2g}{|\sigma|} b &= -T\tau\omega^4 + \omega^2 \left( 1 - T\tau \frac{2g}{x_0} \right) + \frac{2g}{x_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

К уравнению (8) необходимо добавить ограничения, следующие из неотрицательности коэффициентов характеристического уравнения (7):

1.  $1 - 2gT\tau/x_0 > 0$ ,
2.  $a/|\sigma| \geq (T + \tau)x_0$ ,
3.  $b/|\sigma| \geq 1/x_0$ .

Условие  $\sigma = 0$  соответствует скользящему режиму. Кривой  $D$ -разбиения, отвечающей скользящему режиму, соответствует параметр  $\sigma = 1$ . Уравнения, описывающие скользящий режим и его устойчивость, приведены в работе

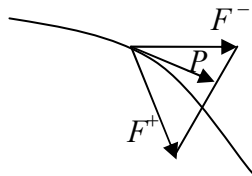


Рис. 2

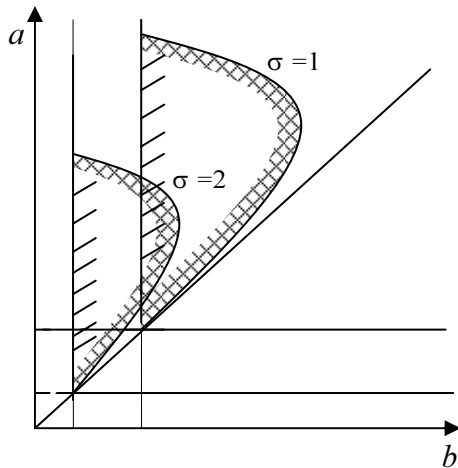


Рис. 3

[3]. Для определения вектора скорости  $P = (P_x, P_y)$  нужно найти векторы правых частей уравнения  $F = (F^+, F^-)$  и определить прямую, соединяющую концы этих векторов  $P = F^+ \alpha + F^-(1 - \alpha)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Величина  $\alpha$  находится из условия пересечения этой прямой и касательной к линии скольжения (рис. 2). Уравнение (6) при  $\sigma = 1$  использовалось в работе [4] для анализа устойчивости ротора на электромагнитных подшипниках. Области устойчивости в плоскости параметров  $(a, b)$  для разных значений  $\sigma$  представлены на рис. 3.

Для нахождения области притяжения к состоянию равновесия достаточно указать точку  $x_0 \in K$ , скорость в которой будет принадлежать  $-K$ . Это исследование легко переносится на случай уравнения с многими нелинейностями

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^n a_i f_i(\sigma_i), \quad \sigma_i = b_i^T x \quad \text{при условии}$$

$$f_i'(\sigma_i) \geq 0, \quad f_i(\sigma_i)/\sigma_i \geq 0.$$

Матричное уравнение для этого случая запишется в виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + XA^T + \sum_{i=1}^n (a_i b_i^T X + X b_i a_i^T) \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i}.$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$(\lambda I - A) = \sum_{i=1}^n (a_i b_i^T + b_i a_i^T) \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i}.$$

Для определения области устойчивости достаточно найти точку  $x_0 \in K$ , в которой вектор скорости  $\frac{dx}{dt} \in -K$ .

### Заключение

Получены условия устойчивости системы дифференциальных уравнений с многими нелинейностями вида  $f_i(\sigma_i)/\sigma_i \geq 0$ ,  $f_i' \geq 0$ ,

$\sigma_i = b_i^T x$ ,  $x, b_i \in R$ . Для этих уравнений получено характеристическое уравнение

$$\det \left\| \lambda I - A - \sum_{i=1}^n (a_i b_i^T + b_i a_i^T) \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \right\| = 0,$$

$$\sigma_i = b_i^T x,$$

в случае  $\frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} = k_i$ , то есть в линейном случае. Это уравнение дает необходимые и достаточные условия устойчивости. Область притяжения (или ее часть) можно определить из уравнения

$$\dot{x} = Ax + xA^T + (a_i b_i^T x + x b_i a_i^T) \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i}.$$

Для этого достаточно определить точку  $x_0 \in K$ , в которой  $\dot{x} \in -K$ .

*Список литературы*

1. Сабаев Е.Ф. Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980.

2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

3. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.

4. Митенков Ф.М., Кодочигов Н.Г., Востоков В.С. и др. Расчетно-экспериментальное исследование электромагнитного подшипника с дополнительным электромагнитом // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 3.

**APPLICATION OF THE THEORY OF MONOTONIC SHIFT OPERATORS ALONG THE TRAJECTORIES TO THE STUDY OF STABILITY OF ROTORS ON ELECTROMAGNETIC BEARINGS**

*E.F. Sabaev, T.A. Sabaeva*

The essentials of the stability theory for monotonic shift operators along the trajectories have been considered. Some examples of the theory application to the study of stability of rotors on electromagnetic bearings are given.

*Keywords:* monotonic operator, stability, rotor, electromagnetic bearings, zero-overshoot response.