М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.925.41

К ВОПРОСУ О ПРЯМЫХ ИЗОКЛИНАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Адыгейский госуниверситет, Майкоп

tlyachev@adygnet.ru

Поступила в редакцию 29.10.2009

Рассматриваются прямые изоклины квадратичных и кубических дифференциальных систем. Приводится краткий обзор результатов работ и дается доказательство теоремы Берлинского о числе особых точек второй группы. Доказываются новые утверждения об инвариантных прямых и прямых изоклинах, о числе и направлениях прямых изоклин, расположении состояний равновесия в конечной части фазовой плоскости.

Ключевые слова: прямые изоклины, квадратичные и кубические дифференциальные системы, каноническая форма, состояние равновесия, особая точка.

Введение

Целью качественного интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \qquad (1)$$

является установление схемы поведения её траекторий на фазовой плоскости (x, y). Но поведение траекторий системы (1) определяется особыми траекториями, такими как состояние равновесия, сепаратриса, предельный цикл. При этом важно знать количество состояний равновесия, их координаты, взаимное расположение сёдел и седлоузлов, число предельных циклов, их устойчивость и взаимное расположение. В решении этих и других вопросов большую роль играют прямые изоклины системы (1). Так, из результатов работы [1] следует, что расположение предельных циклов системы (1) в случае, когда P и Q – взаимно простые многочлены второй степени с действительными коэффициентами, существенно зависит от взаимного расположения прямых изоклин этой системы.

Впрочем, следует отметить, что автором работы [1] использованы результаты статьи [2], согласно которой число предельных циклов квадратичной системы не более трех. Впоследствии данная оценка не подтвердилась. Сошлемся на статью [3], в которой в качестве примера приведена система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy,$$

имеющая не менее четырех предельных циклов. Здесь $\delta = -10^{-13}, \varepsilon = -10^{-52}, \lambda = -10^{-20}$.

В пользу актуальности вопроса о прямых изоклинах автономных дифференциальных систем на плоскости говорит и тот факт, что задача нахождения координат состояний равновесия даже квадратичной системы становится трудно разрешимой в общем случае. Знание уравнения хотя бы одной прямой изоклины делает эту задачу реально разрешимой благодаря так называемым каноническим формам.

Под канонической формой записи системы (1) будем понимать форму ее записи, при которой

$$P(x, y) =$$
$$= (a_1x + b_1y + c_1)^{\alpha_1} \vdots \vdots (a_kx + b_ky + c_k)^{\alpha_k} \cdot P_0(x, y)$$

или

$$Q(x, y) =$$
$$= (m_1x + n_1y + l_1)^{\beta_1} \vdots \vdots (m_sx + n_sy + l_s)^{\beta_s} \cdot Q_0(x, y),$$

где $\alpha_i, \beta_j \ (i = \overline{1,k}, j = \overline{1,s})$ – целые неотрицательные числа, причем $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i > 0$ (или $\sum_{j=1}^{s}\beta_i > 0$), $P_0(x, y)\,(Q_0(x, y))$ – либо многочлен нулевой степени, либо многочлен степени $n \geq 2$, не имеющий линейных делителей вида $ax + by + c$.

Одним из первых к вопросу о прямых изоклинах квадратичной системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2 ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2 \qquad (2)$$

обратился А.Н. Берлинский в работе [4]. Благодаря прямым изоклинам стало возможным приведение системы (2) к каноническому виду, что позволило решить проблему сосуществования четырех состояний равновесия этой системы [5].

Исчерпывающее исследование квадратичной системы (2) на предмет существования и взаимного расположения прямых изоклин проведено в работе [6]. В ней приводится доказательство следующей теоремы: если дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (2) имеет хотя бы одну особую точку, то семейство его изоклин

$$\frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)} = \lambda \qquad (3)$$

всегда содержит не менее одной прямой. Это означает, что существует значение параметра λ, которому соответствует действительное распадение кривой (3). В данной работе также рассматриваются канонические формы системы (2) в зависимости от числа состояний равновесия и прямых изоклин.

К числу работ, посвященных изучению вопроса о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости, относятся и работы [7–9]. Автор [7] указывает на ошибочность доказательства леммы 1 [1], согласно которой через каждое состояние равновесия (если таковое имеется) квадратичной системы (2) проходит хотя бы одна прямолинейная изоклина. Этот факт является следствием теоремы 1 [7]: если m и n – числа разной четности, то через состояние равновесия (0; 0) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_m(x, y) + P_n(x, y) ,$$

$$\frac{dy}{dt} = Q_m(x, y) + Q_n(x, y) \qquad (4)$$

проходит по крайней мере одна прямолинейная изоклина. При этом либо каждая прямая, проходящая через точку (0, 0), есть изоклина, либо прямолинейных изоклин не более $m + n$. Здесь $m \geq 1$, $n \geq 1$, P_m, Q_m, P_n, Q_n – однородные многочлены степеней m и n соответственно (некоторые из них могут быть тождественно равны нулю и тогда их степень – любое натуральное число).

Замечание 1. По поводу отсутствия в [7] ссылки на ранее опубликованную и упомянутую нами выше работу [6] можно сделать предположение о том, что эта работа не была известна автору [7].

В работе [8], по сути дела, развиваются те же вопросы, что и в работе [6]. Причем доказательство существования хотя бы одной прямой изоклины квадратичной системы, проходящей через произвольное состояние равновесия этой системы, проведено здесь способом, отличным от способов, изложенных в статьях [1, 4–7]. Общим в работах [1, 4–6] является то, что факт существования не менее одной прямой изоклины, проходящей через одно состояние равновесия системы (2), доказывается в них с использованием критерия распадения кривой второго порядка, а именно условия равенства нулю третьего инварианта [10].

Заметим, поскольку авторы [8] не пользовались сведениями из теории кривых второго порядка, то они сочли необходимым привести доказательства теоремы о существовании и числе прямых изоклин, проходящих через одно состояние равновесия системы (2), и теоремы об оценке общего числа прямых изоклин этой же системы. Разумеется, система (2) рассматривается с невырожденной линейной частью. В случаях одного и двух состояний равновесия системы (2) для нее найдены новые канонические формы, отличные от тех, которые указаны в работе [6]. С учетом возможного числа прямых изоклин, а также характера индуцированного на них направления, установлено, что единственное состояние равновесия системы (2) может быть не только четырехкратным, как утверждается в [6], но и трех-, двукратным и даже простым состоянием равновесия.

Если через состояние равновесия квадратичной системы проходит не менее одной и не более трех прямых изоклин, то с системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij} \cdot x^i y^j \equiv P_3(x, y) ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij} \cdot x^i y^j \equiv Q_3(x, y) , \qquad (5)$$

где a_{ij}, $b_{ij} \in R$, $(P_3, Q_3) = 1$, дело обстоит иначе.

Существуют дифференциальные системы вида (5), не имеющие прямых изоклин, проходящих через то или иное состояние равновесия.

Пример 1. Не существует прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия (0; 0) системы:

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2 - 3xy + y^2 - 12x^3 - 13x^2y + y^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = y - 3x + 240x^3 - 38x^2y - 7xy^2 + y^3.$$

В работе [9] рассмотрена система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y) + P_{n+1}(x,y) \equiv P(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q_n(x,y) + Q_{n+1}(x,y) \equiv Q(x,y), \qquad (6)$$

где $|P_n| + |Q_n| \not\equiv 0$, $P_{n+1} \cdot Q_{n+1} \not\equiv 0$, $(P,Q) = 1$, $P_k = \sum\limits_{i+j=k} a_{ij}x^iy^j$, $Q_k = \sum\limits_{i+j=k} b_{ij}x^iy^j$, $k = n$, $n+1$, $n \in N$, $a_{ij}, b_{ij} \in R$.

Для нее доказана теорема 1: через состояние равновесия (0; 0) проходит не менее одной и не более $2n+1$ прямых изоклин.

Формально заменив в системе (6) $n+1$ на m и считая m и n числами разной четности, мы получаем доказательство теоремы 1 [7] в той части, где утверждается существование не менее одной и не более $m+n$ прямых изоклин, проходящих через состояние равновесия (0; 0) системы (6). Иначе говоря, получаем другое доказательство теоремы 1 [7].

Далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P_i(x,y) + P_j(x,y) + P_k(x,y) \equiv P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q_i(x,y) + Q_j(x,y) + Q_k(x,y) \equiv Q(x,y), \end{aligned} \qquad (7)$$

где i, j, k – попарно различные натуральные числа, $i < j < k$, $(P,Q) = 1$, P_s, Q_s – однородные многочлены степени s $(s \in \{i, j, k\})$,

$$P_k(x,y) \cdot Q_k(x,y) \not\equiv 0. \qquad (8)$$

Априори считается выполненным условие

$$|P_i| + |Q_i| + |P_j| + |Q_j| \not\equiv 0, \qquad (9)$$

так как в противном случае любая прямая, проходящая через точку (0; 0), – изоклина системы (7).

Очевидно, система (5) – частный случай системы (7).

Из примера 1, приведенного нами выше, следует, что существуют системы вида (7), не имеющие прямых изоклин, инцидентных состоянию равновесия (0; 0), а именно при условии, что среди многочленов P_i, P_j, P_k или многочленов Q_i, Q_j, Q_k хотя бы два являются многочленами степеней одинаковой четности.

В работе [9] доказана теорема 20: число прямых изоклин системы (7) при $k = 3$ и выполнении условий (8) и (9) не более десяти.

Пример 2. Прямые $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = x$, $y = x + 2$, $y = -x$, $y = -x + 2$, $x = -2y + 2$, $x = 2y - 2$ являются изоклинами системы:

$$\frac{dx}{dt} = (y - x)(y - x - 2)(x + 2y - 2),$$
$$\frac{dy}{dt} = (y + x)(y + x - 2)(x - 2y + 2).$$

Одним из важных результатов работы [9] является теорема 21 [9]: в пучке плоских кривых третьего порядка с девятью базисными точками содержится не более трех кривых, распадающихся на три прямые. Если число таких кривых равно трем, то, быть может, еще одна кривая пучка распадается на прямую и неприводимую кривую второго порядка.

В связи с вопросом о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости уместно отметить следующее. Любая инвариантная прямая автономной дифференциальной системы на плоскости является ее прямой изоклиной. Поэтому проблема оценки числа инвариантных прямых полиномиальной дифференциальной системы является частью более общей проблемы оценки числа прямых изоклин. Можно доказать, что максимальное число инвариантных прямых полиномиальной дифференциальной системы меньше максимального числа ее прямых изоклин. Так, например, в работе [11] доказано, что число инвариантных прямых кубической системы (5) не превосходит восьми. Проблеме оценки числа инвариантных прямых полиномиальных дифференциальных систем на плоскости посвящена также заметка [12]. В ней опровергается существовавшая в 80-х годах прошлого столетия гипотеза о том, что максимальное число инвариантных прямых системы (1) с взаимно простыми полиномами степени n в правых частях равно $2n+1$, если n – четное, и $2n+2$, если n – нечетное. При этом построен пример системы (1) с многочленами пятой степени в правых частях, которая имеет 14 инвариантных прямых.

Некоторые применения теории прямых изоклин

1. Элементарное доказательство теоремы А.Н. Берлинского о числе особых точек второй группы. В работе [5] доказана теорема 2: число особых точек второй группы дифференциального уравнения фазовых траекторий системы (2) не превосходит двух.

Состояние равновесия $M(x_0, y_0)$ типа «фокус» или «центр» системы (1) называется состоянием равновесия второй группы, если выполняется одно из условий:

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0\,,$$
$$P'_x(x_0, y_0) \cdot Q'_y(x_0, y_0) - - P'_y(x_0, y_0) \cdot Q'_x(x_0, y_0) > 0\,, \tag{10}$$

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0\,,$$
$$P'_x(x_0, y_0) \cdot Q'_y(x_0, y_0) - - P'_y(x_0, y_0) \cdot Q'_x(x_0, y_0) = 0\,. \tag{11}$$

Очевидно, условие (10) ((11)) соответствует случаю чисто мнимых (двух нулевых) корней характеристического уравнения состояния равновесия $M(x_0, y_0)$.

Согласно [13] для квадратичной системы (2) могут иметь место только состояния равновесия второй группы с условием (10).

Итак, приступим к доказательству теоремы.

Допустим, что система (2) имеет три состояния равновесия второй группы A, B, C. Тогда для каждого из них выполняется условие (10), а значит, все состояния равновесия простые. Так как квадратичная система (2) не может иметь три состояния равновесия на одной прямой, то непременно выполняется условие:

$$P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) \equiv 0\,. \tag{12}$$

В силу (12) A, B, C могут быть только центрами. Согласно [1, 9] любая прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (2), является ее изоклиной. Таким образом, прямые AB, BC, AC – изоклины системы (2). Посредством подходящего линейного невырожденного преобразования [9] переведем прямые AB и AC в изоклины бесконечности и нуля соответственно. Поэтому, не сужая общности, рассматриваем систему:

$$\frac{dx}{dt} = (ax + by)(cx + dy + 1)\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = (rx + \ell y)(sx + ky + 1)\,. \tag{13}$$

Предполагается, что начало координат предварительно перенесено в точку A. Согласно теореме 36 [14], главные изоклины системы (13) являются самопересекающимися, причем точки самопересечения расположены внутри отрезков AB и AC. Тем самым мы утверждаем, что внутри треугольника ABC расположено еще одно состояние равновесия, обозначим его D. Поскольку A, B, C, D образуют невыпуклый четырехугольник, то D – простое седло [5] (см. рис.).

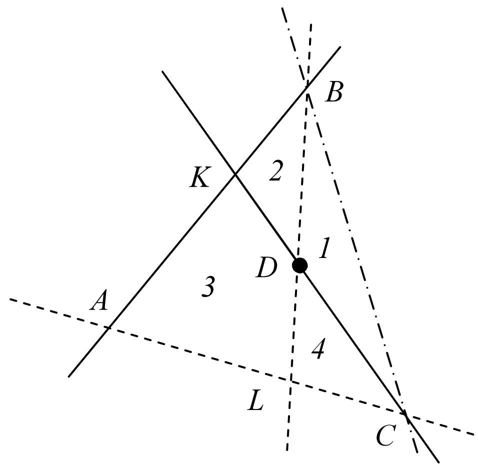

Рис. К доказательству теоремы Берлинского

Сепаратрисы, примыкающие к седлу D в достаточно малой его окрестности, расположены в секторах 1–4. Для определенности полагаем, что в секторах 1 и 3 расположены α-сепаратрисы, а в секторах 2 и 4 – ω-сепаратрисы седла D. Ни одна из сепаратрис седла D в достаточно малой его окрестности не пересекает главные изоклины DK, DB, DC, DL. Положительная полутраектория – часть α-сепаратрисы, примыкающей к D и расположенной в секторе 1, пересекает сторону BC треугольника ABC. В самом деле, если предположить, что эта полутраектория при $t \to +\infty$ остается внутри треугольника DBC, то, согласно [15], допускается существование ω-предельного множества (замкнутой траектории) для данной положительной полутраектории. Но это невозможно, так как внутри треугольника DBC нет состояний равновесия системы (2). Аналогичным образом доказывается, что сепаратрисы, расположенные в секторах 2 и 4, пересекают отрезки KB и LC изоклин бесконечности и нуля соответственно при $t \to -\infty$. Сепаратриса, расположенная в секторе 3, при этом пересекает либо отрезок AK изоклины бесконечности, либо AL – отрезок изоклины нуля. В любом из двух этих случаев мы имеем между двумя состояниями равновесия A и B (или A и C) две несогласованные точки по терминологии [1]. Следовательно, на одной из сторон AB и AC треугольника ABC найдется хотя бы один контакт [1], отличный от состояний равновесия.

Пришли к противоречию с тем, что на любой прямой, отличной от инвариантной прямой, сумма числа состояний равновесия и числа контактов для системы (2) не превосходит двух [1, 9]. Теорема доказана.

2. Доказательство некоторых утверждений, связанных с приведением полиномиальных систем к канонической форме. Для краткости изложения условимся говорить, что дифференциальная система индуцирует на изоклине L направление m, если угловой коэффициент касательных к траекториям этой системы в точках их пересечения (быть может, касания) с L равен m.

Утверждение 1. Пусть дифференциальная система (5) имеет не менее четырех прямых изоклин. Тогда по меньшей мере на двух из них эта система индуцирует различные направления.

Доказательство. Следуя работе [9], применим к системе (5) преобразование $x=\overline{y}$, $y=\overline{x}+m\overline{y}$, переводящее каждую прямую изоклину, на которой система (5) индуцирует направление m, в изоклину бесконечности системы

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{Q}_3(\overline{x},\overline{y})-m\overline{P}_3(\overline{x},\overline{y}),\quad \frac{d\overline{y}}{dt}=\overline{P}_3(\overline{x},\overline{y}),\tag{14}$$

где $\overline{P}_3(\overline{x},\overline{y})=P_3(\overline{y},\overline{x}+m\overline{y})$, $\overline{Q}_3(\overline{x},\overline{y})=Q_3(\overline{y},\overline{x}+m\overline{y})$. Но изоклина бесконечности $\overline{Q}_3(\overline{x},\overline{y})-m\overline{P}_3(\overline{x},\overline{y})=0$ системы (14) является кривой не выше третьего порядка. Следовательно, эта система имеет не более трех прямых изоклин бесконечности.

Из доказанного утверждения следует, что дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (5) имеет не более трех различных интегральных прямых с одним и тем же угловым коэффициентом m.

Утверждение 2. Если дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (5) имеет восемь интегральных прямых, то по крайней мере три из них параллельны между собой.

Доказательство. Как известно [11], максимальное число различных направлений интегральных кривых дифференциального уравнения фазовых траекторий системы (5) равно четырем. Поэтому, допуская отсутствие тройки параллельных между собой инвариантных прямых системы (5), приходим к выводу, что существуют четыре пары параллельных между собой прямых $y=m_ix+b_{1,2}^i$, $i=\overline{1,4}$, $m_i\neq m_j$, если $i\neq j$. Применяя к системе (5) подходящее линейное невырожденное преобразование [9], придадим ей вид:

$$\frac{dx}{dt}=x(x-a)(Ax+By+C),$$
$$\frac{dy}{dt}=y(y-b)(Mx+Ny+K).\tag{15}$$

По предположению ни одна из изоклин $l_1: Ax+By+C=0$ и $l_2: Mx+Ny+K=0$ не параллельна ни одной из четырех пар параллельных между собой инвариантных прямых системы (15). Следовательно, хотя бы на одной из изоклин l_1 и l_2 система (15) имеет не менее четырех состояний равновесия, что невозможно.

Утверждение 3. Пусть система уравнений

$$\begin{cases}P_3(x,y)=0,\\ Q_3(x,y)=0,\end{cases}$$

где $(P_3,Q_3)=1$, имеет девять решений, шесть из которых расположены на двух прямых. Тогда остальные три решения всегда можно найти.

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P_3(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q_3(x,y).\tag{16}$$

Так как (16) имеет шесть состояний равновесия на двух прямых, то эта система индуцирует на указанных прямых одно и то же направление [9]. В силу этого системе (16) можно придать вид:

$$\frac{dx}{dt}=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\times$$
$$\times(a_3x+b_3y+c_3),\quad \frac{dy}{dt}=\overline{Q_3}(x,y).\tag{17}$$

Из вида системы (17) теперь ясно, что недостающие три состояния равновесия расположены на прямой, и их абсциссы (или ординаты) удовлетворяют кубическому уравнению, решения которого, как известно, всегда можно найти.

Утверждение 4. Пусть через состояние равновесия $M(x_0,y_0)$ системы (2) проходит одна и только одна прямая изоклина l. Тогда эта система имеет не более двух состояний равновесия в конечной части фазовой плоскости. При этом каждое состояние равновесия принадлежит прямой l.

Доказательство. Допустим, что система (2) имеет более двух состояний равновесия. Так как никакие три состояния равновесия квадратичной системы (2) не могут принадлежать одной и той же прямой, то существует треугольник, вершинами которого являются состояния равновесия, одно из которых есть точка M. Но согласно [1, 9], прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (2), является ее изоклиной. Таким образом, через состояние равновесия M проходят по крайней мере две прямые изоклины – пришли к противоречию с условием данного утверждения.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3\alpha x^2+\alpha y^2+4xy-3y}{x^2-3y^2+4\alpha xy-2x+\alpha y}, \qquad (18)$$

одной из интегральных кривых которого является кардиоида

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2x\left(x^2+y^2\right)-y^2=0. \qquad (19)$$

Уравнение (18) изучено в работе [16].

Очевидно, что (0; 0) – особая точка уравнения (18). Характеристическое уравнение направлений прямых изоклин, проходящих через особую точку (0; 0), имеет вид [8]:

$$\left(9-\alpha^2\right)k^3-14\alpha k^2+\left(5+3\alpha^2\right)k-6\alpha=0. \qquad (20)$$

При $\alpha=\pm 3$ старший коэффициент в уравнении (20) равен нулю. Поэтому $x=0$ – изоклина дифференциального уравнения (18) [8].

При $\alpha=3$ уравнение (18) запишется в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-9x^2+3y^2+4xy-3y}{x^2-3y^2+12xy-2x+3y}. \qquad (21)$$

Нетрудно видеть, что на прямой $x=0$ уравнение (21) индуцирует направление $m=-1$. Поэтому, следуя [8], применим к уравнению (21) преобразование

$$x=\bar{x}+\bar{y},\quad y=-\bar{y}. \qquad (22)$$

В результате получим уравнение

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=\frac{9\bar{x}^2+22\bar{x}\,\bar{y}+10\bar{y}^2-3\bar{y}}{2\left(\bar{x}+\bar{y}\right)\left(4\bar{x}+12\bar{y}+1\right)}. \qquad (23)$$

Легко заметить, что преобразование (22) переводит прямую $x=0$ в изоклину бесконечности уравнения (23). Каноническая форма записи дифференциального уравнения (23) позволяет убедиться в том, что это уравнение имеет ровно две особые точки, и они расположены на изоклине бесконечности $\bar{y}=-\bar{x}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что на прямой $4\bar{x}+12\bar{y}+1=0$ уравнение (23) не имеет особых точек.

Замечание 2. Уравнение (20) при $\alpha=\pm 3$ не имеет вещественных корней, но так как коэффициент при k^3 в этом уравнении равен нулю, то прямая $x=0$ – изоклина уравнения (18), и причем единственная. Отсюда, в силу утверждения 4, следует, что уравнение (21) имеет не более двух особых точек.

В связи с вышесказанным отметим один весьма интересный факт. Так как на прямой $x=0$ уравнение (21) индуцирует направление $m=-1$ и эта прямая пересекает кардиоиду (19) в трех точках (0; 0), (0; 1), (0; –1) (см. рис. 1 [16]), то естественно считать точку (0; 1) особой точкой уравнения (21). Таким образом, уравнение (21) имеет две особые точки в конечной части фазовой плоскости: (0; 0) – простой устойчивый узел, (0; 1) – простой неустойчивый узел. Оба узла принадлежат кардиоиде (19) (см. [16]).

Список литературы

1. Тун Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $\frac{dx}{dt}=\sum_{i+k=0}^{2}a_{ik}x^iy^k$, $\frac{dy}{dt}=\sum_{i+k=0}^{2}b_{ik}x^iy^k$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. 1962. Т.6. № 2. С. 150–168.
2. Петровский И.Г., Ландис Е.М. О числе предельных циклов уравнения: $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q – многочлены второй степени // Математический сборник. 1952. В. 30 (72). № 1. С. 209–250.
3. Sonling Shi. A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems // Scientia Sinica. 1980. V. 23. № 2. P. 153–158.
4. Берлинский А.Н. Некоторые вопросы качественного исследования дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q – многочлены не выше второй степени. Дисс. ... к. физ.-мат. наук. Ташкент, 1959. 115 с.
5. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. Сер. Математика. 1960. № 2 (15). С. 3–18.
6. Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. 1964. № 144. С. 93–105.
7. Чересиз В.М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журн. 1994. Т. 35. № 6. С. 1390–1396.
8. Ушхо Д.С., Горних М.И. Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2002. № 7. С. 72–82.
9. Ушхо Д.С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7–21.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981. 232 с.

11. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1977. С. 19–22.

12. Artes J., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. V. 184. No 2. P. 207–230.

13. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

14. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 487 с.

15. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи математических наук. 1941. Т. 9. С. 191–211.

16. Дружкова Т.А. О квадратичном дифференциальном уравнении с алгебраическим интегралом // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1977. С. 3–6.

ON STRAIGHT-LINE-ISOCLINES OF POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS ON THE PLANE

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

Straight-line-isoclines of quadratic and cubic differential systems are considered. A short review of research results and a proof of Berlinski's theorem on the number of singular points are given. New statements are proven on invariant straight lines and isoclines, the number and directions of straight-line-isoclines, as well as the pattern of singular points in the finite part of the phase plane.

Keywords: straight isoclines, quadratic and cubic differential systems, canonical form, equilibrium state, critical point.