УДК 519.17

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ МИНИМУМЫ РЕШЕТКИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РЕБЕРНОМ СПИСКОВОМ РАНЖИРОВАНИИ

© 2010 г.
Д.С. Малышев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dsmalyshev@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.04.2010

Изучаются минимальные по включению наследственные классы графов с NP-полной задачей о реберном списковом ранжировании, задаваемые небольшим количеством запрещенных порожденных подграфов.

Ключевые слова: минимальный сложный класс графов, задача о реберном списковом ранжировании.

Введение

В работе рассматриваются *наследственные классы графов*, т.е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов **X** может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов **S**, при этом принята запись **X**=*Free*(**S**). Минимальное по включению множество **S** с таким свойством существует, единственно и обозначается через *Forb*(**X**). Если *Forb*(**X**) конечно, то **X** называется *конечно определенным*, а если |*Forb*(**X**)|=*k*, то **X** называется *k-определенным*.

Пусть Π – какая-нибудь NP-полная задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении всей публикации предполагается, что $P \neq NP$, поэтому это условие не включается явно в формулировки полученных результатов. Таким образом, из NP-полноты задачи Π в некотором наследственном классе следует, что этот класс является Π-сложным.

Имея какую-нибудь задачу на графах Π, можно попытаться выяснить структуру тупиковых наследственных классов графов по сложности решения задачи Π. Речь идет о минимальных по включению Π-сложных классах графов и о максимальных по включению Π-простых. Последних не существует ни для одной NP-полной задачи Π, поскольку к Π-простому классу можно добавить граф, ему не принадлежащий, а также все порожденные подграфы добавленного графа и снова получить Π-простой класс. Сложнее дело обстоит с минимальными по включению сложными классами (называемыми в работе просто *минимальными* Π-*сложными*). До недавнего времени никакой информации о минимальных сложных классах не было. В работе [1] были найдены примеры таких классов для задач о списковом ранжировании и примеры задач на графах, для которых минимальных сложных классов не существует. В диссертации [2] было выяснено, что все минимальные сложные классы из [1] не являются конечно определенными, и были указаны примеры таких конечно определенных классов.

Вместе с тем хотелось бы выяснить, как устроено множество минимальных сложных классов для задач о списковом ранжировании, определяемых наименьшим количеством запрещенных порожденных подграфов, затем определяемых следующим за наименьшим количеством таких подграфов и т.д. Настоящая работа содержит результаты такого рода для задачи о реберном списковом ранжировании.

Задача о реберном списковом ранжировании, поставленная в работе [3], является обобщением известной задачи о реберной списковой раскраске. Пусть заданы граф G с множеством ребер E и множество $L=\{L(e): e \in E\}$, где каждое $L(e)$ – конечное множество натуральных чисел. Множество $L(e)$ – цвета, в которые можно покрасить ребро e. *L-ранжированием* графа G называется такая раскраска c его ребер, что:

1. Для каждого ребра e выполняется условие $c(e) \in L(e)$.

2. Если $c(e_1)=c(e_2)$, $e_1 \neq e_2$, то каждый путь, соединяющий e_1 и e_2, содержит такое ребро e_3, что имеет место неравенство $c(e_3)>c(e_1)$.

Задача о реберном списковом ранжировании (задача PCP) состоит в том, чтобы по данным G

и L определить, существует ли L-ранжирование графа G. Множество L будем называть *палитрой* [1]. Уточним, что под PCP-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что задача PCP решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любой палитре.

В данной статье доказывается, что существует единственный 1-определенный минимальный PCP-сложный класс – класс всех клик, а также что существует минимальный PCP-сложный класс, определяемый двумя или тремя запрещенными порожденными подграфами.

Обозначения для классов графов: **Clique** – класс клик; **CBipartite** – множество полных двудольных графов; **THTree** – класс деревьев высоты не более чем два; **CBiparite(*k*)** – множество полных двудольных графов, одна из долей которых содержит не более чем k вершин; **Comet** – класс деревьев, у которых существует вершина, инцидентная всем листьям, кроме, быть может, одного; **Comb** – множество деревьев со степенями вершин не более чем 3, для которых существует простой путь, содержащий все нелистовые вершины; **Garland** – класс графов, являющихся реберными к графам из **Comb**.

Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Класс* **Clique** *является минимальным* PCP-*сложным*.

Доказательство. Известно, что задача о реберном списковом ранжировании является NP-полной в классе всех графов [3]. Покажем, что задача PCP полиномиально сводится к той же задаче в классе **Clique**. Отсюда будет следовать, что данный класс является PCP-сложным.

Пусть G – произвольный граф с n вершинами и m ребрами, а L – назначение множеств допустимых цветов его ребер. Добавим C_n^2 -m ребер к графу G. Множеству этих ребер произвольно поставим во взаимно-однозначное соответствие множество цветов $\{k+1, k+2,\ldots, k+C_n^2 - m\}$, где k – максимальный из цветов палитры L. Обозначим полученную палитру через L'. Поскольку допустимый цвет каждого из добавленных ребер больше любого цвета из L, то L-ранжирование графа G существует тогда и только тогда, когда существует L'-ранжирование графа K_n. Тем самым, имеет место указанное в первом абзаце сведение.

Покажем теперь минимальность класса всех полных графов. Действительно, взяв произвольное натуральное s, замечаем, что множество полных графов, не содержащих порожденного подграфа K_s, является конечным, т.к. состоит в точности из s-1 графов. Таким образом, класс **Clique**$\cap Free(\{K_s\})$ является PCP-простым при любом s. Поэтому данный класс является минимальным PCP-сложным. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Класс* **CBipartite** *является* PCP-*сложным.*

Доказательство. Известно, что в классе **THTree** задача о реберном списковом ранжировании является NP-полной [3]. Рассмотрим произвольное такое дерево G и палитру L. Оно, очевидно, является двудольным графом. Рассмотрим двудольное разложение дерева $G=(V_1 \cup V_2, E)$. Добавим к G ребра, дополняющие этот граф до графа $G' = (V_1 \cup V_2, V_1 \times V_2)$. Построим L' – назначение допустимых цветов ребер графа G' аналогично соответствующему построению из доказательства леммы 1. Ясно, что L-ранжирование графа G существует тогда и только тогда, когда существует L'-ранжирование графа G'. Поэтому задача PCP в классе деревьев высоты не более чем два полиномиально сводится к задаче PCP в классе **CBipartite**. Таким образом, класс **CBipartite** является PCP-сложным. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Классы* **Comb** *и* **Garland** *являются классами с* NP-*полной задачей* PCP.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф G, принадлежащий классу **Comet,** а также палитру L. Для некоторого i данный граф получается отождествлением вершины степени i графа $K_{1,i}$ с одной из концевых вершин простого пути P_k. Сформируем новый граф G' следующим образом. Рассмотрим путь P_{k+i} и пронумеруем в порядке следования его ребра. Ребра этого графа, начиная с (i+1)-го, соответствуют в порядке следования ребрам пути P_k графа G. Добавим к графу P_{k+i} i вершин (которые пронумеруем числами от 1 до i) и столько же пронумерованных ребер. Для любого $1 \leq s \leq i$ добавленное ребро с номером s инцидентно добавленной вершине с тем же номером и смежно с s-м и (s+1)-м ребрами пути P_{k+i}. Данные i ребер произвольным образом поставим во взаимно-однозначное соответствие с ребрами подграфа $K_{1,i}$ графа G. Рассмотрим L' – назначение множеств допустимых цветов ребер графа G'. Все ребра этого графа, соответствующие ребрам графа G, получают допустимые цвета из L, умноженные на i+1. Оставшемуся множеству из i ребер произвольным образом биективно сопоставляется множество $\{1, 2,\ldots,i\}$.

Легко проверить, что L-ранжирование графа G существует тогда и только тогда, когда существует L'-ранжирование графа G'. Таким образом, задача PCP в классе **Comet** полиномиально сводится к той же задаче в классе **Comb**. Вместе с тем задача о реберном списковом ранжировании является NP-полной в классе графов **Comet**. Поэтому задача PCP в классе графов **Comb** имеет тот же сложностной статус.

Для доказательства NP-полноты задачи PCP в классе графов **Garland** достаточно заметить, что любой граф из этого класса получается добавлениями ребер к некоторому графу класса **Comb**, и провести рассуждения, аналогичные рассуждениям лемм 1, 2. Лемма 3 доказана.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Множество *Forb*(**CBipartite**) совпадает с множеством $\{C_3, K_2\oplus K_1\}$.

Основные результаты

Теорема 1. *Класс* **Clique** *является единственным минимальным* PCP-*сложным*, *определяемым одним запрещенным порожденным подграфом*.

Доказательство. Пусть G – произвольный граф. Если G не является полным и $G\neq \overline{K_2}$, то $Free(\{G\})\supset$ **Clique**. В этом случае класс $Free(\{G\})$ не является минимальным PCP-сложным. Если G является кликой, отличной и от K_1 и от K_2, то $Free(\{G\})$ содержит класс **THTree**. Поэтому он не является минимальным. Если G=K_1 или G=K_2, то $Free(\{G\})$ – множество пустых графов, поэтому данный класс является PCP-простым. Наконец, если $G=\overline{K_2}$, то $Free(\{G\})$=**Clique**. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Множество* 2-*определенных минимальных* PCP-*сложных классов либо пусто*, *либо состоит из одного класса* **CBiparite**.

Доказательство. Предположим, что существуют 2-определенные минимальные PCP-сложные классы, отличные от 2-определенного PCP-сложного класса **CBiparite**. Пусть **X** – такой класс. Понятно, что для некоторого s>2 граф K_s принадлежит множеству *Forb*(**X**) и что $\overline{K_2}\notin Forb$(**X**) (т.к. в противном случае **X** либо является PCP-простым, либо не является минимальным PCP-сложным). Таким образом, *Forb*(**X**)=$\{K_s,G\}$, где G отличен от полного графа. Граф G не может быть пустым, т.к. иначе из теоремы Рамсея следовала бы конечность класса **X**, т.е. этот класс был бы PCP-простым. Понятно, что $G\in$ **THTree** $\cap$ **CBipartite**, т.к. в противном случае либо **X** $\supseteq$ **CBipartite**, либо **X** $\supseteq$ **THTree**. Поэтому граф G изоморфен графу $K_{1,p}$, где p>1. Возможны следующие случаи:

1. p=2. Легко проверить, что все компоненты связности любого графа из класса $Free(\{K_s,K_{1,2}\})$ являются кликами с не более чем s-1 вершиной. Поэтому данный класс будет PCP-простым.
2. s=p=3. Очевидно, что каждая компонента связности любого графа класса $Free(\{K_3,K_{1,3}\})$ является либо простым циклом, либо простым путем. Отсюда и из теоремы 2 работы [1] следует, что этот класс является PCP-простым.
3. $s\geq 4$. Поскольку **X** $\supset$ **X** $\cap Free(\{C_4\})\supset$ **Comb**, то из леммы 3 следует, что класс **X** $\cap Free(\{C_4\})$ является PCP-сложным. Поэтому **X** не является минимальным.
4. $p\geq 4$. В этом случае справедливы включения **X** $\supset$ **X** $\cap Free(\{C_4\})\supset$ **Garland**, поэтому из леммы 3 следует, что **X** $\cap Free(\{C_4\})$ является PCP-сложным.

Таким образом, во всех случаях мы заключаем, что **X** не будет минимальным PCP-сложным. Получаем противоречие с предположением. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Существует минимальный* PCP-*сложный класс*, *определяемый двумя или тремя запрещенными порожденными подграфами*.

Доказательство. Если **CBipartite** является минимальным PCP-сложным, то из леммы 4 будет следовать справедливость доказываемого утверждения. В противном случае существует такое s, что класс **CBiparite(*s*-1)** является PCP-простым, а класс **CBipartite(*s*)** является PCP-сложным. Легко проверить, что **CBipartite(*s*)**=$Free(\{C_3,K_2\oplus K_1,K_{s+1,s+1}\})$. Для любого фиксированного $G\in$ **CBipartite(*s*)** каждый из графов класса **CBipartite(*s*)** $\cap Free(\{G\})$ является полным двудольным и имеет не более чем $max(|V(G)|,s)$ вершин в каждой из долей. Поэтому класс **CBipartite(*s*)** $\cap Free(\{G\})$ является конечным, а следовательно, PCP-простым. Таким образом, класс **CBipartite(*s*)** $\cap Free(\{G\})$ является 3-определенным минимальным PCP-сложным классом. Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, код проекта 10-01-00357-а и при поддержке лаборатории «Тапрадесс» (код проекта 61.1) НФ ГУ–ВШЭ.

Список литературы

1. Малышев Д.С. О минимальных сложных классах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16. №6. С. 43–51.

2. Малышев Д.С. Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов: Дисс … канд. физ.-мат. наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика». Нижний Новгород, 2009. 113 с.

3. Dereniowski D. The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. 2008. V.86. P. 96–114.

SEQUENTIAL MINIMA OF THE LATTICE OF HEREDITARY CLASSES OF GRAPHS FOR AN EDGE LIST-RANKING PROBLEM

D.S. Malyshev

The minimal under inclusion hereditary classes of graphs with NP-complete edge list-ranking problem assigned by a small number of forbidden induced subgraphs are studied.

Keywords: minimal hard class, edge list-ranking problem.