УДК 517

# АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПЕРЕДАЧИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ИНФОРМАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ОБУЧЕНИЯ


***Д.С. Пиунов***

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

piunovds@rambler.ru

*Поступила в редакцию 11.11.2009*

Рассматривается задача моделирования процесса передачи различных видов информации посредством обучения в биологической популяции. Изучается предельное поведение системы, выводятся условия неограниченно долгого сохранения информации внутри популяции, а также самой популяции в целом. Рассматриваются оптимизационные задачи с критериями, которые по-разному выражают условие неограниченно долгого сохранения информации в популяции. Прослеживается взаимосвязь между критериями.

*Ключевые слова:* системы на симплексе, теория отбора, параметрическая оптимизация.

Рассмотрим модель передачи информации в некоторой популяции, состоящей из $n$ видов особей. Пусть $y_i(t)$ – количество носителей информации (обученных особей $i$-го вида) в момент времени $t$, $x_i(t)$ – количество особей, не обладающих информацией (необученных особей $i$-го вида), тогда $x_i + y_i$ – общее количество особей $i$-го вида в популяции, $\dfrac{x_i}{x_i + y_i}$ – удельный вес необученных, $\dfrac{y_i}{x_i + y_i}$ – удельный вес обученных. Пусть носители информации могут передавать ее другим особям своего вида, причем информация от обученных особей передается пропорционально их удельному весу с постоянным коэффициентом $c$ $(c > 0)$. Пусть $a$ – коэффициент размножения обученных и необученных особей, одинаковый для всех видов. Родившиеся особи всегда являются необученными (так как данная информация не передается врожденно от родителей к потомкам). Особенность передаваемой информации состоит в том, что она влияет на коэффициент смертности: у обученных особей этот коэффициент $k_i$ меньше коэффициента смертности необученных $b$ ($b$ одинаков для всех видов). Лимитирующим фактором как для обученных, так и для необученных особей является совокупный прирост всей популяции. При сделанных гипотезах динамика численностей $x_i$ и $y_i$ задается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = a(x_i + y_i) - c\dfrac{x_i y_i}{x_i + y_i} - bx_i - x_i\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i), & i = \overline{1,n}, \\ \dot{y}_i = c\dfrac{x_i y_i}{x_i + y_i} - k_i y_i - y_i\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i), & i = \overline{1,n}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a,\ b,\ k_i$ – положительные константы и $k_i < b,\ i = \overline{1,n}$.

Сделаем замену переменных

$$w_i = x_i + y_i, \quad \xi_i = \frac{x_i}{w_i}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{w_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (2)$$

после чего система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = \eta_i(a - c\xi_i + k_i\eta_i - b\xi_i), \ \eta_i = 1 - \xi_i, & i = \overline{1,n}, \\ \dot{w}_i = w_i(a - k_i\eta_i - b\xi_i - \sum\limits_{i=1}^{n} w_i), & i = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, что каждое уравнение системы (3) является независимым от других и может исследоваться отдельно. Уравнения отличаются друг от друга лишь коэффициентом $k_i$. Рассмотрим $i$-е уравнение системы (3) и найдем его состояния равновесия. Первым состоянием равновесия является точка

$$\xi_i^* = 1, \quad \eta_i^* = 0. \quad (4)$$

Второе находится из условий $a - c\xi_i + k_i\eta_i - b\xi_i = 0, \quad \xi_i + \eta_i = 1$. В результате получим

$$\xi_i^* = \frac{a + k_i}{b + c + k_i}, \quad \eta_i^* = \frac{b + c - a}{b + c + k_i}. \quad (5)$$

Так как переменная $\xi_i$ является величиной ограниченной, $0 \le \xi_i \le 1$, то, исходя из этого, исключив случай $\xi_i = 1$, получим ограничение на коэффициенты

$$0 \le \frac{a+k_i}{b+c+k_i} < 1, \quad a+k_i < b+c+k_i, \quad a < b+c, \qquad (6)$$

которое гарантирует существование состояния равновесия (5). При выполнении ограничения (6) состояние равновесия (5) является устойчивым, а состояние равновесия (4) неустойчивым. В противном случае (4) – единственное устойчивое состояние равновесия.

Нарушение неравенства (6) означает, что появление необученных особей происходит быстрее их обучения или смерти, в результате чего их удельная численность стремится к единице, а доля обученных особей стремится к нулю.

Что же касается системы (3), фазовым пространством которой является $n$-мерный куб, расположенный в первом октанте $(0 \le \xi_i \le 1,\ i = \overline{1,n})$, то при выполнении неравенства (6) и начальных условиях $\xi_i^0 \ne 1,\ i = \overline{1,n}$, точка

$$\xi_i^* = \frac{a+k_i}{b+c+k_i},\ i = \overline{1,n},$$

является глобальным устойчивым состоянием равновесия, так как при этом каждая координата $\xi_i$ стремится к своему устойчивому состоянию равновесия (5). Если неравенство (6) нарушается, то единственным устойчивым состоянием равновесия системы (3) является точка

$$\xi_i^* = 1,\ i = \overline{1,n}.$$

Для исследования общей численности всех особей введем новые переменные

$$s = \sum_{i=1}^{n} w_i, \quad z_i = \frac{w_i}{s}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

где $s$ – общая численность всей популяции, $z_i$ – удельная численность $i$-го вида особей. Тогда динамика общей численности описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{z}_i = -z_i(b\xi_i + k_i\eta_i) + z_i\sum_{i=1}^{n} z_i(b\xi_i + k_i\eta_i), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

$$\dot{s} = s(a - s - \sum_{i=1}^{n} z_i(b\xi_i + k_i\eta_i)). \qquad (9)$$

Система (8) является системой на стандартном симплексе $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1,\ z_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}$. Исследуем ее на отбор. Для того чтобы $z_1 \to 1,\ z_i \to 0,\ i = \overline{2,n}$, при $t \to \infty$, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$b\xi_1 + k_1\eta_1 < b\xi_i + k_i\eta_i, \quad i = \overline{2,n}. \qquad (10)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $a \ge b + c$. Тогда с течением времени $\xi_i \to 1,\ \eta_i \to 0,\ i = \overline{1,n}$, условие (10) не выполнится и отбора не будет. В этом случае уравнение (9) примет вид

$$\dot{s} = s(a - b - s).$$

При этом для общей численности имеем единственное устойчивое состояние равновесия $s^*$:

$$s^* = a - b.$$

Вся численность стабилизируется на некотором положительном уровне, равном $a - b$, $w_i = x_i \ne 0,\ y_i = 0,\ i = \overline{1,n}$. В системе выживают только необученные особи, предельная численность распределяется между ними в зависимости от начального состояния системы.

Пусть теперь $a < b + c$. С течением времени $\xi_i$ и $\eta_i$ примут значения (5). Для проверки выполнения неравенств (10) рассмотрим функцию $F(k_i) = b\xi_i + k_i\eta_i$, где $\xi_i$ и $\eta_i$ также зависят от $k_i$ и находятся из соотношений: $a - c\xi_i + k_i\eta_i - b\xi_i = 0$, $\xi_i + \eta_i = 1$. Покажем, что функция $F(k_i)$ монотонна. Дифференцируя соотношение $a - c\xi_i + k_i\eta_i - b\xi_i = 0$ по $k_i$, находим $\eta_i' = -\dfrac{\eta_i}{b+c+k_i} < 0$. Тогда $F'(k_i) = -\eta_i'(2b + c) > 0$, следовательно, функция $F(k_i)$ строго монотонна. Система неравенств (10) примет вид $F(k_1) < F(k_i),\ i = \overline{2,n}$, что эквивалентно $k_1 < k_i,\ i = \overline{2,n}$.

Пусть

$$k_1 = \min_{i=\overline{1,n}} k_i, \qquad (11)$$

тогда будет отбор для $z_1$, в пределе при $t \to \infty$ уравнение (9) примет вид $\dot{s} = s(a - F(k_1) - s)$. Для общей численности имеем единственное устойчивое состояние равновесия $s^*$:

$$s^* = \begin{cases} a - F(k_1), & a > F(k_1), \\ 0, & a \le F(k_1), \end{cases}$$

где функция $F(k_1) = b\dfrac{a+k_1}{b+c+k_1} + k_1\dfrac{b+c-a}{b+c+k_1}$.

Преобразовав неравенство $a > F(k_1)$, получим

$$a > k_1 \frac{2b + c}{2k_1 + c} > k_1.$$

Это означает, что для того чтобы популяция не вымирала, коэффициент размножения необученных особей $a$ должен быть больше коэффициента смертности обученных $k_1$. Но при этом $x_1 = \xi_1^* s^*$, $y_1 = \eta_1^* s^*$, $w_i = x_i = y_i = 0$, $i = \overline{2, n}$. В системе выживает лишь первый вид, у которого коэффициент смертности обученных особей наименьший.

Если существует целое число $m$ такое, что $1 < m < n$, $k_1 = k_2 = \dots = k_m < k_i$, $i = \overline{m+1, n}$, то $z_i \to 0$, $i = \overline{m+1, n}$, $\dot{s} = s(a - F(k_1) - s)$. В системе остаются только первые $m$ видов, их общая численность, такая же как и в предыдущем случае, распределяется между видами в зависимости от начального состояния системы, все остальные виды вымирают.

Итак, при $a \geq b + c$ в системе сохраняются лишь необученные особи всех видов, а их общая численность стабилизируется на положительном уровне, равном $a - b$. Если $a < b + c$, то при условии $a > F(k_1)$ в системе сохраняются только виды с минимальным коэффициентом смертности $k_i$, в противном случае вся популяция вымирает.

Иными словами, в популяции остается лишь та информация, которая обладает наибольшей ценностью для сохранения и выживания особей, то есть наиболее значимая информация. В нашем случае значимость информации заключается в снижении уровня смертности среди обученных особей. В конкретных случаях это может быть обусловлено разными причинами, например каким-либо видом приспосабливаемости обученных особей к условиям окружающей среды, или новым способом добывания пищи, или же взаимодействием между особями популяции – взаимопомощью или взаимной конкуренцией.

Далее рассмотрим задачу параметрической оптимизации в модели (1) с точки зрения носителей информации первого вида. Критериями существования для нее будут величины

$$\langle y_1 \rangle, \quad \langle \eta_1 \rangle, \quad \left\langle \frac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle.$$

Пусть эти носители могут осуществлять различные варианты поведения, влияющие на коэффициент смертности: коэффициент смертности первого вида выражается как $k_1 = k_0 + u$, где $u$ – параметр из допустимого диапазона $0 \leq u \leq U$, определяемый способом поведения, $k_0$ – положительная постоянная.

Рассмотрим первый критерий: $\langle \eta_1 \rangle \to \max$. При $a \geq b + c$ будем иметь $\langle \eta_1 \rangle = 0$, иначе

$$\langle \eta_1 \rangle = \lim_{t \to \infty} \eta_1(t) = \frac{b + c - a}{b + c + k_0 + u} > 0.$$

Оптимальным управлением будет $u = 0$. При выполнении условия $a > F(k_0)$ в системе сохранятся виды с коэффициентами $k_i = k_0$, $i = \overline{2, n}$, в противном случае вся популяция вымрет. Оптимальным вариантом поведения особей является такой, при котором коэффициент их смертности минимален.

Рассмотрим второй критерий: $\left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle \to \max$.

Из (3) следует, что

$$\left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle = \langle (b+c)\xi_1 - k_1\eta_1 - a \rangle = (b+c)\langle \xi_1 \rangle - k_1 \langle \eta_1 \rangle - a.$$

Если $a \geq b + c$, то $\langle \eta_1 \rangle = 0$, $\langle \xi_1 \rangle = 1$, следовательно, $\left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle = b + c - a < 0$. Если же $a < b + c$, то, преобразовав критерий к виду $b + c - a - (b + c + k_1)\langle \eta_1 \rangle$ и учтя, что $\langle \eta_1 \rangle = \frac{b + c - a}{b + c + k_1}$, получим $\left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle = 0$. С точки зрения данного критерия, не имеет значения, какой вариант поведения выберут особи.

Далее рассмотрим критерий: $\langle y_1 \rangle \to \max$. $\langle y_1 \rangle = 0$ при $a \geq b + c$ и при $a < b + c$, если $k_1$ не удовлетворяет условию (11). Ненулевые значения критерия получаются только при условии выполнения неравенств $a < b + c$ и (11): $\langle y_1 \rangle = \eta_1^* s^*$, где $\eta_1^*$ и $s^*$ соответствуют состоянию равновесия (5). Однако при этом должно выполняться условие сохранения популяции

$$a > F(k_1). \tag{12}$$

Если существует несколько минимальных коэффициентов смертности обученных особей, то $\langle y_1 \rangle < \eta_1^* s^*$, так как в этом случае численность распределяется между всеми выживающими видами.

Выполнение неравенств (11) и (12) приводит к следующим ограничениям:

$$u + k_0 < k_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad u < k_i - k_0, \quad i = \overline{2, n},$$

$$u < \min_{i=\overline{2, n}} \{k_i - k_0\} = \delta,$$

$$a < b\xi_1^* + k_1\eta_1^*, \quad u < \frac{ac}{2b + c + 2a} - k_0 = \alpha.$$

Обозначим $\beta = \min \{\alpha, \delta, U\}$, тогда областью изменения параметра $u$, при которой выполняются неравенства (11) и (12), является полуинтервал $0 \le u < \beta$.

Сам критерий имеет вид

$$\langle y_1 \rangle = \eta_1^* s^* =$$

$$= (b + c - a)\frac{a - ab + (k_0 + u)(a - c - 2b)}{(b + c + k_0 + u)^2} =$$

$$= f(u) \to \max.$$

Найдем экстремум функции $f(u)$, для этого приравняем к нулю ее производную $f'(u) = 0$. Тогда $u^* = b + c - k_0 + \dfrac{2a(1 - b)}{2b + c - a}$ – точка минимума. Оптимальным поведением обученных особей первого вида будет поведение, соответствующее управлению

$$u = \begin{cases} 0, \quad u^* \ge \beta \quad \text{или} \quad u^* \in [0, \beta), \\ \max\{f(0), f(\beta)\} = f(0), \\ \beta, \quad u^* \le 0 \quad \text{или} \quad u^* \in [0, \beta\ ), \\ \max\{f(0), f(\beta\ )\} = f(\beta\ ). \end{cases}$$

Заметим, что $u = \beta$ лишь при $\beta = U$, в противном же случае необходимо выбрать наибольшее возможное значение $u$, но $u < \beta$, поэтому наибольшего значения не существует. Чем ближе будет $u$ к $\beta$, оставаясь строго меньше $\beta$, тем больше будет значение критерия $\langle y_1 \rangle$. Если $\beta < 0$, то $\langle y_1 \rangle = 0$ (особи вымирают).

Последний критерий: $\left\langle \dfrac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle \to \max$. Преобразуем его

$$\left\langle \frac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle = c\langle \xi_1 \rangle - k_0 - u - \langle s \rangle \to \max.$$

Если $a \ge b + c$, то $\langle \xi_1 \rangle = 1$, $\langle s \rangle = a - b$, поэтому оптимальным является управление $u = 0$. Обученные особи первого вида при этом вымирают, но выбирают такой вариант поведения, при котором их смертность минимальна. Критерий принимает значение, равное $b + c - a - k_0 < 0$.

Пусть $a < b + c$ и $a \le F(k_1)$, из чего следует $u \ \ge \ \dfrac{ac}{2ac + c + 2a} - k_0 = \alpha$, при этом $s \to 0$. В этом случае на параметр $u$ накладывается следующее ограничение $\beta \le u \le U$, где $\beta = \max \{0, \alpha\}$.

Критерий преобразуется к виду

$$\left\langle \frac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle = c\frac{a + k_0 + u}{b + c + k_0 + u} - k_0 - u = f(u) \to \max.$$

Функция $f(u)$ имеет две точки экстремума: точка минимума всегда отрицательна, а точка максимума $u^* = \sqrt{c(b + c - a)} - (b + c + k_0)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Оптимальное управление выражается следующей формулой

$$\text{u} = \begin{cases} u^*, u^* \in [0, \beta] \\ 0, \qquad u^* \le 0, \\ \beta, \qquad u^* \ge \beta \end{cases}$$

Вся популяция в этом случае вымирает.

Теперь пусть $a > F(k_1)$, из чего следует $u < \alpha$, при этом $s \to a - F(k_1)$. Область управления – отрезок $0 \le u < \beta$, где $\beta = \min\{U, \alpha\}$.

Критерий преобразуется к виду

$$\left\langle \frac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle = \frac{(k_0 + u)(b + c - 2a - k_0 - u)}{b + c + k_0 + u} = f(u) \to \max.$$

Функция $f(u)$ по своим свойствам такая же, как и в предыдущем случае, только $u^* = \sqrt{2(b + c)(b + c - a)} - (b + c + k_0)$. Оптимальное управление выражается той же формулой. Популяция сохраняется. Если $\alpha \le 0$, популяция вымирает.

Таким образом, из всех рассмотренных критериев только три являются объективными, так как выражают цель самой системы – ее неограниченное непротиворечивое существование. Это критерии $\langle y_1 \rangle$, $\langle \eta_1 \rangle$, $\left\langle \dfrac{\dot{y}_1}{y_1} \right\rangle$. Выбирая в качестве критерия существования любой из этих трех критериев, при достаточно большой области управления, обученные особи первого вида сохраняются в популяции, так же как и необученные, их суммарная численность стабилизируется на положительном уровне, а все остальные виды вымирают.

Что касается критерия $\left\langle \frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1} \right\rangle$, то он не является объективным, так как принимает одинаковые значения при любом значении параметра $u$, то есть является вырожденным. С точки зрения данного критерия, варианты поведения обученных особей несравнимы и выбрать из них лучший невозможно.

*Список литературы*


1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
3. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Н.Новгород: Издательство ННГУ, 2007.
4. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.


**ANALYSIS OF A MODEL FOR TRANSFER OF DIFFERENT TYPES OF INFORMATION BY LEARNING**

***D.S. Piunov***

The problem of modeling the process of transferring various types of information by learning in a biological population is considered. The system limit behaviour is studied; the conditions are determined for indefinitely-long preservation of information within the population, and also of the population as a whole. Optimization problems are considered with the criteria, which in different ways reflect the condition of infinitely-long preservation of information in the population. The relationship between the criteria is traced.

*Keywords:* simplex systems, selection theory, parametric optimization.