

УДК 537.86:519.2

**ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОТЕНЦИАЛА НА СВОЙСТВА
СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В МОНОСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

© 2010 г.

Н.В. Азудов, А.В. Кричигин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

krale@mail.ru

Поступила в редакцию 02.12.2009

Рассматривается нелинейная инерционная моностабильная система, на вход которой поступает аддитивная смесь гармонического сигнала и белого шума. При определенных параметрах усиление мощности сигнала и отношение сигнал–шум на выходе системы могут быть немонотонными функциями интенсивности входного шума, то есть возможно возникновение стохастического резонанса и антирезонанса. На основании исследования двух систем, описываемых кусочно-линейными моностабильными потенциалами, проводится анализ влияния формы потенциала на поведение усиления мощности сигнала и отношения сигнал–шум.

Ключевые слова: стохастический резонанс, моностабильная система, броуновское движение.

Введение

С точки зрения классической радиотехники принято считать, что наличие шума в системе только ухудшает ее характеристики. Исследования, проведенные в последние годы, показывают, что шум в нелинейных системах может стать причиной новых явлений, наблюдение которых без шума принципиально невозможно (см., напр., [1]). Наличие флуктуаций в нелинейных системах может не только приводить к отклонениям от среднего значения, но и играть конструктивную роль, вызывая увеличение упорядоченности в системах [2], подавление внутренних шумов с помощью внешнего шумового сигнала [3], синхронизацию фаз в системах с несколькими степенями свободы [4]. Кроме того в последние годы растет интерес к экспериментальным и теоретическим исследованиям индуцированных шумом эффектов и явлений в биологических системах (см., напр., [5]).

Внешнее воздействие, в зависимости от вида, величины и способа внесения, а также в зависимости от состояния системы, может приводить к различным явлениям (например, индуцированный шумом хаос [6], стохастический резонанс [7] и когерентный резонанс [8]). Самым простым и наглядным из них является стохастический резонанс. Явление стохастического резонанса представляет собой увеличение отклика нелинейной бистабильной системы на слабый внешний периодический сигнал при добавлении аддитивного шума определенной оптимальной интенсивности. При этом внешнее

периодическое воздействие настолько мало, что само по себе не может переводить бистабильную систему из одного метастабильного состояния в другое. Однако интенсивность шума и период сигнала можно подобрать таким образом, чтобы они «помогали» друг другу при таких переходах. Это приводит к тому, что отношение сигнал–шум (ОСШ) на выходе такой системы имеет отчетливо выраженный максимум при некотором оптимальном уровне шума на входе. Именно наличие максимума в функции ОСШ от входной интенсивности шума и является классическим проявлением стохастического резонанса. При этом анализ множества бистабильных систем показал, что немонотонное поведение ОСШ сопровождается аналогичным немонотонным поведением функции усиления мощности сигнала (УМС) в системе от интенсивности шума на входе [9].

Наряду с классическим стохастическим резонансом в бистабильных инерционных системах в последнее время возрос интерес к данному явлению в различных других системах [10–12], и в частности в моностабильных [13–18]. В работах [13, 14] рассматривались системы, управляемые мультипликативным шумом наряду с аддитивным. В работе [15] рассмотрено не ОСШ, а УМС в зависимости от интенсивности аддитивного шума на входе моностабильной системы и предложено иное определение стохастического резонанса. Стохастическим резонансом назван эффект, при котором УМС имеет максимум. Кроме этого, было высказано предположение о возможности существования

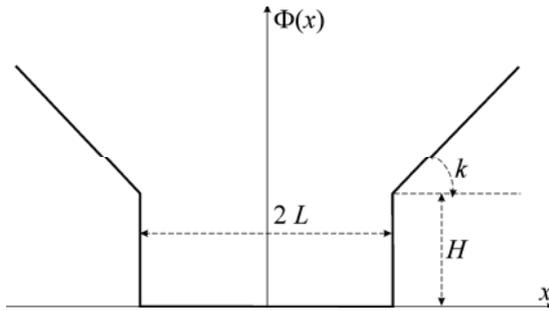


Рис. 1. Жестко-мягкий потенциальный профиль

стохастического антирезонанса, то есть наличия минимума такой зависимости. В работах [16–18] рассмотрены нелинейные инерционные моностабильные системы, на вход которых поступает аддитивная смесь гармонического сигнала и шума. На основе теории линейного отклика были впервые получены зависимости ОСШ на выходе системы как функции интенсивности входного шума. Обнаружено, что для некоторых моностабильных систем существуют режимы работы, при которых наблюдается явление стохастического резонанса в классическом понимании. Отмечено, что механизм стохастического резонанса в моностабильной системе принципиально отличен от механизма классического стохастического резонанса, так как не существует потенциального барьера, разделяющего метастабильные состояния. Также была аналитически подтверждена возможность существования в моностабильных системах максимума или минимума УМС как функции интенсивности входного шума, что тоже отличается от того, что ранее наблюдалось для бистабильных систем. Вместе с тем необходимо отметить, что хотя различие стохастического резонанса в бистабильных и моностабильных системах неоднократно отмечалось, сами свойства этого явления в моностабильных системах исследованы недостаточно.

В данной работе на примере двух видов моностабильных потенциалов исследуются некоторые свойства стохастического резонанса в моностабильных системах. В частности, анализируется влияние формы моностабильного потенциального профиля на возникновение немонотонного поведения функций ОСШ и УМС.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается инерционная моностабильная система, возбуждаемая аддитивной смесью сигнала и шума, описываемая уравнением Ланжевена:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{dx} + s(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – белый гауссовский шум: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = 2q\delta(\tau)$, $\Phi(x)$ – постоянный во времени потенциальный профиль, характеризующий саму систему, $s(t)$ – входной сигнал, $x(t)$ – выходной сигнал. В качестве входного сигнала рассмотрим гармонический:

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t).$$

В настоящей работе исследуются системы, описываемые моностабильными кусочно-линейными потенциальными профилями, изображенными на рис. 1, 2. Отметим, что основное отличие данных потенциалов заключено в различных формах профилей вблизи минимума потенциалов. Следовательно, при больших значениях интенсивности входного шума характеристики обеих систем должны совпадать.

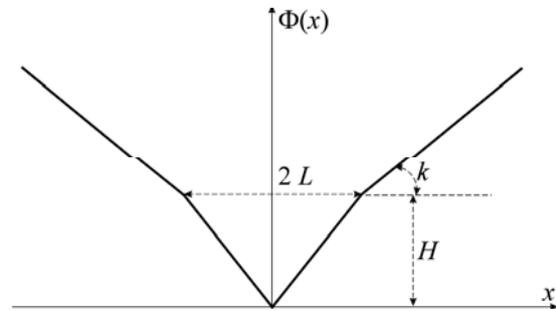


Рис. 2. Мягко-мягкий потенциальный профиль

Потенциальный профиль, изображенный на рис. 1, назовем жестко-мягким, так как он состоит из жесткого и мягкого потенциала:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < L, \\ k(|x| - L) + H, & |x| > L. \end{cases}$$

Мягкость или жесткость потенциала означает, что при удалении от состояния равновесия сила, возвращающая систему обратно в минимум потенциала, растет медленнее или быстрее, чем в линейной системе (1), соответствующей параболическому потенциальному профилю $\Phi(x) = \alpha x^2$. Потенциальный профиль, изображенный на рис. 2, назовем мягко-мягким, так как он составлен из двух мягких потенциалов с разными наклонами потенциальных стенок:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{H}{L}|x|, & |x| < L, \\ k(|x| - L) + H, & |x| > L. \end{cases}$$

Если входной сигнал мал ($A \ll L/q$), то, согласно теории линейного отклика, спектр выходного процесса $x(t)$ будет состоять из шумовой платформы $G_x(\omega)$ и слагаемого, соответст-

вующего гармонической компоненте на частоте входного сигнала [9]:

$$S_x(\omega) = G_x(\omega) + \frac{a^2}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

где a – амплитуда сигнала на выходе.

В данной работе рассматриваются следующие характеристики:

$$\text{УМС} \quad \eta = \frac{a^2}{A^2} \quad (2)$$

и ОСШ на выходе системы

$$\rho = \frac{a^2}{2G_x(\omega)}. \quad (3)$$

Методы решения

В работах [16, 17] предложен метод отыскания оценок функций (2) и (3) для систем вида (1), описываемых произвольными потенциальными профилями $\Phi(x)$. В частности, этот метод позволяет получить соответствующие выражения и для моностабильных систем, рассматриваемых в данной работе. В случае жестко-мягкой системы (рис. 1):

$$\eta = \frac{25L^4 C_1^4(q)}{9(1 + \gamma e^\beta) \left((5q\gamma^2 C_1(q))^2 + (L^2 C_2(q)\omega_0)^2 \right)}, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{5\pi A^2 C_1^4(q)}{6q C_2(q) (1 + \gamma e^\beta)}, \quad (5)$$

$$C_1(q) = \gamma^3 e^\beta + 3(2 + 2\gamma + \gamma^2),$$

$$C_2(q) = 2\gamma^5 e^\beta + 15\gamma(1 + \gamma)^2 e^{-\beta} + 5(15 + 12\gamma + 3\gamma^2 + 2\gamma^3 + 2\gamma^4);$$

в случае мягко-мягкой системы (рис. 2):

$$\eta = \frac{q^2 L^4 \beta^2 C_3^4(q)}{(\beta - \gamma(1 - e^\beta))^2 \left((q C_3(q))^2 + (L^2 C_4(q)\omega_0)^2 \right)} \quad (6)$$

$$\rho = \frac{\pi A^2 \beta \gamma C_3^2(q)}{2q C_2(q) (\beta - \gamma(1 - e^\beta))}, \quad (7)$$

$$C_3(q) = \frac{2 + 2\gamma + \gamma^2}{\gamma^3} - \frac{2(1 - e^\beta) + 2\beta + \beta^2}{\beta^3},$$

$$C_4(q) = \frac{5 + 4\gamma + \gamma^2}{\gamma^5} + \frac{1 + \gamma}{\beta\gamma^2} -$$

$$- \frac{2 + 2\gamma + 3\gamma^2}{\beta^3\gamma^2} + \frac{2(1 + \beta + \gamma + \beta\gamma)e^{-\beta}}{\beta^3\gamma^2} +$$

$$+ \frac{(1 + \gamma)^2(1 - e^{-\beta})}{\beta\gamma^4} -$$

$$- \frac{4 + 4\beta + \beta^3 - 5e^\beta + (1 + \beta)^2 e^{-\beta}}{\beta^5},$$

где $\beta = H/q$, $\gamma = kL/q$.

Отметим, что наряду с оценками (4) – (7) в работах [16, 18] были вычислены также функции η и ρ для данных потенциальных профилей на основе точных выражений лапласовских образов функций корреляций соответствующих случайных процессов. Здесь эти выражения не приводятся в силу их громоздкости, но они использованы для верификации результатов анализа оценок (4) – (7).

Анализ характеристик моностабильных систем

Как было показано в работах [16–18], в рассматриваемых системах существуют режимы, при которых функции УМС и ОСШ от интенсивности шума на входе могут быть монотонными либо немонотонными и иметь минимум и/или максимум. В данной работе впервые получены кривые значений параметров, при которых в системах наступает смена режимов поведения этих функций. Данные кривые построены по точкам, при этом каждая точка рассчитывается отдельно. Необходимо сразу отметить, что кривые, построенные данным образом, достаточно близки к прямым линиям, отклонения от прямых линий составляет не более 1%.

На рис. 3 приведена плоскость параметров жестко-мягкой системы: по оси абсцисс отложена глубина потенциальной ямы H , а по оси ординат наклон k внешних стенок потенциального профиля. Изображены линии смены режимов работы для различных значений ширины потенциальной ямы: кривая 1 соответствует $L = 1$, кривая 2 – $L = 2$. Область выше каждой линии соответствует монотонному поведению ОСШ (5). Область ниже отвечает режиму работы, при котором в системе имеет место явление классического стохастического резонанса, то есть наличие максимума ОСШ (5). Таким образом, кривые на рисунке соответствуют параметрам, при которых ОСШ (5) имеет точку перегиба.

Как видно из приведенного рисунка, в жестко-мягкой системе могут существовать два режима работы: первый соответствует минимуму УМС (стохастический антирезонанс – по определению, данному в [15]) и монотонному спадаанию ОСШ, а второй соответствует минимуму УМС и, одновременно, максимуму ОСШ («классический» стохастический резонанс). По графику эмпирически построим выражение «прямой» смены режимов работы:

$$k \approx 0.2682 \frac{H}{L}.$$

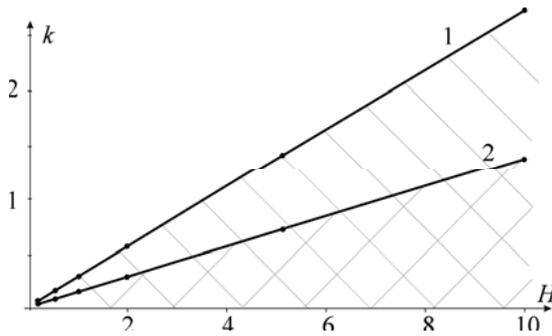


Рис. 3. Области режимов работы жестко-мягкой системы

В мягко-мягкой системе в отличие от жестко-мягкой в зависимости от параметров имеет место смена режимов не только по функции ОСШ, но и по функции УМС. На рис. 4 изображена плоскость параметров, на которой показаны эти режимы работы: по оси абсцисс отложена глубина потенциальной ямы H , по оси ординат — наклон стенок основного потенциала k , при этом $L = 1$. Пунктирная линия соответствует границам режимов (изменению функции УМС (6) от интенсивности входного шума). Область ниже линии соответствует монотонному, а область выше линии — немонотонному поведению данной функции. Примерное выражение этой линии:

$$k \approx 3.268 \frac{H}{L}.$$

Сплошная линия на рис. 4 соответствует смене режимов работы (изменению поведения ОСШ (7) как функции от интенсивности шума на входе). При этом область выше линии соответствует монотонному поведению ОСШ (7), а область ниже — стохастическому резонансу, то есть наличию максимума ОСШ (7). Примерное выражение «прямой» смены режимов:

$$k \approx 0.1613 \frac{H}{L}.$$

Как видно из приведенного рисунка, в мягко-мягкой системе существуют три режима работы: первый соответствует немонотонному поведению УМС, но монотонному спаданию ОСШ, при втором режиме обе функции ведут себя монотонно, а третий режим соответствует монотонному росту УМС и, одновременно, наличию максимума ОСШ («классическому» стохастическому резонансу).

Анализируя рис. 3 и 4, можно отметить, что при одинаковом коэффициенте наклона внешних стенок потенциального профиля k явление «классического» стохастического резонанса в обеих системах наступает при близких значениях высоты и ширины потенциальной ямы. Сле-

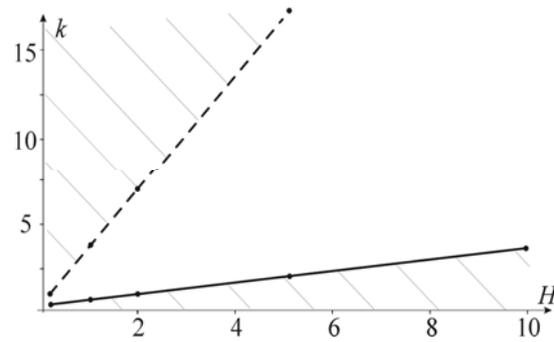


Рис. 4. Области режимов работы мягко-мягкой системы

довательно, форма потенциальной ямы в данном случае значительной роли не играет, важны только ее характерные размеры. С другой стороны, форма потенциальной ямы существенно влияет на функцию УМС. Так, при жесткой потенциальной яме УМС ведет себя немонотонно при любых значениях параметров системы (рис. 3), а при мягкой потенциальной яме — не при любых (рис. 4).

Заключение

В данной работе на основе методов, предложенных и реализованных в работах [16–18], проанализированы выходные характеристики двух моностабильных систем: УМС и ОСШ как функции интенсивности входного шума. Рассмотренные моностабильные системы отличаются лишь формой потенциальной ямы вблизи минимума потенциала. Для каждой из них на плоскостях параметров построены границы смены режимов работы, то есть значения параметров, при которых указанные функции имеют точку перегиба.

Рассмотренные примеры впервые демонстрируют, что свойства стохастического резонанса в моностабильных системах имеют намного большее разнообразие по сравнению с классическим вариантом этого явления, наблюдаемым в бистабильных системах, в которых два локально устойчивых состояния разделены потенциальным барьером. В классическом явлении стохастического резонанса немонотонное поведение функций УМС и ОСШ происходит одновременно, в одной и той же области параметров системы. Поэтому некоторые авторы (как, например, в [15]) стали отождествлять в принципе разные определения стохастического резонанса: немонотонность функции УМС и немонотонность функции ОСШ. В данной работе впервые показано, что в моностабильных системах такого однообразия не наблюдается и обе функции могут иметь

максимум (и даже минимум) в различных областях параметров системы.

Показано, что в жестко-жесткой системе могут существовать два принципиально различных режима работы, а в мягко-мягкой системе – три. Сделан вывод о том, что наличие явления стохастического резонанса определяется не формой потенциальной ямы, а ее характерными размерами: глубиной и шириной. Однако форма потенциальной ямы является критической при изменении режимов работы, связанных с немотонностью поведения УМС.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-02-01259-а).

Список литературы

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
2. Гинзбург С.Л., Пустовойт М.А. Индуцированная шумом сверхчувствительность к слабым сигналам // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67. № 8. С. 592–596.
3. Vilar J., Rubi J. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 950.
4. Горностырев Ю.Н., Ждахин Д.И., Кацнельсон М.И., Трефилов А.В. Стохастический резонанс между предельными циклами. Пружинный маятник в термостате // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. № 8. С. 585–589.
5. Spagnolo B., Spezia S., Curcio L. et al. Noise effects in two different biological systems // Eur. Phys. J. B. 2009. V. 69. P. 133–146.
6. Gao J.B., Tung W., Rao N. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 25. P. 254101.
7. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–38.
8. Lai Y.C., Liu Z. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4737.
9. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., et al. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Berlin: Springer, 2002.
10. Berdichevsky V., Gitterman M. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 1494.
11. Stocks N.G. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2310.
12. Kosko B., Mitaim S. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 031911.
13. Li J. // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 031104.
14. Guo F., Zhou Y.R., Jiang S.Q., Gu T.X. // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 13861–13868.
15. Evstigneev M., Reimann P., Pankov V., Prince R.H. // Europhys. Lett. 2004. V. 65. № 1. P. 7–12.
16. Агудов Н.В., Кричигин А.В. Стохастический резонанс и антирезонанс в моностабильных системах // Известия вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51. № 10. С. 899–913.
17. Агудов Н.В., Кричигин А.В. Преобразование сигнала и белого шума нелинейной инерционной системой // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2006. Т. 5. С. 103–135.
18. Agudov N., Krichigin A. Stochastic resonance in an overdamped monostable system // arXiv.org, Physics, Condensed Matter. 2008. 0808.2095v1 <http://arxiv.org/abs/0808.2095v1>.

INFLUENCE OF THE POTENTIAL PROFILE SHAPE ON THE PROPERTIES OF STOCHASTIC RESONANCE IN MONOSTABLE SYSTEMS

N.V. Agudov, A.V. Krichigin

A nonlinear inertial monostable system is considered with the additive mixture of a harmonic signal and a white noise supplied to its input. Under certain parameters the signal power amplification and the signal-to-noise ratio at the system output can be nonmonotonic functions of the input noise intensity, i.e. there is a possibility of stochastic resonance and antiresonance to arise. An analysis of the potential profile shape impact on the signal power amplification and signal-to-noise ratio is carried out on the basis of two systems described by piecewise linear monostable potentials.

Keywords: stochastic resonance, monostable system, Brownian motion.