УДК 539.3:534.1

ОБ ИМПУЛЬСЕ ВОЛН ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Г.Г. Денисов [1], *В.В. Новиков* [2], *М.Л. Смирнова* [2]

[1] НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

novikov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 20.04.2010

Рассматриваются малые продольные колебания одномерной упругой системы в квадратичном приближении. Определены значения импульса волн, возбуждаемых при колебаниях, при различных начальных условиях. Показано, что возможна генерация как группы волн, бегущих в разные стороны, но с нулевым суммарным импульсом, так и волн, бегущих в одном направлении, но с постоянным по величине импульсом. Обсуждается корректность формального применения понятия «волнового импульса» для решения данной задачи.

Ключевые слова: упругая среда, волна, импульс, нелинейность, начальные условия.

Существуют разноречивые мнения о том, несет ли волна импульс и каков механизм воздействия волн на границу среды. В литературе имеются утверждения как об обязательном наличии импульса у волн [1–3], так и о полном его отсутствии [4, 5]. В работах [6, 7] для исследования волновых движений в средах введена величина, названная «волновым импульсом». Авторы не придавали особого физического смысла «волновому импульсу», а лишь обозначили так в своих выкладках определенное выражение. Однако звучное название и необоснованные аналогии с электромагнитными волнами привели к недоразумению, выразившемуся в том, что в некоторых работах (например, [8–10]) «волновой импульс» отождествляется с реальным импульсом волны. И это несмотря на то, что данная величина квадратична по амплитуде деформаций, ее используют при решении задач о волновых движениях в средах и воздействии волн на границы среды в линейной постановке.

В [11] рассмотрены примеры, иллюстрирующие неправомерность использования величины «волнового импульса» для решения задачи об импульсе волн. В работе [12] для случая плоских движений идеального газа показано, что наличие или отсутствие импульса у волны в безграничной среде определяется начальными условиями. При этом для определения импульса недостаточно первого приближения при решении уравнений гидродинамики – необходимо рассматривать величины второго порядка малости по амплитуде распространяющихся в среде возмущений.

Цель данной работы – на простом примере одномерной упругой системы продемонстрировать, что для ответа на вопрос об импульсе волны и ее воздействии на преграду необходимо рассматривать задачу о волновом движении в среде в нелинейной постановке, а «волновой импульс» является лишь частью импульса волны и не имеет самостоятельного значения.

Рассмотрим продольные колебания стержня. Уравнения движения запишем, исходя из плотности функции Лагранжа $\lambda = \frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}ESu_x^2$, где $u(x,t)$ – продольные смещения, ρ – возмущенное значение погонной плотности, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения стержня. Для нашей цели достаточно ограничиться учетом нелинейности, связанной с изменением погонной плотности за счет деформирования стержня. Выражение для ρ получим из условия равенства массы элементарного участка dx до и после деформации: $\rho dl = \rho_0 dx$, где $dl = du + dx$, ρ_0 – невозмущенное значение плотности. Отсюда, в силу малости деформаций, $\rho = \rho_0(1 - u_x)$.

Уравнение движения стержня с точностью до квадратичных членов имеет вид:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} - 2u_{xt}u_t - u_x u_{tt} = 0, \; a^2 = \frac{ES}{\rho_0}.$$

Представив продольные смещения стержня $u(x,t)$ в виде суммы величин первого и второго порядка малости $u = u_1 + u_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$u_{1tt} - a^2 u_{1xx} = 0\,, \qquad (1)$$

$$u_{2tt} - a^2 u_{2xx} - u_{1x}u_{1tt} - 2u_{1t}u_{1xt} = 0\,. \qquad (2)$$

Выражение для плотности импульса $p = \dfrac{\partial\lambda}{\partial u_t}$ с учетом квадратичных членов запишется в виде:

$$p = \rho_0(1 - u_x)u_t = \rho_0 u_{1t} - \rho_0 u_{1x}u_{1t} + \rho_0 u_{2t}\,.$$

Интегрированием по занимаемой волной области получим выражение импульса $P = \int p dx$. Видно, что значение импульса складывается из трех компонент:

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)}\,. \qquad (3)$$

Здесь $P^{(1)} = \int p^{(1)} dx = \int \rho_0 u_{1t} dx$ – линейная часть импульса волн первого приближения. При рассмотрении линейного случая данное выражение дает полное решение задачи об импульсе волн. Второе и третье слагаемые в (3) обусловлены учетом нелинейности. Выражение $P^{(2)} = \int p^{(2)} dx = -\int \rho_0 u_{1x}u_{1t} dx$ определяет вклад волн первого приближения в квадратичную часть импульса. Составляющая $P^{(3)} = \int p^{(3)} dx = \int \rho_0 u_{2t} dx$ зависит от решения уравнения (2) для второго приближения.

Покажем, что в зависимости от начальных условий могут обращаться в нуль как отдельные составляющие импульса, так и импульс в целом.

Решение уравнения первого приближения (1) при произвольных начальных условиях имеет вид $u_1 = f_1(x - at) + f_2(x + at)$, где f_1 и f_2 – функции, характеризующие волны, бегущие вправо и влево соответственно.

Рассмотрим такие начальные условия, что в первом приближении возбуждается только волна, бегущая вправо, т.е. $u_1 = f(x - at)$. Это будет при условии $u_{1t}(x,0) = -af_x(x)$. Предположим также, что в начальный момент времени волна с профилем $f(x)$ занимает положение $0 \le x \le l$.

Уравнение второго приближения (2) после подстановки в него u_1 принимает вид

$$u_{2tt} - a^2 u_{2xx} = \frac{3a^2}{2}\left[f_x^2(x - at)\right]_x.$$

При начальных условиях $u_2\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_{2t}\big|_{t=0} = \psi(x)$ его решение дается формулой Даламбера для неоднородного волнового уравнения

$$u_2 = \frac{1}{2}\{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{3a}{4}\int\limits_0^t dt'\int\limits_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')}\left[f_\xi^2(\xi - at')\right]_\xi d\xi.$$

Выражение для скорости продольных смещений стержня u_t принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{1t} + u_{2t} = -af_x(x - at) + \\ &+ \frac{a}{2}\left[\varphi_x(x + at) - \varphi_x(x - at)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\psi(x + at) + \psi(x - at)\right] + \\ &+ \frac{3a}{8}\left[f_x^2(x + at) - f_x^2(x - at) + \right. \\ &\left. + 2at\left[f_x^2(x - at)\right]_x\right]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Вычислим импульс этой группы волн. Линейная часть $P^{(1)}$ импульса (3) определяется значением функции f, описывающей волну первого приближения, на концах интервала $0 \le x - at \le l$:

$$P^{(1)} = -\rho_0 a\int\limits_{at}^{at+l} f_x(x - at)dx = -\rho_0 a\left[f(l) - f(0)\right].$$

Данная величина отлична от нуля лишь при разрывах продольных смещений на границе области возмущения. Такое условие является нефизичным, поэтому в дальнейшем полагаем $f(0) = f(l) = 0$. Таким образом, возмущение первого приближения с нулевыми начальными условиями на концах интервала импульса не имеет.

Второе слагаемое в (3) принимает значение $P^{(2)} = -\rho_0 a\int\limits_{at}^{at+l} u_{1x}u_{1t}dx = \rho_0 a\int\limits_0^l f_x^2(x)dx$. Данная составляющая импульса постоянна, направлена в сторону движения волны. Это и есть часть импульса, называемая «волновым импульсом».

Определим вклад решения для волн второго приближения в выражение импульса в частном случае, предполагая нулевыми соответствующие им начальные условия: $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. Из выражения (4) имеем

$$u_{2t} = \frac{3a}{8}\left[f_x^2(x+at) - f_x^2(x-at) + \right.$$
$$\left. + 2at\left[f_x^2(x-at)\right]_x \right].$$

Начальное линейное возмущение, движущееся в положительном направлении оси x (прямая волна), с течением времени распадается на обратную волну (первое слагаемое в этом выражении) и прямую волну (последние два члена). Первоначально области определения этих волн перекрываются, а при $at > \frac{l}{2}$ каждая из волн занимает свой интервал, вне которого возмущения отсутствуют. Волны становятся изолированными и могут рассматриваться раздельно. Профиль прямой волны изменяется, в силу чего при некотором достаточно большом времени происходит так называемое опрокидывание волны (термин, хорошо известный в динамике волн). Множитель t в третьем члене отражает начало процесса опрокидывания. Импульс данной группы волн имеет вид

$$P^{(3)} = \frac{3\rho_0 a}{8}\left\{ \int_{-at}^{-at+l} f_x^2(x+at)dx - \right.$$
$$\left. - \int_{at}^{at+l} f_x^2(x-at)dx + 2at\left[f_x^2(l) - f_x^2(0)\right]\right\}.$$

При дополнительном условии $f_x(0) = f_x(l) = 0$ эти волны, образовавшиеся за счет нелинейности системы, импульса не несут.

Таким образом, в случае нулевых начальных условий для волн второго приближения суммарный импульс всей группы волн равен $P = P^{(2)} = \rho_0 a \int_0^l f_x^2(x)dx$. Подчеркнем, что $P^{(2)}$ вычисляется по первому приближению, но имеет второй порядок малости.

Рассмотрим теперь случай, когда во втором приближении образуются только волны, бегущие вправо, т.е. в том же направлении, что и начальное линейное возмущение. Это имеет место при условиях $a\varphi_x(x) + \psi(x) + \frac{3a}{4} f_x^2(x) = 0$.

Второе приближение для скорости смещения приводится к виду

$$u_{2t} = \psi(x-at) + \frac{3a^2}{4} t\left[f_x^2(x-at)\right]_x,$$

а импульс волн второго приближения будет таким:

$$P^{(2)} + P^{(3)} = \rho_0 a \int_0^l f_x^2(x)dx + \rho_0 \int_0^l \psi(x)dx +$$
$$+ \frac{3\rho_0 a}{4} t\left[f_x^2(l) - f_x^2(0)\right]. \qquad (5)$$

При $f_x^2(l) = f_x^2(0)$ импульс этих волн постоянен, определяется начальными условиями, заданными для $0 < x < l$, и может быть как положительным или отрицательным, так и нулевым. Положительному импульсу соответствует избыток средней плотности в колеблющейся нелинейной среде, а отрицательному – недостаток средней плотности. Этим объясняется появление первых двух членов в (5). Составляющая же импульса, пропорциональная t, обусловлена наличием скорости смещения центра масс волны с изменяющимся профилем относительно интервала $[0, l]$. Аналогом отрицательного импульса, когда его направление противоположно направлению движения волны, в дискретной системе может служить отрицательная масса, а импульсу, вызванному скоростью смещения центра масс волны, аналога в дискретных системах нет.

Вопрос об импульсе волн в упругой среде, вызвавший много дискуссий, разрешается очень просто в одномерной однородной системе. Наличие или отсутствие импульса волн в упругой среде определяется начальными условиями, причем вычисление импульса и силы, с которой волна действует на границу среды, требует рассмотрения нелинейной задачи. Так называемый «волновой импульс» является одной из составляющих импульса. В частном случае нулевых начальных условий для волн второго приближения «волновой импульс» совпадает с импульсом. Однако этот факт нельзя обобщать. Упрощенное рассмотрение волнового процесса в рамках линейной задачи с якобы присущим волнам «волновым импульсом» неправомерно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00411).

Список литературы

1. Рэлей. Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 2. 475 с.
2. Кадомцев Б.Б., Рыдник В.И. Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981. 150 с.
3. Миллер М.А., Островский Л.А. Волны. В кн.: Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1988. Т. 1. С. 315–328.
4. Brilloin L. Sur les tensions de radiation // Annale de Physique. 1925. V. 4. P. 528–586.

5. Мак-Интайр М. Миф о волновом импульсе. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 454–476.

6. Лич Дж.У. Классическая механика. М.: ИЛ, 1961. 172 с.

7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

8. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

9. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.

10. Potapov A.I., Maugin G.A., Trimarco C. Wave momentum and radiative stresses in elastic solids // Mathematics and Mechanics of Solids. 2005. V. 10, № 4. P. 441–460.

11. Денисов Г.Г. О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 42–51.

12. Денисов Г.Г. К вопросу об импульсе волны, радиационном давлении и других величинах в случае плоских движений идеального газа // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 390–402.

ON WAVE MOMENTUM IN THE CASE OF LONGITUDINAL VIBRATIONS OF AN ELASTIC ROD

G.G. Denisov, V.V. Novikov, M.L. Smirnova

Small longitudinal vibrations of a one-dimensional elastic system are considered in the quadratic approximation. The momentum values of the waves excited by vibrations have been obtained under different initial conditions. A possibility has been shown to generate either a group waves traveling in opposite directions with zero total momentum or a group of waves traveling in the same direction with constant momentum. The correctness of the formal application of “wave momentum” to the problem solution is discussed.

Keywords: elastic medium, wave, momentum, nonlinearity, initial conditions.