

УДК 517.97+519.86

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА. I

© 2010 г.

Ю.А. Кузнецов, О.В. Мичасова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Yu-Kuzn@mm.unn.ru, michasova@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 05.11.2009

Дается краткий обзор исследований математических моделей теории экономического роста, учитывающих процессы накопления физического и человеческого капиталов. Строится общая математическая модель экономического роста, обобщающая ряд подобных моделей, включая классическую модель Р. Лукаса. Для обобщенной модели экономического роста описаны постановки двух традиционных оптимизационных задач (социального планировщика и о равновесном конкурентном развитии экономики). Сформулирована общая задача, охватывающая основные постановки задачи об оптимальном развитии экономики.

Ключевые слова: экономический рост, физический капитал, человеческий капитал, оптимальное развитие экономики.

Введение. Краткий обзор

Обеспечение устойчивого экономического роста (*sustained economic growth*) представляет собой одну из важнейших задач реальной экономической политики и экономической теории. В современных условиях эта проблема особенно актуальна.

Под экономическим ростом (ЭР) обычно понимается долгосрочная тенденция (тренд) развития ряда важнейших экономических показателей, таких как *реальный выпуск* (валовой внутренний продукт, ВВП; *Gross Domestic Product, GDP*) и *реальный выпуск на душу населения* (*per capita*). И хотя эти показатели не являются «измерителями» благосостояния, они весьма часто используются для сравнения уровня экономического развития и, косвенно, уровня жизни в различных странах.

В течение последних приблизительно двух столетий большинство экономик мира демонстрировали достаточно стабильный *возрастающий* тренд развития выпуска на душу населения; приблизительно с середины XIX века мировая экономика имеет средний темп роста примерно 3% в год. Это явление обычно обозначают термином *современный экономический рост* (*modern economic growth*). И хотя мировая экономика в целом показывает стабильные темпы роста, ЭР сильно варьируется в различных регионах мира. Например, во второй половине XX века темпы роста выпуска на душу населения колебались от 7–10% в Японии и в «азиатских тиграх» (Южная Корея, Гонконг, Сингапур и Тайвань) до 0% в некоторых

отстающих в развитии странах Африки, Азии и Южной Америки (например, в Эфиопии, Бангладеш и Боливии). Благодаря высоким темпам роста за последние 50 лет Япония и Южная Корея смогли перейти из группы *развивающихся стран* в число *развитых стран*. С другой стороны, низкие темпы экономического роста в Аргентине после 1930 года послужили причиной значительного отставания этой страны, так что в итоге Аргентина стала единственным примером перехода страны из числа *мировых лидеров* по экономическому развитию в число *развивающихся стран*. Анализ эмпирических данных позволил ряду выдающихся экономистов (среди которых в первую очередь должны быть упомянуты Николас Калдор (N. Kaldor), Саймон Кузнец (S. Kuznets), Пол Ромер (P.M. Romer) и Роберт Лукас (R.E. Lucas, Jr.)) обнаружить и сформулировать ряд так называемых *стилизованных фактов* (*stylized facts*) современного экономического роста – ряд тенденций и закономерностей, типичных для современной *экономической динамики*, а также построить на их основе некоторые эндогенные модели экономического роста (подробнее о развитии исследований в этой области см. в [1–3]).

Количество стилизованных фактов постепенно (по мере накопления статистических данных и проведения их анализа) меняется, так что разными авторами зачастую указывается различное их число. Отметим, что к числу важнейших современных стилизованных фактов относятся, например, такие закономерности:

- темпы роста выпуска на одного работника существенно отличаются в различных странах;

- накопление *отдельных* экономических факторов (ЭФ) не имеет решающего значения для объяснения большей части перекрестных различий в уровнях ЭР; основную роль играет общая производительность ЭФ, их одновременный рост, *взаимовлияние* и *экстерналии*;

- важную роль в обеспечении высоких темпов ЭР играют *научно-технологический прогресс* и *образование*, снижающие зависимость производства от естественных ресурсов.

Впрочем, роль уровня квалификации рабочей силы (то есть – в более широком плане – уровня подготовки или образования) отмечалась ещё классиками экономической теории начиная с А. Смита (см., например, [4]). По существу уже тогда речь шла о том, что наряду с *физическим* капиталом важнейшим фактором производства является *человеческий капитал*: помимо машин, зданий, сооружений и приносящих доход земель, А. Смит относит к капиталу и *благоприобретенные и полезные качества и способности* жителей страны¹.

В дальнейшем роль квалификации (качества) рабочей силы отмечалась и некоторыми другими экономистами и социологами (см., например, [5–7]). В явном виде понятие *человеческого капитала* (ЧК) было введено в экономическую науку в 60-х годах XX столетия в работах Дж. Минцера [8, 9], Г. Беккера [10, 11] и Т. Шульца [12, 13]. Обзор и анализ историко-методологических аспектов возникновения и развития этого понятия представлен в целом ряде статей (см., например, [14–19]).

Следует отметить, что к настоящему времени само понятие «капитал» претерпело весьма серьезное переосмысление и заметную трансформацию, так что его трактовки, предлагаемые представителями различных научных направлений, отличаются достаточно сильно. Тем не менее с определенными оговорками это понятие может быть охарактеризовано следующим образом (см. подробнее [20–23]). *Капитал* – это *результат социальной оценки ограниченного, допускающего накопление, ликвидного, воспроизводимого и способного приносить новую (добавочную) стоимость хозяйственного ресурса, который включен в процессы воспроизводства и возрастания стоимости путем взаимной конвертации своих разнообразных форм*. Чрезвычайно важным является тот факт, что капитал может принимать не только овеществленные формы, но также и воплощаться (*be embodied*) в отдельных людях и в отношениях между людьми. Можно указать некоторые *основные формы капитала*, которые адекватны тем или иным подходам к изучению хозяйственной деятель-

ности. В их числе, в первую очередь, следует отметить исходную форму капитала – *экономический капитал*, который в своем вещном состоянии включает в себя денежный капитал (финансовые средства), производственный капитал (средства производства) и товарный капитал (готовые продукты). На раннем этапе развития теории экономического роста традиционно рассматривались лишь такие формы капитала, как *физический капитал* (*physical capital*)² и *трудовые ресурсы* (фактически – численность вовлеченных в производство работников) [1–3, 14–19].

Как уже отмечалось выше, одной из важнейших форм капитала является *человеческий капитал*. Он представляет собой совокупность накопленных профессиональных *знаний, умений и навыков*, получаемых в процессе образования и повышения квалификации, которые впоследствии могут приносить доход – в виде заработной платы, процента или прибыли. С известными оговорками ЧК может быть охарактеризован как оценка воплощенной в индивидууме способности приносить доход.

В 60-х годах XX столетия Ф. Махлупом [24] был введен в научный оборот термин «экономика знаний» для определения типа экономики, в которой знания играют решающую роль, а производство знаний является источником роста (близкие и весьма широко применяемые понятия – «инновационная экономика», «общество знаний», «информационное общество» и т.д.). Некоторые специалисты считают, что экономика знаний существенно отличается от экономики индустриального типа, когда накопление богатства было связано с материальными активами – напротив, в экономике, основанной на знаниях, особое внимание должно уделяться *накоплению человеческого капитала*, а также созданию такой инфраструктуры, которая позволила бы эффективнее использовать накопленные опыт и знания в производстве и потреблении (подробнее см. [23–26]).

Впервые человеческий капитал был включен в неоклассическую модель экономического роста в знаменитой (и теперь уже ставшей классической) работе Р. Лукаса [27]. В его модели экономического роста ЧК играет приблизительно ту же роль, что и научно-технологический прогресс. Это заметно сближает модель Лукаса с известной моделью Х. Узавы [28], однако у данных моделей существуют и принципиальные отличия. Лукас впервые ввел в рассмотрение концепцию своеобразного «дуализма» человеческого капитала. Существенная черта его модели – явное выделение двух путей (каналов)

влияния ЧК на ЭР. Эти два типа воздействия могут быть обозначены как внутренние (описывающие непосредственное повышение эффективности производства, связанное с ростом квалификации работников) и внешние эффекты (экстерналии). Внешние эффекты ЧК характеризуются некоторым средним значением ЧК в экономической системе в целом.

Эта концепция, а также некоторый механизм взаимодействия процессов накопления физического и человеческого капиталов были положены в основу построенной Лукасом эндогенной математической модели ЭР с учетом эффекта накопления ЧК. Механизм накопления ЧК предполагает обучение с «отрывом от производства» (в отличие от известной модели К. Эрроу [29] «learning-by-doing»). Это обучение происходит в рамках своеобразного «образовательного сектора экономики» – именно там работники осуществляют накопление и развитие своего ЧК. Модель Лукаса позволила, в частности, объяснить ряд эмпирических фактов, касающихся различий в темпах ЭР. Дальнейшее развитие данного направления исследований привело как к детальному изучению, так и к ряду уточнений и обобщений модели Лукаса. Подробный обзор литературы по данной теме выходит далеко за рамки настоящей работы. Отметим в связи с этим лишь некоторые работы [30–40], в которых эта модель существенно развита и обобщена. Следует отметить также, что ряд работ содержит как критические замечания по поводу роли ЧК в экономическом развитии вообще, так и в связи с моделью Р. Лукаса. Упомянем здесь лишь работы [35, 37–39]. Особо отметим работу [39], в которой рассматривается некоторая модификация модели Р. Лукаса, учитывающая «амортизацию» ЧК и наличие убывающего эффекта масштаба в производственной функции ЧК. Последнее объясняется тем, что по мере роста уровня ЧК создание дополнительного ЧК становится все более сложной (а потому – менее эффективной) процедурой. Косвенным свидетельством в пользу этого является и тот факт, что в большинстве развитых стран темпы роста показателей, описывающих уровень образования, гораздо выше, чем темпы роста национального дохода. Более того, оказывается, что и на скорость изменения ЧК репрезентативного экономического агента оказывает влияние «средний» уровень ЧК на рынке труда, так что в действительности «внешний эффект» ЧК имеет место не только в сфере производства, но и в сфере образования.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию математической модели эконо-

мического роста с учетом накопления физического и человеческого капиталов, обобщающей ряд подобных моделей, включая классическую модель Р. Лукаса: в ней учитываются как убывающий эффект масштаба в производственной функции человеческого капитала, так и наличие «внешнего эффекта» человеческого капитала в сфере образования. Заметим, что рассматриваемые в работе внешние эффекты ЧК являются характерными для секторов (*sector-specific externalities*) и не сводятся к среднему уровню ЧК на рынке труда.

В первой части работы дан краткий обзор исследований математических моделей теории ЭР, учитывающих процессы накопления физического и человеческого капиталов. Для обобщенной модели ЭР даются постановки двух традиционных оптимизационных задач (социального планировщика и о равновесном конкурентном развитии экономики), выводятся необходимые условия оптимальности управлений в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина и формулируется общая задача, охватывающая основные постановки задачи об оптимальном развитии экономики. Во второй части работы устанавливаются условия существования траекторий сбалансированного роста (ТСР), а также указываются некоторые качественные особенности ТСР. Наконец, в третьей части исследование траекторий сбалансированного роста и структуры фазового пространства системы в их окрестности проводится с применением численно-аналитических методов.

Полученные в настоящей работе результаты обобщают и уточняют ряд утверждений, полученных в перечисленных выше работах. Некоторые предварительные результаты по данной проблеме опубликованы в работах авторов [41, 42].

Модель эндогенного экономического роста

Обобщенная модель экономического развития двухсекторной экономической системы включает в себя производственный сектор и сектор «знаний» (образовательный сектор), формирующий «человеческий капитал» $h(t)$ репрезентативного экономического агента. В классической модели Р. Лукаса внешний эффект ЧК учитывался только в сфере производства, в котором репрезентативный экономический агент занят в течение доли $u(t) \in [0, 1]$ своего активного времени, причем воздействие данного эффекта определялось уровнем «среднего» значения $h_a(t)$ ЧК на рынке труда. Однако, как уже отмечалось выше, этот эффект ока-

зывает влияние и на скорость изменения ЧК экономического агента, то есть проявляется также и в сфере образования. Более того, скорость изменения его ЧК определяется не только уже достигнутым его уровнем $h(t)$, но зависит также и от той доли времени $[1 - u(t)]$, которую экономический агент посвящает своему образованию (накоплению ЧК), а также и от величины «средних» значений ЧК на рынке труда $h_a(t)$ и доли $[1 - u_a(t)]$ времени, отводимого образованию. Естественно предположить также, что, в принципе, экономический агент заинтересован в том, чтобы тратить на каждый из видов деятельности (производственную и образовательную) такую же часть своего активного времени, как и в среднем по рынку. Другими словами, можно считать, что и в сфере производства также имеет место внешний эффект для величины $u(t)$, причем его влияние проявляется таким же образом, как и влияние «среднего» значения человеческого капитала на рынке труда $h_a(t)$. Точнее говоря, в сфере производства экстерналии определяются величиной $u_a(t) \times h_a(t)$ – «средним» трудовым вкладом экономического агента в производство (с учетом его эффективности).

Принимая во внимание все сказанное, запишем уравнение динамики объема физического капитала в виде:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^\beta [u(t)h(t)N(t)]^{1-\beta} \times \\ \times [u_a(t)h_a(t)]^\gamma - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ – функция, описывающая экзогенный технологический прогресс ($A(t) = A_0 e^{\alpha t}$, темп технологического прогресса постоянен $\alpha = \text{const}$), $K(t)$ – физический капитал, $N(t)$ – численность рабочей силы ($N(t) = N_0 e^{nt}$, $n = \text{const}$), $u(t)h(t)N(t)$ – эффективная рабочая сила («внутренний эффект» ЧК), $c(t)$ – удельное потребление, β – доля физического капитала, γ – положительный параметр, μ_K – норма амортизации физического капитала.

Уравнение динамики накопления человеческого капитала принимает вид:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta [1 - u(t)]^p [1 - u_a(t)]^s \times \\ \times h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t), \quad (2)$$

где δ – положительный технологический параметр, p, s, q и r – неотрицательные парамет-

ры³, причем $p + s = 1$, $q + r = 1$, а μ_h – норма амортизации ЧК. Заметим, что уравнение (2) отражает тот факт, что на «микроуровне» репрезентативный экономический агент рассматривает функции $u_a(t)$ и $h_a(t)$ как заданные (экзогенные), так что производственная функция ЧК в правой части уравнения (2) отражает наличие на «микроуровне» убывающего эффекта масштаба и отсутствие эффекта масштаба на «макроуровне».

Система уравнений (1), (2) дополняется также начальными условиями вида

$$K(t)|_{t=0} = K_0 > 0, \quad h(t)|_{t=0} = h_0 > 0.$$

Предполагается, что репрезентативный экономический агент выбирает свой уровень потребления $c(t) \in \mathbf{R}_+ \equiv [0, \infty)$ и долю $u(t) \in [0, 1]$ своего активного времени, посвященного трудовой деятельности, таким образом, чтобы максимизировать величину полной дисконтированной полезности:

$$J = J[c, u] \equiv \int_0^\infty e^{-\rho t} N(t) U[c(t)] dt \rightarrow \max. \quad (3)$$

Здесь функция $U[c]$ – «мгновенная» полезность экономического агента при уровне его потребления c . Обычно рассматривается функция полезности конкретного вида – функция типа CRRA⁴:

$$U[c] = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \sigma \in \Sigma \equiv \mathbf{R}_{++} \setminus \{1\}; \\ \ln c, & \sigma = 1; \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_{++} \equiv (0, \infty).$$

Оптимизационная задача, связанная с моделью (1)–(3) экономического роста с учетом накопления человеческого капитала, состоит в выборе таких управляющих параметров $c(t) \in \mathbf{R}_+ \equiv [0, \infty)$ и $u(t) \in [0, 1]$, которые бы максимизировали функционал (3) на допустимых траекториях $\{K(t), h(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, динамической системы (1), (2) при соблюдении условия

$$h(t) = h_a(t), \quad u(t) = u_a(t), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5)$$

Существуют, по крайней мере, две различные экономические трактовки условий (5), которые приводят к различным типам оптимальных траекторий (см. подробнее [2]).

I. «Задача социального планировщика» (*social planner*). Существует некоторый гипотетический «социальный планировщик», выбирающий с точки зрения всего общества в целом оптимальный путь (траекторию) экономической системы, «изначально» располагающий исчерпывающей информацией о ее развитии и спо-

собный воздействовать на все ее составные части. Поэтому можно считать, что условия (5) имеют место «изначально».

II. «Задача о конкурентном равновесии» (*competitive equilibrium*). Рассматривается ситуация, когда отдельные фирмы и домохозяйства не обладают исчерпывающей информацией об экономическом развитии системы, но ожидают, что накопление человеческого капитала и доля $u(t) \in [0, 1]$ активного времени, посвященного трудовой деятельности, будут следовать известным в каждый момент функциям $h_a(t)$ и $u_a(t)$, $\forall t \in [0, \infty)$, которые являются (с их точки зрения) экзогенно заданными и на которые каждый агент воздействовать не может. В этих условиях экономические агенты решают оптимизационную проблему выбора режима потребления. Экономическая ситуация будет находиться в равновесии, если ожидаемое поведение совпадает с реальным, т.е. если в итоге окажется, что имеют место равенства (5).

Следуя традиции, восходящей к работе [27], рассмотрим оба варианта данной оптимизационной задачи. При этом воспользуемся схемой анализа подобных задач, использованной в [2] и позволяющей «унифицировать» этот анализ, рассматривая некоторую единую по форме запись обеих задач. Такой подход позволяет нагляднее представить различия и сходные черты как в постановках обеих задач, так и в получаемых при их анализе результатах.

Общая оптимизационная задача

Сформулируем сначала необходимые условия оптимальности для обоих вариантов поставленной выше оптимизационной задачи. Для дальнейшего удобно рассмотреть сначала вторую версию этой задачи.

Задача о конкурентном равновесии. Для исследования данной задачи воспользуемся методикой, основанной на принципе максимума Л.С. Понтрягина. Выберем функцию полезности вида (4), причем ограничимся рассмотрением случая $\sigma \in \Sigma \equiv \mathbf{R}_{++} \setminus \{1\}$ (случай $\sigma = 1$ исследуется вполне аналогичным образом).

Рассмотрим функцию Гамильтона – Понтрягина:

$$H = \psi_0 e^{-\rho t} N(t) \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \\ + \psi_H \left\{ \delta [1-u(t)]^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t) \right\} + \\ + \psi_K \left\{ A(t) K(t)^\beta [u(t)h(t)N(t)]^{1-\beta} [h_a(t)u_a(t)]^\gamma - \right. \\ \left. - \mu_K K(t) - c(t)N(t) \right\}.$$

Заметим, что по своему экономическому смыслу функции $\psi_j(t)$, $j = H, K$, представляют собой цены ресурсов в момент времени $t \in [0, \infty)$ с позиций момента времени $t = 0$.

Считая теперь задачу невырожденной ($\psi_0 = 1$) и производя с помощью замены переменных $\psi_i = e^{-\rho t} \theta_i(t)$, $i = K, H$, переход к системе цен «текущего» момента, получаем «текущий» гамильтониан

$$\hat{H} = N(t) \frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \\ + \theta_H \left\{ \delta [1-u(t)]^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t) \right\} + \\ + \theta_K \left\{ A(t) K(t)^\beta [u(t)h(t)N(t)]^{1-\beta} [h_a(t)u_a(t)]^\gamma - \right. \\ \left. - \mu_K K(t) - c(t)N(t) \right\}.$$

Сопряженная система для «приведенных» цен θ_i , $i = K, H$, будет иметь вид:

$$\frac{d\theta_K(t)}{dt} = \theta_K(t) \left\{ (\rho + \mu_K) - \beta A(t) K(t)^{\beta-1} \times \right. \\ \left. \times [u(t)h(t)N(t)]^{1-\beta} [h_a(t)u_a(t)]^\gamma \right\}, \\ \frac{d\theta_H(t)}{dt} = \theta_H(t) \left\{ (\rho + \mu_h) - \right. \\ \left. - q\delta [1-u(t)]^p [1-u_a(t)]^s h(t)^{q-1} h_a(t)^r \right\} - \\ - \theta_K(t) \left\{ (1-\beta) A(t) K(t)^\beta [u(t)N(t)]^{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times h(t)^{-\beta} [h_a(t)u_a(t)]^\gamma \right\}.$$

Ограничимся рассмотрением «внутренних» решений задачи⁵. В таком случае (см. подробнее [2]) необходимые условия экстремума «текущего» гамильтониана сводятся к системе уравнений: $\hat{H}'_c = 0$, $\hat{H}'_u = 0$; эти последние соотношения удобно записать в виде:

$$c(t)^{-\sigma} = \theta_K(t), \\ \theta_K(t) (1-\beta) A(t) K(t)^\beta [h(t)N(t)]^{1-\beta} \times \\ \times u(t)^{-\beta} [h_a(t)u_a(t)]^\gamma = \\ = \theta_H(t) p \delta [1-u(t)]^{p-1} [1-u_a(t)]^s \times \\ \times h(t)^q h_a(t)^r.$$

Кроме того (см. [2]), должны выполняться условия трансверсальности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \theta_K(t) K(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \theta_H(t) h(t) = 0. \quad (6)$$

На данном этапе исследования задачи следует учесть в явном виде условия (5) (равновесие экономической ситуации). В итоге приходим к следующей совокупности уравнений:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \quad (7)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta[1-u(t)]h(t) - \mu_h h(t), \quad (8)$$

$$\frac{d\theta_K(t)}{dt} = \theta_K(t)[(\rho + \mu_K) - \beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}], \quad (9)$$

$$\frac{d\theta_H(t)}{dt} = \theta_H(t)\{(\rho + \mu_h) - q\delta[1-u(t)]\} - \theta_K(t)[(1-\beta)A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \times h(t)^{-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}], \quad (10)$$

$$c(t)^{-\sigma} = \theta_K(t), \quad (11)$$

$$\theta_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \times h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{-\beta+\gamma} = \theta_H(t)p\delta h(t). \quad (12)$$

Здесь (7), (8) – уравнения движения; (9), (10) – уравнения динамики «сопряженных» переменных; соотношения (11), (12) – условия экстремума «текущего» гамильтониана.

Задача планировщика. Из формулировки этой задачи и в силу условия (5) следует, что уравнения движения (1), (2) изначально принимают вид (7), (8). Далее, проводя построения, вполне аналогичные использованным выше, приходим к системе уравнений динамики «сопряженных» переменных («теневых цен») θ_i , $i = K, H$, и к условиям экстремума «текущего» гамильтониана, к которым добавляются условия трансверсальности (6). Как и выше, ограничиваемся рассмотрением «внутренних» решений задачи.

В результате получаем следующую совокупность уравнений:

$$\frac{d\theta_K(t)}{dt} = \theta_K(t)[(\rho + \mu_K) - \beta A(t) \times K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}], \quad (13)$$

$$\frac{d\theta_H(t)}{dt} = \theta_H(t)\{(\rho + \mu_h) - q\delta[1-u(t)]\} - \theta_K(t)[(1-\beta+\gamma)A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \times h(t)^{-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}], \quad (14)$$

$$c(t)^{-\sigma} = \theta_K(t), \quad (15)$$

$$\theta_K(t)(1-\beta+\gamma)A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \times u(t)^{-\beta+\gamma} h(t)^{1-\beta+\gamma} = \theta_H(t)\delta h(t). \quad (16)$$

Сопоставление систем уравнений (6)–(12) и (6)–(8), (13)–(16) позволяет сформулировать следующую проблему об определении оптимальных траекторий в модели ЭР.

Общая оптимизационная задача

Уравнения движения:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} \times u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \quad (17)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta[1-u(t)]h(t) - \mu_h h(t). \quad (18)$$

Сопряженные уравнения:

$$\frac{d\theta_K(t)}{dt} = \theta_K(t)[(\rho + \mu_K) - \beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}], \quad (19)$$

$$\frac{d\theta_H(t)}{dt} = \theta_H(t)\{(\rho + \mu_h) - \Delta_1\delta[1-u(t)]\} - \theta_K(t)[(1-\beta+\Delta_2)A(t)K(t)^\beta \times N(t)^{1-\beta} h(t)^{-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma}]. \quad (20)$$

Необходимые условия экстремума «текущего» гамильтониана:

$$c(t)^{-\sigma} = \theta_K(t), \quad (21)$$

$$\theta_K(t)(1-\beta+\Delta_2)A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta} \times u(t)^{-\beta+\gamma} h(t)^{1-\beta+\gamma} = \Delta_3\theta_H(t)\delta h(t). \quad (22)$$

Условия трансверсальности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \theta_K(t)K(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \theta_H(t)h(t) = 0. \quad (23)$$

Ясно, что из системы (17)–(23) при $\Delta_1 = q$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = p$ получается задача о конкурентном равновесии, а при $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \gamma$, $\Delta_3 = 1$ – задача социального планировщика.

Исследованию задачи (17)–(23) посвящена следующая часть настоящей работы.

Примечания

1. «The acquisition of such talents, by the maintenance of the acquirer during his education, study, or apprenticeship, always costs a real expence, which is a capital fixed and realized, as it were, in his person. ... The improved dexterity of a workman may be considered in the same light as a machine or the instrument of trade which facilitates and abridges labor, and which, though it costs a certain expence, repays that expence with a profit. ... A man educated at the expence of much labour and time to any of those employments which require extraordinary dexterity and skill, may be compared to an expensive machine» (Adam Smith, *The Wealth of Nations*. London: G. Routledge, 1776; New York: Modern Library, 1937, P. 265–266).

2. То есть, в первую очередь, вещная часть производственного капитала (машины, оборудование, здания, сооружения). В экономической социологии термин «физический капитал» используется в со-

вершено иным значении – он связан с состоянием здоровья, уровнем работоспособности хозяйственных агентов, а также их внешними физическими данными, которые могут использоваться для мобилизации других видов ресурсов (см., например, [22]). В рамках теории ЭР эти качества хозяйственных агентов принято относить преимущественно к человеческому капиталу.

3. Эти параметры являются, по существу, эластичностями производственной функции человеческого капитала (типа Кобба – Дугласа) $G(h, u; h_a, u_a) = \delta(1-u)^p(1-u_a)^s h^q h_a^r$ по соответствующим переменным.

4. Функция полезности называется *CRRRA* – функцией полезности (*Constant Relative Risk Aversion*), если она характеризуется постоянной мерой относительной несклонности к риску в смысле К. Эрроу – Дж. Пратта (К.А. Эрроу – Дж. Пратт) $R_R(c) = \sigma$, где, по определению, $R_R(c) \equiv -cU''[c]\{U'[c]\}^{-1}$. Заметим также, что эта величина является важной характеристикой межвременного поведения потребителя, а именно – σ^{-1} есть эластичность замещения потребления между последовательными моментами времени (см. подробнее [2]).

5. Под «внутренним» решением оптимизационной задачи понимается такое решение, которое отвечает управляющим параметрам $c(t) \in \mathbf{R}_{++}$ и $u(t) \in (0, 1)$, $\forall t \in [0, \infty)$.

Список литературы

- Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2nd Edition. – Cambridge, Massachusetts. London, England: MIT Press, 2004. 654 p.
- Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. 449 с.
- Шараев Ю.В. Теория экономического роста. – М.: Издательство ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.
- Spengler J.J. Adam Smith on Human Capital // American Economic Review. 1977. V. 67. № 1. P. 32–36.
- Fisher I., Senses of “Capital” // Economic Journal. 1897. V. 7. № 26. P. 199–213.
- Walsh J.R. Capital Concept Applied to Man // Quarterly Journal of Economics. 1935. V. 49. № 2. P. 255–285.
- von Hayek F.A., Economics and Knowledge // *Economica*. 1937. V. 4. № 13. P. 33–54.
- Mincer J. Investment in Human Capital and Personal Income Distribution // Journal of Political Economy. 1958. V. 66. № 4. P. 281–302.
- Mincer J. On-the-job Training: Costs, Returns and Some Implications // Journal of Political Economy. 1962. V. 70. № 5. P. 50–79.
- Becker G.S. Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis // Journal of Political Economy. 1962. V. 70. № 5. Pt. 2. P. 9–49.
- Becker G. Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education. New York: Columbia University Press, 1964.
- Schultz T.W. Capital Formation by Education // Journal of Political Economy. 1960. V. 68. № 6. P. 571–583.
- Schultz T.W. Investments in Human Capital // American Economic Review. 1961. V. 51, № 1. P. 1–17.
- Kiker B.F. The Historical Roots of the Concept of Human Capital // Journal of Political Economy. 1966. V. 74. № 5. P. 481–499.
- Blaug M. The Empirical Status of Human Capital Theory: A Slightly Jaundiced Survey // Journal of Economic Literature. 1976. V. 14. № 3. P. 827–855.
- Laroche M., Mérette M., Ruggeri G.C. On the Concept and Dimensions of Human Capital in a Knowledge-Based Economy Context // Canadian public policy – Analyse de politiques. 1999. V. 25. № 1. P. 87–100.
- Lin, Brian C.-A. A Sustainable Perspective on the Knowledge Economy: A Critique of Austrian and Mainstream Views // Ecological Economics. 2006. V. 60. № 1. P. 324–332.
- Nafukho F.M., Hairston N., Brooks K. Human Capital Theory: Implications for Human Resource Development // Human Resource Development International. 2004. V. 7, № 4. P. 545–551.
- Соболева И.В. Парадоксы измерения человеческого капитала. Научный доклад. М.: Институт экономики РАН, 2009. 50 с.
- Bourdieu P., *Ökonomisches Kapital, kulturelles Kapital, soziales Kapital* // In: Kreckel, Reinhard (ed.) *Soziale Ungleichheiten (Soziale Welt, Sonderheft 2)*. – Göttingen: Otto Schwartz & Co., 1983. S. 183 – 198.
- Бурдые П. Формы капитала // Экономическая социология (электронный журнал). 2002. Т. 3, № 5. С. 60–74. www.ecsoc.msses.ru
- Радаев В.В. Понятие капитала, формы капиталов и их конвертация // Экономическая социология (электронный журнал). 2002. Т. 3, № 4. С. 20–32. www.ecsoc.msses.ru
- Макаров В.Л., Клейнер Г.Б. Микроэкономика знаний. М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2007. 204 с.
- Machlup F. The Production and Distribution of Knowledge in the United States. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1962 (Русский перевод: Махлуп Ф. Производство и распространение знаний в США. М.: Издательство «Прогресс», 1966. 462 с.).
- Макаров В.Л. Экономика знаний: уроки для России // Вестник Российской академии наук. 2003. Том 73. № 5. С. 450–456.
- Макаров В.Л. Становление экономики знаний в России и мире // В кн.: Экономика знаний: Коллективная монография / Отв. ред. д-р. экон. наук, проф. В.П. Колесов. М.: ИНФРА-М, 2008. 432 с.
- Lucas R.E., Jr. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. 1988. V. 22. № 1. P. 3–42.

28. Uzawa H. Optimal Technical Change in an Aggregate Model of Economic Growth // *Intern. Econ. Rev.* 1965. V. 6. № 1. P. 18–31.
29. Arrow K.J. The Economic Implications of Learning by Doing // *Review of Economic Studies*. 1962. V. 29. № 1. P. 155–173.
30. Caballe J., Santos V.S. On Endogenous Growth with Physical Capital and Human Capital // *Journal of Political Economy*. 1993. V. 101. № 6. P. 1042–1067.
31. Mulligan, C.B., Sala-i-Martin, X. Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth // *Quarterly Journal of Economics*. 1993. V. 108. № 3. P. 739–773.
32. Bond E.W., Wang P., Yip C.K. A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics // *Journal of Economic Theory*. 1996. V. 68. № 1. P. 149–173.
33. Benhabib J., Perli R. Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth // *Journal of Economic Theory*. 1994. V. 63. № 1. P. 113–142.
34. Xie D., Divergence in Economic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equilibria // *Journal of Economic Theory*. 1994. V. 63, № 1. P. 97–112.
35. Jones C.I., Time Series Tests of Endogenous Growth Models // *Quarterly Journal of Economics*. 1995. V. 110. № 2. P. 495–525.
36. Ladrón-de-Guevara A., Ortigueira S., Santos M.S. Equilibrium Dynamics in Two Sector Models of Endogenous Growth // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1997. V. 21. № 2. P. 115–143.
37. Klenow P.J. Ideas Versus Rival Human Capital: Industry Evidence on Growth Models // *Journal of Monetary Economics*. 1998. V. 42. № 3. P. 3–23.
38. Alonso-Carrera J. More on the Dynamics in the Endogenous Model with Human Capital // *Investigaciones Economicas*. 2001. V. 25. № 3. P. 561–583.
39. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas Model without Scale Effects: Theory and Empirical Evidence // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2004. V. 15. № 4. P. 401–420.
40. Gromez M.A. Optimality of the Competitive Equilibrium in the Uzawa – Lucas Model with Sector-Specific Externalities // *Economic Theory*. 2004. V. 23, № 8. P. 941–948.
41. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Об одной математической модели динамики экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // В кн.: *Модели, методы и программные средства. Труды итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (27–30 ноября 2007 г., Н. Новгород, ННГУ)*. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. С. 245–248.
42. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Модель экономического роста с учетом «внешнего эффекта» человеческого капитала // В кн.: *Государственное регулирование экономики. Региональный аспект: Материалы VI Международной научно-практической конференции*. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2009.

GENERALIZED MODEL OF ECONOMIC GROWTH WITH HUMAN CAPITAL ACCUMULATION. I

Yu.A. Kuznetsov, O.V. Michasova

A brief survey is given of the research of mathematical models of economic growth theory which take into consideration the processes of physical and human capital accumulation. A general mathematical model of economic growth is built which generalizes similar models including Lucas's classical one. For this model two traditional optimization problem statements (problems of a social planner and a competitive equilibrium) have been described. A general problem embracing main problem statements on optimal economic development has been formulated.

Keywords: economic growth, physical capital, human capital, optimal economic development.