

# МЕХАНИКА

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СРЕДЕ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИСТОЧНИКА

© 2010 г.

Л.А. Игумнов, В.П. Пазин, А.Н. Петров

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@dk.mech.unn.ru

Поступила в редакцию 07.06.2010

Рассматриваются бесконечные трехмерные анизотропная и электроупругая среды. На основе единой формализации для получения соответствующих матриц-решений представлены два подхода. Спецификой первого подхода является получение матриц-решений в виде интегрального представления, а спецификой второго подхода – получение решений в виде аналитической формулы, использующей корневые множества матриц функциональных решений. Для конкретных свойств материала численно построены компоненты полученных представлений матриц-решений. Даны сравнения с результатами других авторов. Представлена визуализация матриц-решений в виде поверхностей.

*Ключевые слова:* матрица Неймана, трехмерная постановка, анизотропная упругость, электроупругость, численное моделирование.

### Введение

Построение перемещений и напряжений в трехмерной электроупругой среде от сосредоточенного источника позволяет классическим методом граничных интегральных уравнений (ГИУ) получить решение краевой задачи трехмерной электроупругой статики, а методом ГИУ с двойным применением теоремы взаимности получить решение начально-краевой задачи трехмерной динамической теории электроупругости [1]. Ссылки на первые работы по детальному обсуждению соответствующих упругостатических решений для анизотропного случая можно найти в обзоре Vascon и др. (1978), а также в работах Mura (1987) и Ting (1996). Исследования таких упругостатических матриц электроупругости для бесконечных и полубесконечных трансверсальных изотропных тел в замкнутой форме были проведены Wang и Zheng (1995), Dunn и Wienecke (1996, 1998), Ding и др. (1996 – 2000) и Pan (2002), а также подробно представлены в [2].

### 1. Постановка задач

Базовые уравнения трехмерной линейной теории электроупругости имеют следующий вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji,j} + F_i &= 0, \quad D_{i,i} - Q = 0, \quad i, j = \overline{1,3}, \\ \sigma_{ij} &= C_{ijlm} \varepsilon_{lm} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ijk} \gamma_{jk} + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j, \\ & \quad i, j, k, l, m = \overline{1,3}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$  – соответственно компоненты тензора напряжения и вектора электрического смещения;  $F_i$ ,  $Q$  – компоненты плотности объемной силы и плотности электрического заряда;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации,  $E_j$  – компоненты вектора электрического поля;  $C_{ijlm}$ ,  $e_{ijk}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  – упругие модули, электроупругие коэффициенты, диэлектрические константы;  $u_i$  и  $\phi$  – упругое смещение и электрический потенциал соответственно. Здесь и в дальнейшем повторение индексов означает суммирование. Запятая обозначает частное дифференцирование.

Для того чтобы задачи анизотропной теории упругости и электроупругости рассматривать с единых позиций, сгруппируем базовые компоненты [5]:

$$\hat{u}_i = \begin{cases} u_i, & i = 1, 2, 3, \\ \phi, & i = 4, \end{cases} \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}, & i = 1, 2, 3, \\ -E_j, & i = 4, \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = 1, 2, 3, \\ D_i, & j = 4, \end{cases}$$

$$\hat{C}_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}, & j, k = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & j = 1, 2, 3, k = 4, \\ e_{ikl}, & j = 4, k = 1, 2, 3, \\ -\varepsilon_{il}, & j, k = 4. \end{cases}$$

В новых переменных физические соотношения и уравнения равновесия принимают вид:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{C}_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}, \quad \hat{\sigma}_{ij,i} + \hat{F}_j = 0,$$

где

$$\hat{F}_j = \begin{cases} F_j, & j = 1, 2, 3, \\ -Q, & j = 4. \end{cases}$$

Новая формализация позволяет строить искомые матрицы-решения аналогично тому, как это выполняется для трехмерной анизотропной теории упругости.

## 2. Получение формул представлений

Для построения матрицы Неймана необходимо знать матрицу Грина. Математически матрица Грина может быть определена следующим образом:

$$\hat{C}_{ijkl} G_{km,li}(x) = -\delta_{jm} \delta(x), \quad (1)$$

$$i, l, m = \overline{1, 3}; j, k = \overline{1, 4}.$$

К настоящему времени сложилось два наиболее общих способа получения матриц Грина. Первый способ продемонстрируем на примере анизотропной задачи, второй – на примере электроупругой задачи.

Матрица  $G_{jk}$  имеет следующий вид [1]:

$$G_{jk} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (\mathcal{M}_{jk}^{kk}(z_i(\phi)))^{-1} d\phi, \quad (2)$$

$$\mathcal{M}_{jk}^{zz} = C_{ijkl} z_i z_l,$$

где  $r$  – расстояние между произвольной и исходной точкой.

Для получения матрицы Неймана найдем первую производную от представления из (2) [1]:

$$G_{jk,s} = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \int_0^{2\pi} (-r_s^0 (\mathcal{M}_{jk}^{kk})^{-1} - z_s F_{jk}) d\phi, \quad (3)$$

$$F_{jk} = (\mathcal{M}_{in}^{zz})^{-1} D_{nq} (\mathcal{M}_{qk}^{zz})^{-1},$$

$$D_{nq} = \mathcal{M}_{nq}^{r^0 z} + \mathcal{M}_{nq}^{zr^0},$$

$$\mathcal{M}_{ik}^{zr^0} = C_{ijkl} z_j r_l^0, \quad \mathcal{M}_{ik}^{r^0 z} = C_{ijkl} r_j^0 z_l.$$

Второй способ опирается на интерполяцию Лагранжа [4]: обратная матрица записывается

по определению, исследуются свойства особых точек подынтегрального выражения и на основе теории вычетов матрица Грина представляется в виде:

$$G_{jk}(x) = -\frac{\text{Im}}{2\pi r} \sum_{m=1}^4 \frac{A_{jk}(p + \zeta_m q)}{a_0 (\zeta_m - \zeta_m^*) \prod_{k=1, k \neq m}^4 (\zeta_m - \zeta_k) (\zeta_m - \zeta_k^*)}, \quad (4)$$

где  $\zeta_m$  – корни  $D(p + \zeta q) = 0$  – многочлена восьмой степени от  $\zeta$ ;  $\zeta_m^*$  – сопряженный к  $\zeta_m$  корень;  $a_0$  – коэффициент при  $\zeta^8$ ;  $\text{Im} \zeta_m > 0$ ,  $m = \overline{1, 4}$ .

Для произвольной точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$  производные тензора Грина  $G_{JK}$  по координатам имеют вид:

$$\frac{\partial G_{PK}}{\partial x_1} \approx \frac{1}{2h} [G_{PK}(x_1 + h, x_2, x_3) - G_{PK}(x_1 - h, x_2, x_3)],$$

$$\frac{\partial G_{PK}}{\partial x_2} \approx \frac{1}{2h} [G_{PK}(x_1, x_2 + h, x_3) - G_{PK}(x_1, x_2 - h, x_3)],$$

$$\frac{\partial G_{PK}}{\partial x_3} \approx \frac{1}{2h} [G_{PK}(x_1, x_2, x_3 + h) - G_{PK}(x_1, x_2, x_3 - h)]. \quad (5)$$

Величина шага  $h$  определяется из соотношения:  $h = r \cdot 10^{-3}$ .

## 3. Численные эксперименты

Для удобства тензор упругих модулей  $C_{ijkl}$  запишем через константы  $c_{\alpha\beta}$  ( $\alpha = \overline{1, 6}$ ;  $\beta = \overline{1, 6}$ ) [6]. Электроупругие константы  $e_{kij}$  могут быть записаны с двумя индексами  $e_{kp}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ;  $p = \overline{1, 6}$ ) следующим образом:

$$e_{k1} = e_{k11}; e_{k2} = e_{k22}; e_{k3} = e_{k33};$$

$$e_{k4} = e_{k23} = e_{k32}; e_{k5} = e_{k13} = e_{k31};$$

$$e_{k6} = e_{k12} = e_{k21}.$$

В качестве примера рассмотрим трансверсальный изотропный электроупругий материал, для которого известны точные решения в замкнутой форме [7]. Предположим, что ось симметрии материала параллельна оси  $x_3$ , тогда отличные от нуля элементы констант материала следующие:

$$c_{11}, c_{22}(=c_{11}), c_{33}, c_{13}, c_{23}(=c_{13}), c_{44}, \\ c_{55}(=c_{44}), c_{66}, c_{12}(=c_{11}-2c_{66}), \\ e_{31}, e_{33}, e_{15}, e_{32}(=e_{31}), e_{24}(=e_{15}), \\ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}(=\varepsilon_{11}), \varepsilon_{33}.$$

Для трансверсально изотропной пьезокерамики (PZT-4) [8] соответствующие константы материала приведены в табл. 1, упругие константы  $c_{\alpha\beta}$  даны с точностью до множителя в  $10^9$  Н/м<sup>2</sup>, пьезоэлектрические коэффициенты

$$e_{kp} - \text{Кл/м}^2 \text{ и диэлектрические постоянные} \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} - 10^{-9} \text{ Кл/Вм.}$$

Для точки  $x = (1, 1, 1)$  компоненты электроупругих матриц Неймана  $G_{PK,1}, G_{PK,2}, G_{PK,3}$  представлены соответственно в табл. 2–4 в сравнении с точным решением [7]. В табл. 3 также представлено сравнение с численным решением F. C. Burgonì и A. Saez [9].

Таблица 1

$c_{11}$	$c_{13}$	$c_{12}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$c_{66}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{33}$
139.0	74.3	77.8	115.0	25.6	30.6	-5.2	15.1	12.7	6.4605	5.61975

Таблица 2

$(P, K)$	Точное решение	Численное решение
1,1	$-9.26183802345 \times 10^{-14}$	$-9.26211971502 \times 10^{-14}$
1,2; 2,1	$1.65932816546 \times 10^{-14}$	$1.65938011817 \times 10^{-14}$
1,3; 3,1	$1.82113322728 \times 10^{-14}$	$1.82111361861 \times 10^{-14}$
1,4; 4,1	$6.70402857710 \times 10^{-6}$	$6.70386239193 \times 10^{-6}$
2,2	$-4.81188998237 \times 10^{-13}$	$-4.81190985218 \times 10^{-13}$
2,3; 3,2	$-1.54203110547 \times 10^{-13}$	$-1.54203820596 \times 10^{-13}$
2,4; 4,2	$-2.01554138734 \times 10^{-4}$	$-2.01554974395 \times 10^{-4}$
3,3	$-3.30447677887 \times 10^{-13}$	$-3.30448786793 \times 10^{-13}$
3,4; 4,3	$6.20021679052 \times 10^{-4}$	$-6.20023799701 \times 10^{-4}$
4,4	$1.18596300519 \times 10^6$	$1.18597183363 \times 10^6$

Таблица 3

$(P, K)$	Точное решение	Численное решение Burgonì	Численное решение
1,1	$-4.81188998237 \times 10^{-13}$	$-4.81189369756 \times 10^{-13}$	$-4.81164650629 \times 10^{-13}$
1,2; 2,1	$1.65932816546 \times 10^{-14}$	$1.65929102010 \times 10^{-14}$	$1.65912699071 \times 10^{-14}$
1,3; 3,1	$-1.54203110547 \times 10^{-13}$	$-1.54205935560 \times 10^{-13}$	$-1.54199292809 \times 10^{-13}$
1,4; 4,1	$-2.01554138734 \times 10^{-4}$	$-2.01546078340 \times 10^{-4}$	$-2.01549777817 \times 10^{-4}$
2,2	$-9.26183802345 \times 10^{-14}$	$-9.26187902596 \times 10^{-14}$	$-9.25985855923 \times 10^{-14}$
2,3; 3,2	$1.82113322728 \times 10^{-14}$	$1.82108618017 \times 10^{-14}$	$1.82182962166 \times 10^{-14}$
2,4; 4,2	$6.70402857710 \times 10^{-6}$	$6.70401912700 \times 10^{-6}$	$6.71225201843 \times 10^{-6}$
3,3	$-3.30447677887 \times 10^{-13}$	$-3.30458722395 \times 10^{-13}$	$-3.30436364465 \times 10^{-13}$
3,4; 4,3	$-6.20021679062 \times 10^{-4}$	$-6.19996630452 \times 10^{-4}$	$-6.20000274462 \times 10^{-4}$
4,4	$1.18596300519 \times 10^6$	$1.18591339858 \times 10^6$	$1.18588086747 \times 10^6$

Таблица 4

$(P, K)$	Точное решение	Численное решение
1,1	$-5.76929903985 \times 10^{-13}$	$-5.76904645572 \times 10^{-13}$
1,2; 2,1	$-2.27471872311 \times 10^{-13}$	$-2.27474197093 \times 10^{-13}$
1,3; 3,1	$-3.64226645455 \times 10^{-14}$	$-3.64183817407 \times 10^{-14}$
1,4; 4,1	$-1.347080571542 \times 10^{-5}$	$-1.34032007654 \times 10^{-5}$
2,2	$-5.76929903985 \times 10^{-13}$	$-5.76909046396 \times 10^{-13}$
2,3; 3,2	$-3.64226645455 \times 10^{-14}$	$-3.64152995171 \times 10^{-14}$
2,4; 4,2	$-1.347080571542 \times 10^{-5}$	$-1.33994666571 \times 10^{-5}$
3,3	$-1.36396808876 \times 10^{-13}$	$-1.36385029260 \times 10^{-13}$
3,4; 4,3	$-2.83889208291 \times 10^{-4}$	$-2.83867035216 \times 10^{-4}$
4,4	$2.01966683615 \times 10^6$	$2.01958092858 \times 10^6$

#### 4. Визуализация

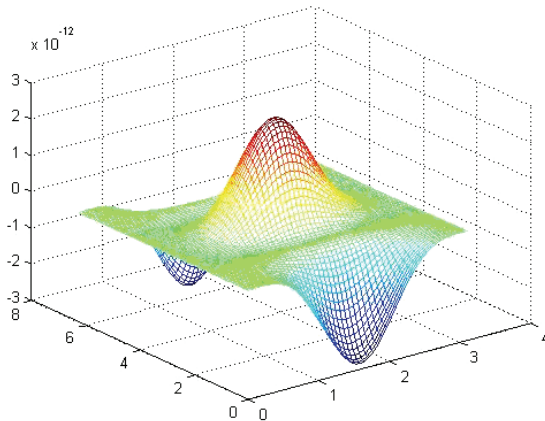
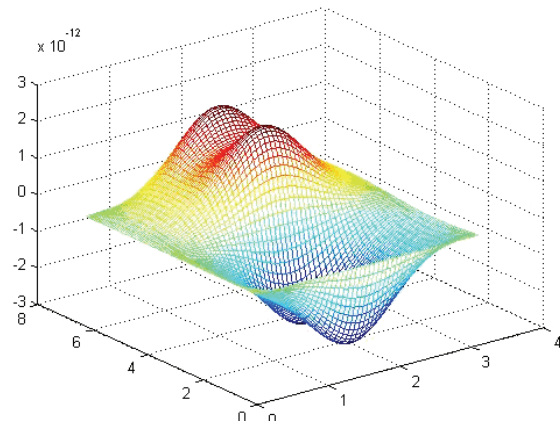
Опишем построение матриц Неймана в виде двумерных поверхностей на основе интерполяционной схемы вычисления. Функции  $G_{jk,i}(x)$  зависят от трех пространственных переменных  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Перейдем к сферическим координатам  $(r, \theta_1, \theta_2)$ . Тогда на единичной сфере  $G_{jk,i}(\theta_1, \theta_2)$  – функции только двух переменных (полярного угла  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$  и азимутного угла  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ ), поэтому функция  $G_{jk,i}$  от

конкретных  $\theta_1$  и  $\theta_2$  дает соответствующие значения во всем электроупругом трехмерном пространстве с точностью до значения множителя  $r$ . Из дискретных значений с помощью интерполяции Лагранжа строится вариант непрерывного поведения искомой матрицы [1].

На рис. 1–12 представлены компоненты электроупругой матрицы Неймана для трансверсального изотропного пьезокерамика (PZT-4). Для графито-эпоксидного моноклинического материала параметры материала приведены в табл. 5, а на рис. 13–18 представлены компоненты анизотропной матрицы Неймана.

Таблица 5

$c_{11}$	$c_{22}$	$c_{33}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{23}$	$c_{44}$	$c_{55}$	$c_{45}$	$c_{66}$	$c_{16}$	$c_{26}$	$c_{36}$
95.5	25.9	16.3	28.9	4.03	4.65	4.40	6.45	-1.78	32.7	44.7	15.6	0.54

Рис. 1. Компонента  $G_{11,1}$ Рис. 2. Компонента  $G_{11,2}$

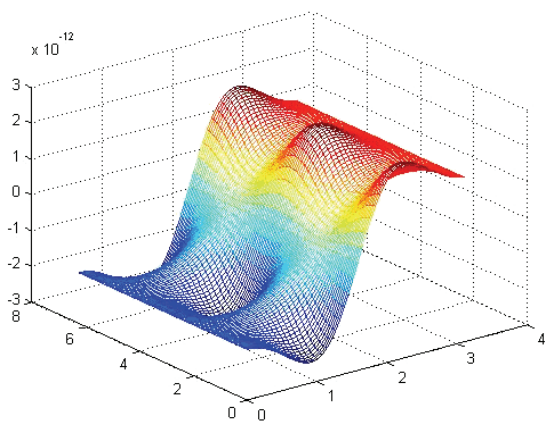


Рис. 3. Компонента  $G_{11,3}$

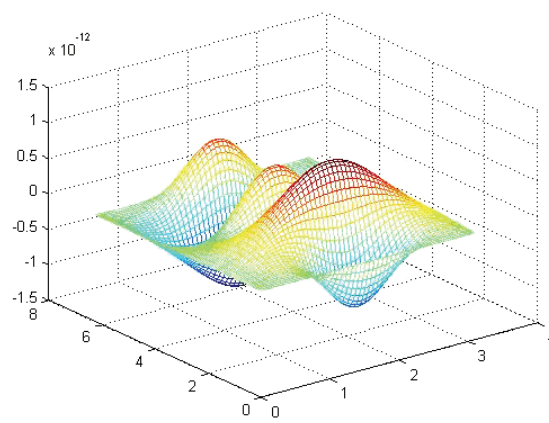


Рис. 4. Компонента  $G_{12,1}$

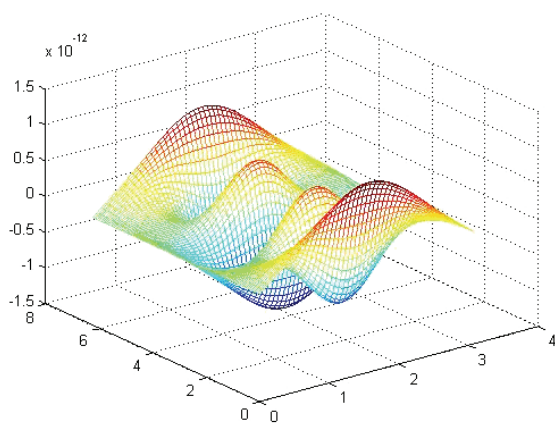


Рис. 5. Компонента  $G_{12,2}$

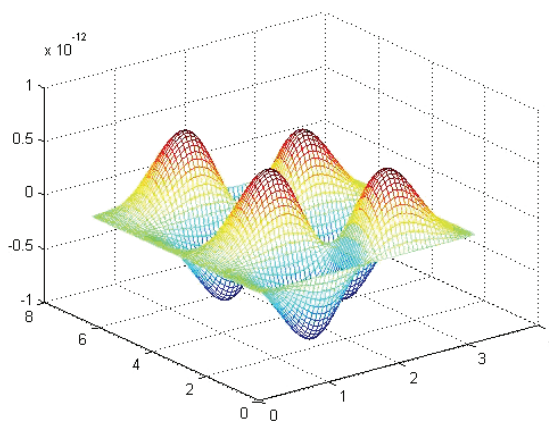


Рис. 6. Компонента  $G_{12,3}$

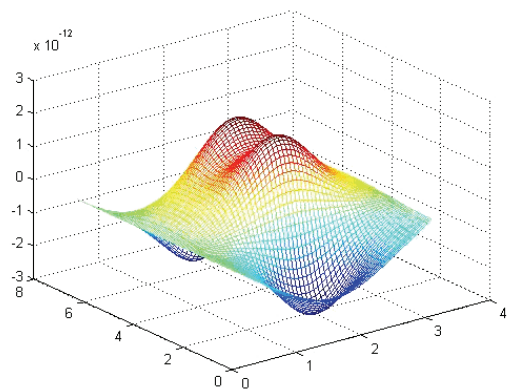


Рис. 7. Компонента  $G_{22,1}$

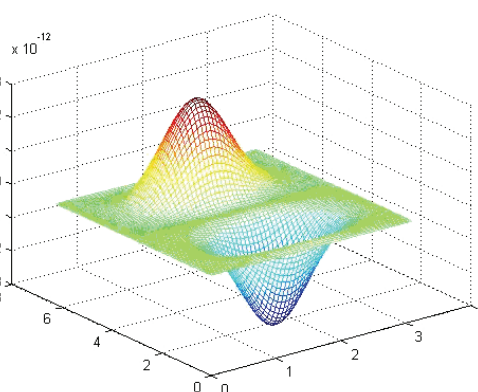


Рис. 8. Компонента  $G_{22,2}$

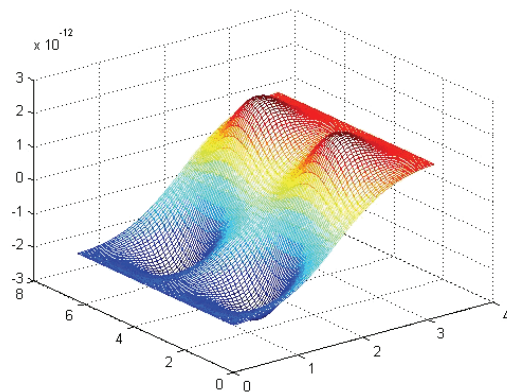


Рис. 9. Компонента  $G_{22,3}$

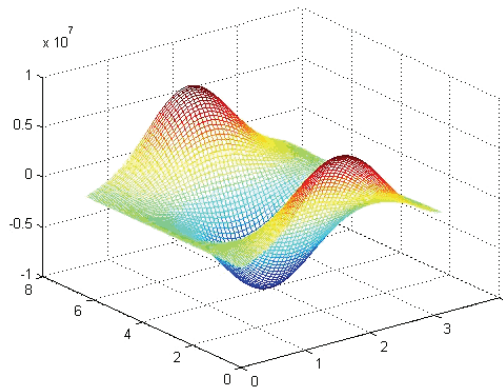
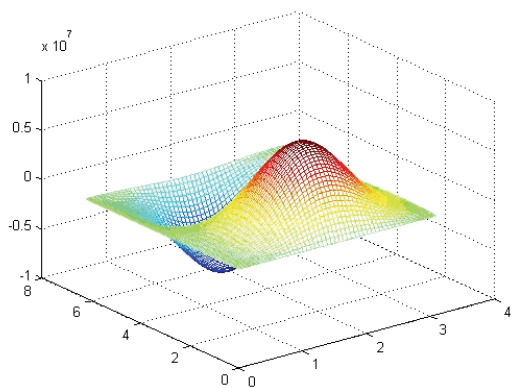
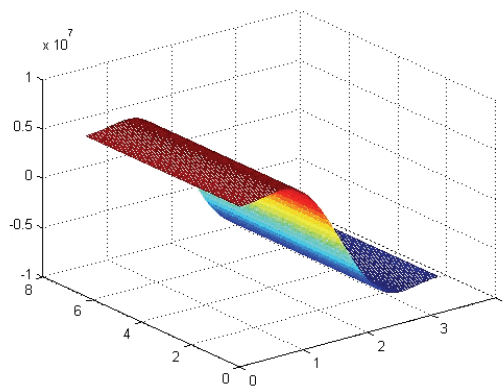
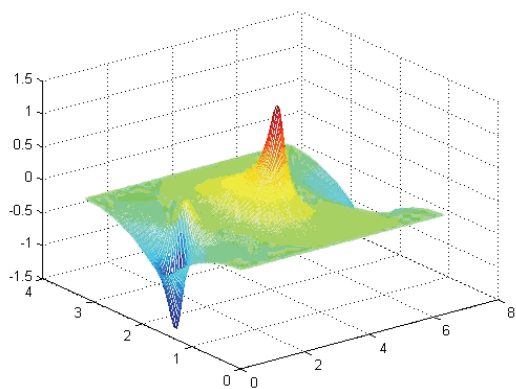
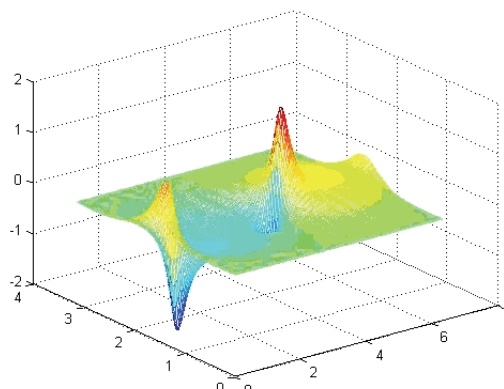
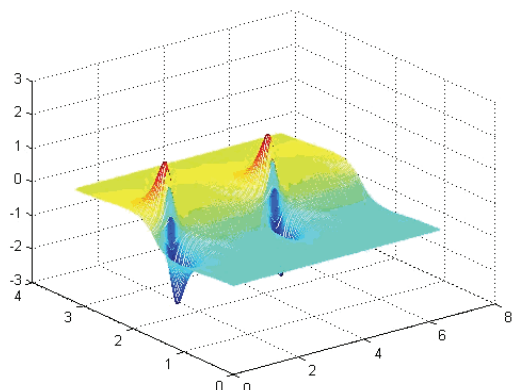
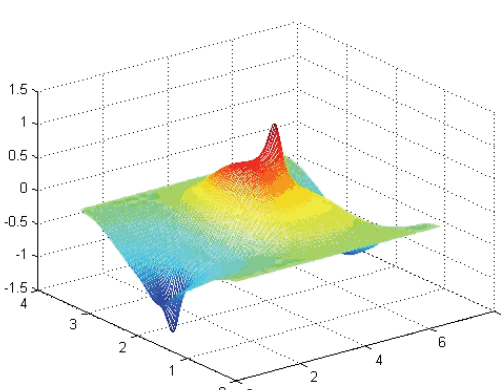
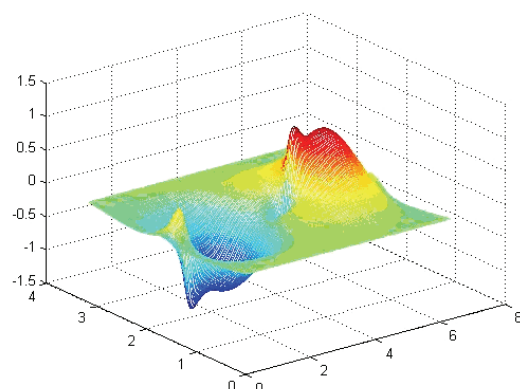
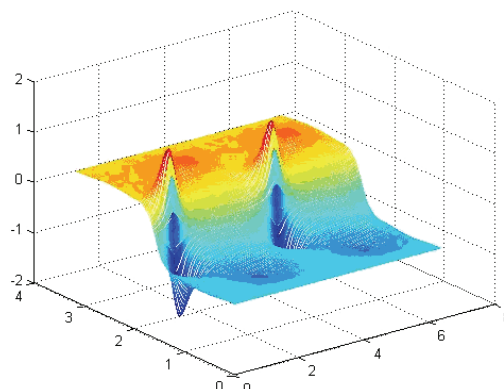


Рис. 10. Компонента  $G_{44,1}$

Рис. 11. Компонента  $G_{44,2}$ Рис. 12. Компонента  $G_{44,3}$ Рис. 13. Компонента  $G_{11,1}$ Рис. 14. Компонента  $G_{11,2}$ Рис. 15. Компонента  $G_{11,3}$ Рис. 16. Компонента  $G_{22,1}$ Рис. 17. Компонента  $G_{22,2}$ Рис. 18. Компонента  $G_{22,3}$

### Заключение

Описанное применение матриц Неймана в методе ГИУ благодаря использованию процедуры интерполяции, как этапа гранично-элементного моделирования, позволяет преодолеть неэффективность численного решения краевых (начально-краевых) задач трехмерной теории электроупругости. Представленные способы построения матриц Неймана позволяют получать значения необходимых компонент с высокой точностью. Вид компонент электроупругих матриц Неймана приводится впервые и позволяет учесть специфику их поведения при организации поэлементного численного интегрирования для получения коэффициентов дискретного аналога граничного интегрального уравнения.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и гранта РФФИ № 10-08-01017-а.*

#### Список литературы

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элемен-

тов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

2. Qing-Hua Qin. Green's function and boundary elements of multifield materials. Elsevier, 2007. 254 p.

3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.

4. Pan E., Tonon F. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids // International Journal of Solids Structures. 2000. **37**. P. 943–958.

5. Li X., Wang M. Three-dimensional Green's functions for infinite anisotropic piezoelectric media // International Journal of Solids Structures, 2007. **44**. P. 1680–1684.

6. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity – theory and applications // Oxford University Press. New York, 1996.

7. Dunn M.L., Wienecke H.A. Green's functions for transversely isotropic piezoelectric solids // International Journal of Solids Structures. 1996. **33**. P. 4571–4581.

8. Dunn M.L., Taya M. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities // Proc. R. Soc. Lond. 1993. **A443**. P. 265–287.

9. Burovi F.C., Saez A. Three-dimensional Green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto-electro-elastic coupling // Proc. R. Soc. 2010. **A466**. P. 515–537.

### STRESSES IN A THREE-DIMENSIONAL ELECTRIC ELASTIC MEDIUM CAUSED BY A LUMPED SOURCE

*L.A. Igumnov, V.P. Pazin, A.N. Petrov*

Infinite 3D anisotropic and electric elastic media are considered. Two approaches to obtain matrix solutions on the basis of a unified formalization have been presented. The first one permits to obtain matrix solutions in the form of an integral representation, whereas the second one, in the form of an analytical formula using root sets of functional solution matrices. The components of the obtained representations of matrix solutions have been numerically built for specific material properties. The results have been compared with those available elsewhere. Visualization of matrix solutions in the form of surfaces has been presented.

*Keywords:* Neumann matrix, 3D formula, anisotropic elasticity, electric elasticity, numerical simulation (modeling).