УДК 330.101 (030)

О ВЕРОЯТНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧАХ МИКРОЭКОНОМИКИ

А.Г. Иванов [1], ***В.А. Кукушкин*** [2]

[1] Чувашский госуниверситет им. И.Н. Ульянова
[2] Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета в г. Чебоксары

animax@chuvsu.ru

Поступила в редакцию 30.01.2009

Предложены идеи вероятностно-динамического метода исследования микроэкономических систем. Рассмотрены основные понятия и принципы. Определен круг задач микроэкономики, решаемых с помощью данного метода, и обсуждены вопросы связи его с динамическими методами оптимизационного исчисления.

Ключевые слова: вероятностно-динамический метод; функция экономического состояния; полные наборы основных факторов состояния; вероятностный принцип; соотношение неопределенностей; критерий оптимальности; оператор собственности; величина собственности; квант предпринимательской способности.

Введение

В настоящее время в экономике активно применяются математические методы [1]. Использование математических средств исследования способствует установлению количественных соотношений между наблюдаемыми величинами, приводя к пониманию природы экономических законов и механизмов их проявления.

Тем не менее методологическая роль математики в современной экономической науке ограничена, поскольку постановка экономико-математических задач, базирующаяся главным образом на эмпирическом материале, недостаточно «подготовлена» для последовательного применения мощного математического аппарата. В этих условиях широкое распространение получили методы математического моделирования, являющиеся примером известного приема математизации как разновидности формализации знаний эмпирической науки.

Опыт применения математических методов в физических науках, особенно в теоретической физике, позволяет утверждать, что методологическая функция математики в достаточной мере может быть реализована в отношении тех наук, базовые положения, принципы которых представлены в форме, позволяющей средствам математики развить эти принципы до постановки и решения конкретных задач. На справедливость этого утверждения указывают колоссальные достижения современной теоретической физики и ее многочисленных технических приложений.

В данной работе сделана попытка применения идей вероятностно-динамического метода для построения логически замкнутого комплекса знаний о поведении микроэкономических систем, названного нами математической микроэкономикой. Впервые идеи вероятностно-динамического метода были сформулированы в физических науках при создании квантовой механики [2]. Нами дана математическая формулировка основных понятий и принципов метода, определена область его применения. Приведено сравнение предложенного метода с известными методами оптимизации в экономических науках [1].

Предварительные результаты работы опубликованы в монографии одного из авторов [3]. В работе [4] определено значение идей вероятностно-динамического подхода в ряду методов описания производственно-экономических систем.

Основные понятия и принципы

Предметом математической микроэкономики является экономическая система, деятельность которой связана с процессами производства, обмена, распределения и потребления материальных продуктов. Активными структурообразующими элементами микроэкономической системы выступают хозяйствующие субъекты, представленные индивидуумами, семьями, фирмами.

Важнейшим понятием теории выступает понятие экономического состояния как формы существования системы в данный момент времени (см. рис.). Средства, обеспечивающие формирование экономического состояния, называются факторами состояния. В зависимости от вида экономической деятельности в микроэкономической системе выделяется ряд классов (α) факторов, каждый из которых делится на подклассы (α_k). Временная последовательность состояний или эволюция системы называется экономическим процессом.

К основным факторам экономического состояния относятся материальный и денежный факторы, а также фактор предпринимательской способности субъекта, то есть такой набор качеств субъекта, который позволяет ему находить наилучшее сочетание материальных и денежных средств для осуществления эффективной экономической деятельности. Математическое описание основных факторов широко использует понятие векторных пространств. Так, материальному фактору субъекта поставим в соответствие элементы векторного пространства *B*:

$$\vec{b} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots \vec{b}_N\}, \qquad (1)$$

являющегося прямым произведением пространств $B^{(\alpha)}$ классов α $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ с элементами

$$\vec{b}_\alpha = (b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \ldots, b_{\alpha_n}),$$

где $b_{\alpha_k} = b'_{\alpha_k} - b_{0\alpha_k}$; b'_{α_k} – действительные неотрицательные числа, равные количеству материальных средств (числу единиц измерения этих средств), входящих в состав подкласса α_k класса α; $b_{0\alpha_k}$ – некоторое характерное значение величины b'_{α_k}. Размерность пространства $B^{(\alpha)}$ равна числу подклассов n в классе α.

Аналогично, введем векторное пространство X денежного фактора (бюджета) субъекта с элементами

$$\vec{x} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N\}, \qquad (2)$$

где $\vec{x}_\alpha = (x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$, $\alpha = 1, 2, \ldots N$, – векторы пространства $X^{(\alpha)}$ денежного фактора, соответствующие классу α; $x_{\alpha_k} = x'_{\alpha_k} - x_{0\alpha_k}$; неотрицательная величина x'_{α_k} равна количеству денежных средств, предназначенных для приобретения и использования материального средства b'_{α_k}, и имеет размерность, выражаемую в денежных единицах; $x_{0\alpha_k}$ – некоторое характерное значение величины x'_{α_k}. Векторное пространство X денежного фактора (бюджета) системы равно прямому произведению пространств $X^{(\alpha)}$ всех классов этой системы.

Двумерный вектор $\vec{s}_{\alpha_k} = (b_{\alpha_k}, x_{\alpha_k})$ называется элементарным решением, а его координаты – сопряженными факторами подкласса α_k. Векторное пространство с элементами $\vec{s}_{\alpha_k}$ будем называть фазовой плоскостью S_{α_k}, или плоскостью элементарных решений. Прямое произведение плоскостей S_{α_k} образует фазовое пространство S всей системы, элемент которого называется вектором полного решения $\vec{s}$, или решением субъекта.

В рамках вероятностно-динамического метода фактор предпринимательской способности описывается вектором

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_r) \qquad (3)$$

с целочисленными неотрицательными координатами n_l, соответствующими числу квантов предпринимательской способности, экономический смысл которых будет установлен позднее.

В основании вероятностно-динамического метода лежат два базовых положения (принципа): вероятностный принцип и принцип оптимальности.

Прежде чем формулировать вероятностный принцип, введем функцию экономического состояния $|\Psi, t\rangle$ – абстрактный вектор сепарабельного гильбертова пространства с единичной нормой – и полный набор операторов [5] основных факторов состояния. Экономический смысл имеют представления основных факторов, то есть векторы гильбертова пространства, ортонормированный базис которого образован собственными функциями полного набора операторов соответствующего фактора. Элементами полных наборов факторов выступают координаты векторных операторов:

$$\hat{\vec{b}} = \{\hat{\vec{b}}_1, \hat{\vec{b}}_2, \ldots \hat{\vec{b}}_N\} \equiv \{\hat{b}_{\alpha_k}\},$$

$$\hat{\vec{x}} = \{\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \ldots \hat{\vec{x}}_N\} \equiv \{\hat{x}_{\alpha_k}\},$$

$$\hat{\vec{n}} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots, \hat{n}_r) \equiv \{\hat{n}_l\}.$$

Различают материальное $\langle \vec{b} | \Psi, t\rangle \equiv \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_N | \Psi, t\rangle$, денежное $\langle \vec{x} | \Psi, t\rangle \equiv \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N | \Psi, t\rangle$ и представление предпринимательской способности $\langle \vec{n} | \Psi, t\rangle \equiv \langle n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots, n_r | \Psi, t\rangle$.

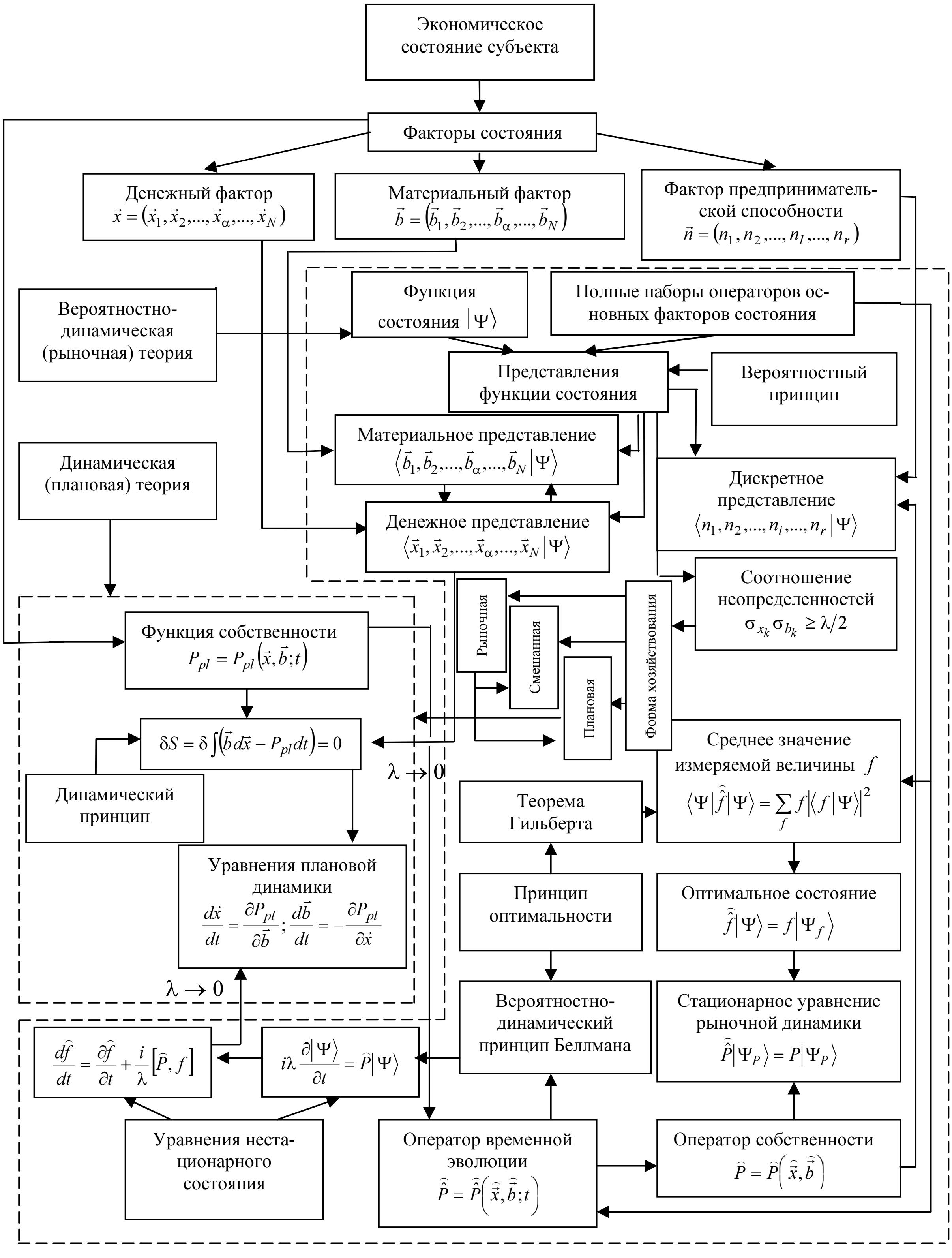

Рис. Схема вероятностно-динамического метода

Основные представления функции состояния связаны между собой унитарными Фурье-преобразованиями типа

$$\langle \vec{x} | \Psi, t \rangle = \sum_{\vec{b}} \langle \vec{x} | \vec{b} \rangle \langle \vec{b} | \Psi, t \rangle = \sum_{\vec{n}} \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle \langle \vec{n} | \Psi, t \rangle, \quad (4)$$

где разложение ведется по полной системе собственных функций $\langle \vec{x} | \vec{b} \rangle$ и $\langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ операторов $\hat{\vec{b}}$ и $\hat{\vec{n}}$ в денежном представлении, причем в этом представлении

$$\hat{b}_{\alpha_k} = -i\lambda \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}; \; \hat{x}_{\alpha_k} = x_{\alpha_k}. \qquad (5)$$

Область определения и область значений представления функции состояния находятся из решения краевой задачи вероятностно-динамического метода (см. ниже), соответственно, как спектр возможных значений и область определения оператора краевой задачи, записанного в данном представлении.

Экономические состояния, которые могут быть описаны с помощью представлений функции состояния, называются полностью описанными или чистыми состояниями.

Подчеркнем, что выбор сопряженных факторов (материального и денежного) и фактора предпринимательской способности в качестве основных факторов экономического состояния относится только к полностью описанным состояниям. При этом предполагается, что оператор любой другой экономической величины $\hat{f}$ коммутирует с операторами лишь одного из указанных выше полных наборов и, следовательно, является функциями от них. Важную роль в микроэкономике играют операторные функции $V\left(\hat{\vec{x}}\right)$, описывающие условия использования денежного фактора в хозяйственной деятельности субъекта. К ним относятся, например, функция бюджетного ограничения (бюджетная функция) в теории потребительского поведения и технологическая функция в теории производственно-экономических систем [3].

Особая роль при описании условий экономической деятельности принадлежит рынку как механизму взаимодействия субъектов в ходе товарно-денежного обмена. Как известно [6], в микроэкономике может быть последовательно изучена роль лишь идеального (совершенного) рынка, для описания которого в рамках вероятностно-динамического метода нами будет использоваться предположение об однородном статистическом распределении квантов предпринимательской способности в пространствах сопряженных факторов. Вывод такого распределения выходит за рамки вероятностно-динамического метода и требует рассмотрения смеси полностью описанных состояний со статистическим оператором $\hat{\rho}$.

Согласно вероятностному принципу, координаты векторов основных факторов (1), (2), (3) представляют собой случайные величины, распределения которых в пространствах этих факторов определяются квадратами модулей соответствующих представлений функции состояния. При этом допустимые значения случайных координат $b_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}$ и n_l образуют спектры собственных значений не коммутирующих друг с другом операторов $\hat{b}_{\alpha_k}$, $\hat{x}_{\alpha_k}$ и $\hat{n}_l$ основных факторов.

Так, интеграл $\int\limits_{\Delta X} d\vec{x} \left|\left\langle \vec{x} \,|\, \Psi, t \right\rangle\right|^2$ определяет вероятность $P_\Psi\left(\vec{x} \in \Delta X\right)$ того, что экономическое состояние $\left|\Psi, t\right\rangle$ сформировано благодаря использованию бюджетных векторов $\vec{x}$, принадлежащих области $\Delta X \subset X$. Записывая подынтегральную функцию с помощью первого равенства формулы (4), получим

$$\int\limits_{\Delta X} d\vec{x} \left|\left\langle \vec{x} \,|\, \Psi, t \right\rangle\right|^2 =$$
$$= \sum_{\vec{b}} \left|\left\langle \vec{b} \,|\, \Psi, t \right\rangle\right|^2 \int\limits_{\Delta X} \left|\left\langle \vec{x} \,|\, \vec{b} \right\rangle\right| d\vec{x} +$$
$$+ \sum_{\vec{b}} \sum_{\vec{b}'(\neq \vec{b})} \left\langle \Psi, t \,|\, \vec{b}' \right\rangle \left\langle \vec{b} \,|\, \Psi, t \right\rangle \int\limits_{\Delta X} d\vec{x} \left\langle \vec{b}' \,|\, \vec{x} \right\rangle \left\langle \vec{x} \,|\, \vec{b} \right\rangle. \qquad (6)$$

Поскольку произведение комплексных функций в двойной сумме (6) содержит фазовые множители, зависящие от случайных векторов $\vec{b}$ и $\vec{b}'$ и, следовательно, не коррелированные между собой, то второе слагаемое в (6) обращается в нуль. В рамках данного приближения, называемого приближением случайных фаз (RPA, см. [7]), выражение (6) принимает вид формулы полной вероятности

$$P_\Psi\left(\vec{x} \in \Delta X\right) = \int\limits_{\Delta X} d\vec{x} \left|\left\langle \vec{x} \,|\, \Psi, t \right\rangle\right|^2 =$$
$$= \sum_{\vec{b}} P_\Psi\left(\vec{b}\right) P_{\vec{b}}\left(\vec{x} \in \Delta X\right), \qquad (7)$$

разложенной по произведениям вероятностей гипотез $P_\Psi\left(\vec{b}\right) = \left|\left\langle \vec{b} \,|\, \Psi, t \right\rangle\right|^2$ того, что субъект, находящийся в состоянии $\left|\Psi, t\right\rangle$, обладает полным набором материальных средств $\vec{b}$, на условные вероятности $P_{\vec{b}}\left(\vec{x} \in \Delta X\right) = \int\limits_{\Delta X} \left|\left\langle \vec{x} \,|\, \vec{b} \right\rangle\right| d\vec{x}$ того, что набор $\vec{b}$ приобретен или использован с помощью денежных средств $\vec{x} \in \Delta X$.

Отметим, что формула полной вероятности (7), являющаяся следствием разложения (4), выступает в качестве экономического обоснования требования полноты набора основных факторов, являющегося одним из базовых положений предлагаемого метода.

Непосредственным следствием вероятностного принципа является принцип неопределенностей, заключающийся в невозможности одновременного измерения собственных значений операторов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ с отличным от нуля коммутатором:

$[\hat{f},\hat{g}]\neq 0$. Действительно, поскольку операторы $\hat{f}$ и $\hat{g}$ принадлежат различным полным наборам, порождаемые ими представления $\langle f|\Psi,t\rangle$ и $\langle g|\Psi,t\rangle$ связаны между собой соотношением $\langle f|\Psi,t\rangle=\sum_g\langle f|g\rangle\langle g|\Psi,t\rangle$ (ср. с (4)). Поэтому если в состоянии $|\Psi,t\rangle$ величина f имеет определенное значение, то величина g не определена, поскольку возможные значения g распределены в этом состоянии по всему спектру оператора $\hat{g}$ с вероятностями $|\langle g|\Psi,t\rangle|^2$.

Принцип неопределенностей формулируется в виде соотношения неопределенностей для средних квадратичных отклонений законов распределений σ_f и σ_g [3]. В частности, для компонент элементарного решения b_{α_k} и x_{α_k} это соотношение имеет вид

$$\sigma_{x_{\alpha_k}}\sigma_{b_{\alpha_k}}\geq\frac{\lambda}{2}, \tag{8}$$

где λ – так называемый рыночный параметр. (Об оценке величины рыночного параметра см. [3], § 9).

Соотношение неопределенностей (8) описывает область разброса (неопределенностей) компонент элементарного решения, формирующего экономическое состояние. С увеличением размера этой области (т.е. увеличением значения параметра λ) увеличивается свобода выбора субъектом полного решения в фазовом пространстве системы и, следовательно, возрастает роль предпринимательской способности, обусловливающей такой выбор. Способы достижения целей экономической деятельности, определяемые, главным образом, свободой проявления предпринимательской способности субъекта (возможной в рамках определенной формы собственности; см. ниже), составляют понятие механизма хозяйственной деятельности. В зависимости от значения рыночного параметра различают рыночный, смешанный и плановый механизмы хозяйствования.

Рыночный механизм хозяйствования соответствует максимально возможному размеру области неопределенностей сопряженных факторов системы и характеризуется максимальной свободой проявления предпринимательской способности субъекта, возможной только в условиях частной собственности. Рыночное состояние субъекта полностью описывается основными представлениями функции состояния $|\Psi,t\rangle$, а взаимодействие между субъектами в ходе товарно-денежного обмена рассматривается в рамках упомянутого выше идеального рынка ([3], глава XII).

По мере уменьшения рыночного параметра предпринимательская способность становится не единственным фактором, определяющим выбор решения субъекта. Роль генератора таких решений в определенной мере передается государственным плановым органам. Соответствующий (смешанный) механизм хозяйствования определяется товарно-денежными отношениями в обществе, обусловленными неоднородным статистическим распределением частной и государственной форм собственности в фазовом пространстве системы. Вид этого распределения не может быть получен в рамках вероятностно-динамического метода, и для решения этой задачи должны быть привлечены принципы новой, статистической макроэкономической теории.

И, наконец, в предельном случае при стремлении рыночного параметра к нулю область неопределенностей сопряженных факторов вырождается в фазовую точку – вектор полного решения $\vec{s}$, который определяет плановое (динамическое) состояние субъекта в каждый момент времени t. Необходимо отметить, что координаты фазовой точки в любой момент времени соответствуют средним значениям рыночных распределений сопряженных факторов.

При плановом (динамическом) механизме хозяйствования вся собственность субъекта принимает форму обобществленной (государственной) собственности. Понятие фактора предпринимательской способности вырождается в понятие исполнительности, а хозяйствующий субъект (в его рыночном понимании) становится исполнителем плановых директив государства.

Второй принцип математической микроэкономики – принцип оптимальности (принцип измерения) – состоит в утверждении, что описание экономического состояния возможно только на основании результатов взаимодействия носителя этого состояния – экономического субъекта – с «измерительным прибором». В качестве «измерительного прибора» следует рассматривать экономическую систему, находящуюся в предельно плановом (динамическом) состоянии, поскольку только в этом случае реакцией «прибора» на измерительный процесс (так называемый процесс *f*-измерения) может стать регистрация им возможного значения измеряемой величины в каждый момент времени.

Следует выделять три стадии процесса измерения [2, 3]. На первой стадии первоначальное состояние $|\Psi\rangle$ субъекта меняется и переходит в новое, смешанное состояние, которое уже не будет полностью описанным, поскольку содержит информацию о состоянии «прибора», взаимодействующего с субъектом.

В течение второй стадии, согласно принципу измерения, на первый план выдвигается предельно «плановый» характер функционирования «прибора», в результате чего смешанное состояние системы редуцируется во вполне определенное чистое, так называемое исследуемое состояние $\hat{f}|\Psi\rangle$, «специальным образом подготовленное "прибором"» для решения задачи измерения. В процессе такой «подготовки» в исследуемой системе формируется набор собственных состояний $|f_k\rangle$ процедуры измерения (описываемый полной ортонормированной системой функций), в каждом из которых «прибор» с максимальной вероятностью регистрирует собственные значения f_k, принадлежащее спектру величины f. Это позволяет представить оператор $\hat{f}$ измеряемой величины и функцию исследуемого состояния $\hat{f}|\Psi\rangle$ в виде разложения по этому спектру [5]:

$$\hat{f} = \sum_k f_k |f_k\rangle\langle f_k| ; \quad (9)$$

$$\hat{f}|\Psi\rangle = \sum_k f_k |f_k\rangle\langle f_k|\Psi\rangle . \quad (10)$$

Другими словами, на втором этапе процесс f-измерения генерирует пространство представлений функции состояния $|\Psi\rangle$, соответствующее самосопряженному оператору $\hat{f}$: полный набор собственных функций $|f_k\rangle$ этого оператора образует базис пространства представлений, а собственные значения составляют спектр возможных значений измеряемой величины f.

Формула (9) раскрывает смысл оператора $\hat{f}$ как возмущения, играющего роль анализатора спектра f в ходе взаимодействия системы с «прибором» и обусловливающего тем самым вероятностно-динамический характер эволюции системы, соответствующий полному описанию его состояния. При этом разложение (10) решает основную задачу процесса f-измерения – нахождение закона распределения $|\langle f_k|\Psi\rangle|^2$ и среднего значения $\bar{f} = \langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle = \sum_k f_k |\langle f_k|\Psi\rangle|^2$ случайной величины f, представленной собственными значениями f_k оператора $\hat{f}$ в исходном состоянии $|\Psi\rangle$.

На заключительной, третьей стадии процесса измерения субъект реагирует на эффект регистрации собственного значения экономической величины спонтанным переходом в некоторое новое, конечное, состояние, причем такой переход не может быть описан в рамках вероятностно-динамической теории.

Подчеркнем, что процесс f-измерения, формируя исследуемое состояние $\hat{f}|\Psi\rangle$, «улучшает» исходное состояние $|\Psi\rangle$, «подготавливая» его к решению основной задачи измерения. Поэтому оптимальными (с точки зрения постановки этих задач) будем называть такие состояния $|\Psi\rangle$, которые обеспечивают экстремум среднего значения $\bar{f} = \langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle$ величины f при заданном условии нормировки функции $|\Psi\rangle$. Необходимые и достаточные условия существования таких состояний (критерий оптимальности) могут быть сформулированы с помощью известной теоремы Гильберта [5].

Критерий оптимальности гласит, что если процесс f-измерения состояния $|\Psi\rangle$ сопровождается регистрацией собственных значений f_k оператора $\hat{f}$ с законом распределения $|\langle f_k|\Psi\rangle|^2$, то математическое ожидание этого распределения $\langle\Psi|\hat{f}|\Psi\rangle$ при условии нормировки функции состояния $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ достигает экстремального значения в том и только том случае, если состояние $|\Psi\rangle$ совпадает с одним из собственных состояний $|f\rangle$ оператора $\hat{f}$.

Для пояснения экономического смысла критерия оптимальности положим, что при формировании исходного состояния $|\Psi\rangle$ система использовала денежные средства $\vec{x}$, принадлежащие некоторой области X' пространства X, что описывается условием нормировки функции $|\Psi\rangle$:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int_{X'} \langle\Psi|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\Psi\rangle d\vec{x} = 1 . \quad (11)$$

Если состояние $|\Psi\rangle$ не совпадает ни с одним из собственных состояний $|f_k\rangle$, то в ходе процесса f-измерения система переходит в новое состояние (10), характеризуемое средним значением

$$\bar{f} = \sum_k f_k |\langle f_k|\Psi\rangle|^2 = \int_{X'} d\vec{x} \langle\Psi|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\hat{f}|\Psi\rangle . \quad (12)$$

Для обеспечения устойчивости возникшего возбужденного состояния в системе будут протекать «восстановительные» процессы, направленные на снижение действия возмущения. Обеспечение этих процессов происходит за счет денежных средств $\vec{x} \in X' \subset X$, что приводит к нерациональному изменению величины (12), ухудшающему основные показатели деятельности системы. Такие состояния $|\Psi\rangle$ принято называть неоптимальными (по Парето).

Напротив, если исходное состояние $|\Psi\rangle$ равно одному из собственных состояний $|f_k\rangle$, то есть имеет место уравнение

$$\hat{f}|\Psi\rangle = f_k |f_k\rangle, \qquad (13)$$

то необходимость в «восстановительных» процессах в системе отсутствует. В этом случае все денежные средства, определяемые из условия (11), используются для достижения наилучшего (экстремального) значения величины (12), реализуемого в условиях оптимального состояния $|\Psi\rangle$.

Конкретный вид критерия оптимальности определяется постановкой краевой задачи для уравнения (13) (см. [3]). Важнейший пример такой задачи, описывающей стационарную экономическую деятельность субъекта, рассмотрен в следующем разделе данной работы.

Процесс *f*-измерения может быть применен также к описанию временной эволюции экономического состояния $|\Psi,t\rangle$. Предметом нашего исследования является вероятностно-динамическая эволюция, обусловленная полностью описанными внешними условиями экономической деятельности субъекта. Поэтому нас не будут интересовать спонтанные переходы системы в конечное состояние на третьем этапе процесса измерения, ибо такие переходы связаны исключительно с неопределенностью реакции системы на возмущение, вызванное измерением. Отсюда следует, что вероятностно-динамическая эволюция системы в течение конечного интервала времени не может быть описана как результат измерения состояния этой системы в некоторый начальный момент времени. Условие полноты описания позволяет лишь утверждать, что акт измерения хода эволюции системы, который генерирует самосопряженный оператор $\hat{P}$ – оператор эволюции, устанавливает соответствие между состоянием системы в данный момент времени и изменением этого состояния в тот же момент времени:

$$i\lambda \frac{\partial}{\partial t}|\Psi,t\rangle = \hat{P}(t)|\Psi,t\rangle, \qquad (14)$$

где λ – рыночный параметр. Уравнение (14) называется нестационарным уравнением рыночной динамики системы. Заметим, что при условиях, накладываемых на вид оператора $\hat{P}(t)$ (см. ниже), задача Коши для уравнения (14), как многомерного уравнения типа Шредингера, равномерно корректна [8] и определяет функцию $\langle\vec{x}|\Psi,t\rangle$, финитную в пространстве X.

Как известно [8], уравнение (14) генерирует группу унитарных преобразований временного сдвига: $|\Psi,t\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi,t_0\rangle$, причем оператор $\hat{P}$ является генератором этой группы. Поэтому для бесконечно малого сдвига $\left(\hat{U}(t+dt,t) = \hat{I} - \frac{i}{\lambda}\hat{P}dt\right)$ имеем $|\Psi,t+dt\rangle = |\Psi,\mathrm{t}\rangle - \frac{i}{\lambda}\hat{P}(t)|\Psi,t\rangle dt$. Таким образом, благодаря оптимизирующим свойствам процесса измерения, действие оператора $\hat{P}$ на функцию $|\Psi,t\rangle$ приводит к ее изменению, «улучшающему» значение этой функции в течение бесконечно малого интервала времени dt.

Отсюда следует, что если в начальный момент t_0 система находилась в состоянии $|\Psi,t_0\rangle$, то состояние $|\Psi,t\rangle$, определяемое решением уравнения (7) в любой момент времени t, является оптимальным относительно всех предшествующих состояний, в частности, тех, которые получены в результате первого решения (т.е. задания производной $\frac{\partial|\Psi,t\rangle}{\partial t}$ в момент времени t_0). Приведенное утверждение выражает свойство оптимальности вероятностно-динамической эволюции и находится в соответствии с принципом оптимальности Беллмана, известным в теории динамического программирования [1].

Оператор собственности.
Основные уравнения метода

В том случае если внешние условия, сопутствующие процессу *f*-измерения, стационарны, от времени не зависит и оператор эволюции: $\hat{P}(t) \equiv \hat{P}$. Можно показать (см. [3]), что в этом случае уравнение (14) определяет стационарное состояние $|\Psi_P,t\rangle$, для которого распределения основных факторов от времени не зависят:

$\left\|\Psi,t\rangle\right|^2=\left\|\Psi_P\rangle\right|^2$. Такие состояния являются собственными для оператора $\hat{P}$:

$$\hat{P}\left|\Psi_P,t\right\rangle=P\left|\Psi_P,t\right\rangle \quad (15)$$

и, следовательно, оптимальными в указанном выше смысле. Уравнение (15) называется стационарным уравнением рыночной динамики.

Собственные значения P оператора $\hat{P}$, являясь характеристиками стационарного состояния, содержат информацию о способах наилучшего использования денежного и материального факторов в хозяйственной деятельности с целью сохранения созданного экономического состояния (при стационарных внешних условиях) в течение достаточно большого интервала времени, обеспечивая, тем самым, устойчивость (по Ляпунову) этого состояния как решения (15) относительно малых возмущений.

Нетрудно видеть, что приведенное здесь описание величины P выражает сущность важнейшего понятия экономической науки – понятия собственности. Действительно, определяемая этим понятием «принадлежность вещей, материальных и духовных ценностей определенным субъектам, закрепленная юридическим правом» [9], выступает лишь как условие, обеспечивающее субъекту эффективность его хозяйственной деятельности, рациональное использование ресурсов, высокую рентабельность и прочее. Поэтому в дальнейшем оператор $\hat{P}$ будем называть оператором собственности, а собственные значения P этого оператора – величиной собственности. Размерность величины собственности, соответствующая размерности оператора $\hat{P}$, согласно (15), равна $[P]=\$/c$, где \$ и c – единицы измерения денежных средств и времени, соответственно.

В соответствии с принципом неопределенности, оператор собственности может быть представлен в виде аддитивной функции операторов денежного и материального факторов [3], которая в денежном представлении ($\vec{x}$-представление (5)) имеет вид:

$$\hat{P}=W\left(\hat{\vec{b}}\right)+V\left(\hat{\vec{x}}\right)\equiv\frac{\beta}{2}\hat{\vec{b}}^2+V\left(\hat{\vec{x}}\right)=$$

$$=-\frac{\lambda^2\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}^2}+V(\vec{x}), \quad (16)$$

где β – некоторый скалярный коэффициент; $V\left(\hat{\vec{x}}\right)$ – денежная составляющая оператора $\hat{P}$, описывающая стационарные условия использования денежного фактора в экономической деятельности. Выражение для материальной составляющей собственности $W\left(\hat{\vec{b}}\right)=\frac{\beta}{2}\hat{\vec{b}}^2$ вытекает из требования, что в условиях свободной деятельности субъекта, на которую не наложены внешние условия $\left(V\left(\hat{\vec{x}}\right)\equiv 0\right)$, скалярный оператор $\hat{P}$ должен быть пропорционален инварианту пространства операторов $\hat{\vec{b}}$ – квадрату нормы $\hat{\vec{b}}^2$. В нестационарных условиях функция $V\left(\hat{\vec{x}},t\right)$ определяет оператор временной эволюции системы:

$$\hat{P}(t)=\frac{\beta\hat{\vec{b}}^2}{2}+V\left(\hat{\vec{x}},t\right)=-\frac{\lambda^2\beta}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}^2}+V\left(\vec{x},t\right). \quad (17)$$

Как отмечалось выше, хозяйственная деятельность субъекта реализуется в условиях различных форм собственности, в связи с чем следует различать величины индивидуальной и обобщенной собственности. Под индивидуальной (частной) собственностью будем понимать величину P, представленную собственными значениями оператора (16). В силу естественной ограниченности денежных и материальных средств спектр оператора собственности является дискретным. Действительно, денежная составляющая этого оператора $V(\vec{x})$ в общем случае может быть представлена в виде n-мерной «чаши», ограничивающей выбор денежных средств в пространстве X и удовлетворяющей условиям $V\left(\vec{x}=0\right)=0$; $\lim\limits_{|\vec{x}|\to\infty}V\left(\vec{x}\right)=V_0$. Здесь величина V_0 характеризует предельное значение величины собственности, которой может обладать субъект в условиях данной экономической деятельности. Так как решение уравнения (15) при $P>V\left(\vec{x}\right)$ для такой «чаши» имеет характер осцилляций [8], то дискретный спектр $\hat{P}$ вытекает из условий согласования фаз этих осцилляций на границах «чаши», приводящих к формированию стоячих волн плотности вероятности $\left|\langle\vec{x}\,|\,\Psi_P\rangle\right|^2$: $P=$ $=P(n)\equiv P_n$, где n – целое неотрицательное число нулей функции $\langle\vec{x}\,|\,\Psi\rangle$ на уровне собственности P_n [3]. Разность $\Delta P_n=P(n+1)-P(n)$ будем называть квантом (порцией) индивидуальной собственности P_n.

Поскольку индивидуальная собственность обусловливается исключительно активизацией предпринимательской способности субъекта при выборе решения, числа n будем отождествлять с координатами n_l вектора способности (3).

Теперь мы можем сформулировать основную задачу вероятностно-динамического метода исследования микроэкономических систем, которая состоит в решении нестационарного и стационарного дифференциальных уравнений (14) и (15). При известных выражениях для операторов (16) и (17) и заданных граничных условиях эти уравнения имеют единственные решения $\langle \vec{x} | \Psi, t \rangle$ и $\langle \vec{x} | \Psi_P, t \rangle$, финитные в области допустимых значений денежного фактора и, следовательно, интегрируемые с квадратом в X. Раскладывая эти решения в ряды Фурье (4), можно найти законы распределения основных факторов системы, обеспечивающих формирование оптимальных экономических состояний. Значение идей вероятностно-динамического метода в ряду экономико-математических методов подчеркнуто в выводах данной работы.

Динамический метод оптимизации как частный случай вероятностно-динамического метода

Под обобщенной (государственной) собственностью субъекта в математической микроэкономике понимается функция $P_{pl}(\vec{b}, \vec{x}; t)$, являющаяся предельным выражением индивидуальной собственности $P(n)$ при стремлении рыночного параметра λ к нулю (при этом должно выполняться условие $n \to \infty$, но $\lambda n < \infty$). Проще, однако, функцию собственности найти, пользуясь принципом соответствия [3], т.е. заменяя в выражении (17) операторы сопряженных факторов на координаты соответствующих векторов:

$$P_{pl}(\vec{b}, \vec{x}; t) = \frac{\beta \vec{b}^2}{2} + V(\vec{x}, t). \qquad (18)$$

Уравнения динамики плановой системы получаются из нестационарного рыночного уравнения (14), если при $\lambda \to 0$ решение его искать в виде волнового пакета

$$\langle \vec{x} | \Psi, t \rangle = A \exp\left\{ \frac{i}{\lambda} S(\vec{x}(t), t) \right\}, \qquad (19)$$

где $S(\vec{x}(t), t)$ – так называемый функционал действия системы; A – нормировочная константа. При $\lambda \to 0$ фаза пакета представляет собой большую величину, так что функция (19) быстро осциллирует в области своего определения. Поэтому оптимальному плановому (динамическому) состоянию будут соответствовать те траектории $\vec{x}(t)$, для которых функционал S принимает наименьшие значения. Это утверждение известно под названием принципа наименьшего действия – основного принципа вариационного исчисления, используемого в современных методах оптимизации динамических систем (см. [1]).

Подставляя (19) в (14), с учетом выражений (5) вариационную задачу на экстремум функционала действия можно записать в виде [3]

$$\delta S = \delta \int (\vec{b}\, d\vec{x} - P_{pl} dt) = 0. \qquad (20)$$

Выполняя в (20) элементарное варьирование, получаем систему уравнений для экстремалей вариационной задачи:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial P_{pl}}{\partial \vec{b}} = \beta \vec{b}; \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = -\frac{\partial P_{pl}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}, \qquad (21)$$

совпадающую с уравнениями движения динамической системы, причем функция собственности $P_{pl}(\vec{b}, \vec{x}; t)$ играет роль функции Гамильтона такой системы. Решение уравнений (21) описывает временную эволюцию точки в фазовом пространстве – фазовую траекторию, определяющую оптимальное плановое (динамическое) состояние субъекта.

Таким образом, известные в оптимизационном исчислении динамические (и, следовательно, статические) методы математического программирования (см. [1]) являются следствием вероятностно-динамического подхода, основанного на идее полного описания экономического состояния, и вытекают из основных уравнений рыночной динамики (14) и (15) при стремлении рыночного параметра λ к нулю. Все эти методы описывают плановую (регулярную) динамику системы, понимаемую в математической микроэкономике как предельное выражение рыночной динамики. Оптимальные свойства поведения рыночных (и, следовательно, плановых) систем следуют из принципа измерения математической микроэкономики, находящегося в соответствии с известным принципом оптимальности Беллмана.

Выводы

1. Предложен вероятностно-динамический метод исследования микроэкономических систем, основанный на идее полного описания экономических состояний. Экономическим наблюдаемым в данном методе поставлены в соответствие самосопряженные операторы, входящие в один из полных наборов основных факторов состояния: денежного, материального и фактора предпринимательской способности. Пространство экономических состояний системы реализуется как гильбертово пространство представлений с базисом, образованным полной системой собственных функций операторов одного из полных наборов наблюдаемых.

2. Сформулированы основные принципы метода – вероятностный принцип и принцип оптимальности. Согласно вероятностному принципу, квадраты модулей элементов пространств представлений определяют законы распределения соответствующих экономических наблюдаемых в данном состоянии. Принцип оптимальности устанавливает критерий оптимальности, который формулируется в виде краевой задачи для функции состояния.

3. Введены важнейшие экономические наблюдаемые – оператор временной эволюции и оператор собственности системы, благодаря которым критерий оптимальности принимает форму основных уравнений вероятностно-динамического метода – уравнения временной эволюции и уравнения стационарного состояния системы. Введена величина частной (индивидуальной) собственности, представленной дискретным спектром оператора собственности и измеримой одновременно со спектром оператора предпринимательской способности.

4. На основании вероятностного принципа приведена классификация механизмов хозяйственной деятельности – рыночного, смешанного и планового, учитывающая степень проявления предпринимательской способности (или роль частной собственности) субъекта. Показано, что плановый механизм является предельным случаем рыночного, соответствующим переходу частной формы собственности в государственную (обобществленную). Получены уравнения плановой динамики предельным переходом в основных уравнениях вероятностно-динамического метода.

5. Предложенный метод имеет важное теоретическое и практическое значение, поскольку позволяет обосновать применение ряда статистических и динамических методов в современной микроэкономике, создавая теоретическую основу для таких наук, как математическая экономика, эконометрика, теория управления, теория решений и др., главным образом при применении их к задачам микроэкономики.

Преимущество данного метода проявляется, в частности, в сравнении его с используемыми в настоящее время методами статистического (или вероятностного) моделирования и состоит в том, что он позволяет решать задачу оптимизации вероятностных характеристик систем. В то же время традиционно «статистический подход весьма существенно усложняет формулировку и решение оптимизационных задач (обычно применяемые для этой цели методы имеют детерминированный характер)» [10].

6. К числу задач микроэкономики, решаемых с помощью вероятностно-динамического метода, следует отнести вопросы теории: потребительского поведения субъекта; производственно-экономической деятельности; регрессионного анализа поведения микроэкономических систем; товарно-денежного обмена в условиях идеального рынка и др.

Каждая из приведенных задач рассматривается как оптимизационная, критерий оптимальности которой определяется самой постановкой задачи, в соответствии с уравнениями (14), (15).

Особо следует указать на возможность создания теории фирмы, в которой могут быть представлены различные направления развития вероятностно-динамического метода. К числу последних следует отнести вопросы теории: решений; оптимизации портфеля фирмы; ее налогообложения; аудита фирмы (выбор критериев оптимизации взаимодействия аудиторских компаний с измеряемой системой – фирмой); рисков (оптимизация рисков портфеля и вероятности разорения фирмы) и ряд других вопросов (см. раздел «Заключение» в монографии [3]).

Авторы глубоко признательны В.А. Зорину за критические замечания, высказанные при прочтении рукописи.

Список литературы

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.

2. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 480 с.

3. Кукушкин В.А. Введение в математическую микроэкономику. Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2007. 344 с.

4. Иванов А.Г., Кукушкин В.А., Скуркайте А.П. Вероятностно-динамические методы в проблеме оптимального управления производственно-экономическими системами // Автоматизация и современные технологии. 2009. № 8. С. 43–46.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

6. Нуреев Р.М. Курс микроэкономики. М.: Норма, 2001. 560 с.

7. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974. 472 с.

8. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с. (Справочная математическая библиотека).

9. Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. М.: ИНФА-М, 2003. 480 с.

10. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки. М.: Дело, 2003. 520 с.

ON PROBABILISTIC DYNAMIC METHOD IN PROBLEMS OF MICROECONOMICS

A.G. Ivanov, V.A. Kukushkin

The ideas of probabilistic dynamic method have been proposed to study microeconomic systems. Basic concepts and principles have been considered. The range of microeconomic problems to be solved by the method has been determined. The method's relation to dynamic methods of optimization calculus has been discussed.

Keywords: probabilistic dynamic method; economic state function; complete sets of principal factors of state, probability principle, uncertainty relation for adjoint factors of state, optimality criterion of economic state, property operator, property value, quantum of entrepreneurial ability.