

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

УЛИТКА ПАСКАЛЯ – ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ КУБИЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2010 г.

Т.А. Дружкова, Е.А. Сиротина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dynamics@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 07.06.2010

Построено все множество кубических дифференциальных уравнений, в семействе интегральных кривых которых присутствует алгебраическая кривая четвертого порядка – улитка Паскаля. Выделено однопараметрическое семейство таких уравнений, для которых улитка Паскаля является предельным циклом.

Ключевые слова: кубическое дифференциальное уравнение, улитка Паскаля, частный алгебраический интеграл, предельный цикл, круг Пуанкаре.

В 1878 году Дарбу ввел понятие частного алгебраического интеграла и предложил метод построения без квадратур общего интеграла дифференциального уравнения, обладающего достаточным количеством таких частных интегралов [1]. С середины XX века в печати стали появляться статьи, авторы которых проводили качественное исследование полиномиальных дифференциальных уравнений

$$P_n(x, y)dy - Q_n(x, y)dx = 0, \quad n \in N \quad (1)$$

(n – степень многочленов $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$), с теми или иными частными алгебраическими интегралами. Одной из первых публикаций такого рода явилась статья Цинь Юань-сюня 1958 года [2], в которой изучен весь класс квадратных уравнений ($n = 2$) с алгебраическим предельным циклом второй степени – эллипсом. В 1966 году впервые были обнаружены квадратичные же уравнения, для которых предельным циклом являлась алгебраическая кривая четвертого порядка [3]. В 2004 году в фундаментальной статье [4] приведен обзор исследований квадратичных систем с алгебраическими предельными циклами четвертого порядка: указаны все семейства алгебраических кривых четвертой степени, которые только и могут служить предельными циклами. В 2005 году получены квадратичные системы с алгебраическими предельными циклами пятой и шестой степеней [5]. В работах [6, 7] приводятся примеры уравнений (1) с произвольно зафиксированной степенью n многочленов $P_n(x, y)$, $Q_n(x, y)$, обладающих изо-

лированной алгебраической интегральной кривой сколь угодно большой степени, не зависящей от n .

Результаты и методы изучения полиномиальных динамических систем, обладающих алгебраическими инвариантными кривыми, изложены и в многочисленных работах сотрудников кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа Нижегородского госуниверситета, например [8, 9].

Авторы настоящей статьи изучали квадратичные и кубические ($n = 3$) уравнения (1), среди интегральных кривых которых находятся так называемые знаменитые алгебраические кривые [10]. Кривые эти в свое время были введены в науку и изучены как самостоятельные объекты многими известными математиками прошлого. Нами рассмотрено восемь таких кривых. Выяснилось, что три из них – овалы Кассини, лемниската Бернулли и конхоида Никомеда – вообще не могут являться интегральными кривыми квадратичных дифференциальных уравнений. Для каждой из пяти других кривых – улитка Паскаля, декартов лист, трисектриса Маклорена, кубика Чирнгаузена, строфоида – построен и изучен весь класс квадратичных дифференциальных уравнений [11, 12]. При этом каждое из полученных уравнений оказалось алгебраически интегрируемым, т.е. обладающим целым семейством алгебраических интегральных кривых, а значит, не имеет предельных циклов.

В настоящей статье приводится построение и изучение кубических дифференциальных уравнений (1) с улиткой Паскаля в качестве одной из интегральных кривых. Показано, что при определенных значениях параметров – коэффициентов многочленов $P_3(x, y)$, $Q_3(x, y)$ – улитка Паскаля является предельным циклом. Построены фазовые портреты.

Построение класса кубических дифференциальных уравнений с улиткой Паскаля в качестве интегральной кривой

Рассматривается кубическое дифференциальное уравнение

$$P_3(x, y)dy - Q_3(x, y)dx = 0, \quad (2)$$

где $P_3(x, y)$, $Q_3(x, y)$ – многочлены не выше третьей степени от действительных переменных и с действительными коэффициентами, взаимно простые над полем действительных чисел, причем хотя бы один из этих многочленов имеет степень, равную трем:

$$P \equiv P_3(x, y) \equiv p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3 + p_{20}x^2 +$$

$$+ p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{10}x + p_{01}y + p_{00},$$

$$Q \equiv Q_3(x, y) \equiv q_{30}x^3 + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3 + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + q_{10}x + q_{01}y + q_{00}.$$

Алгебраическая кривая четвертого порядка – улитка Паскаля

$$f \equiv f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - ax)^2 - \quad (3)$$

$$- l^2(x^2 + y^2) = 0, \quad a > 0, \quad l > 0, \quad a \neq l,$$

является интегральной кривой уравнения (2) тогда и только тогда [1], когда существует такой многочлен

$$R \equiv R_2(x, y) \equiv r_{20}x^2 + r_{11}xy + \quad (4)$$

$$+ r_{02}y^2 + r_{10}x + r_{01}y + r_{00},$$

что выполняется тождество

$$\frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q \equiv f R. \quad (5)$$

В рассматриваемом случае (5) представляет собой тождественное равенство двух многочленов шестой степени переменных x , y . От приравнивания друг другу соответствующих коэффициентов в левой и правой частях этого тождества получается система из 28 нелинейных алгебраических уравнений с 26 неизвестными – коэффициентами многочленов P , Q , R . Непосредственное решение этой системы позволяет следующим образом однозначно выразить 15 из

20 коэффициентов многочленов P и Q и все 6 коэффициентов многочлена R , например, через коэффициенты p_{03} , q_{03} , q_{21} , q_{12} , q_{02} дифференциального уравнения и два параметра a и l улитки Паскаля :

$$p_{30} = \frac{3}{4}q_{03} + \frac{1}{4}q_{21} \quad p_{21} = 5p_{03} + 4q_{12},$$

$$p_{12} = \frac{7}{4}q_{03} - \frac{3}{4}q_{21},$$

$$p_{02} = \frac{3a^2 + l^2}{4a}q_{03} + \frac{a^2 - l^2}{4a}q_{21},$$

$$p_{11} = \frac{l^2 - 3a^2}{a}p_{03} + \frac{l^2}{a}q_{12} + 4q_{02},$$

$$p_{20} = -\frac{3}{2}aq_{03} - \frac{1}{2}aq_{21},$$

$$p_{10} = \frac{3(a^2 - l^2)}{4}q_{03} + \frac{a^2 - l^2}{4}q_{21},$$

$$p_{01} = -l^2p_{03} + \frac{l^2}{a}q_{02}, \quad (6)$$

$$p_{00} = 0, \quad q_{00} = 0, \quad q_{01} = \frac{a^2 - l^2}{4}(3q_{03} + q_{21}),$$

$$q_{10} = \frac{a^2 - l^2}{a}(q_{02} - ap_{03}),$$

$$q_{20} = \frac{4a^2 - l^2}{a}p_{03} + \frac{a^2 - l^2}{a}q_{12} - 3q_{02},$$

$$q_{30} = -4p_{03} - 3q_{12},$$

$$q_{11} = \frac{-8a^2 - l^2}{4a}q_{03} + \frac{l^2 - 4a^2}{4a}q_{21};$$

$$r_{20} = 3q_{03} + q_{21}, \quad r_{11} = 4p_{03} + 4q_{12},$$

$$r_{02} = 4q_{03},$$

$$r_{10} = -\frac{3}{2}a(q_{21} + 3q_{03}), \quad r_{01} = -2ap_{03} + 4q_{02}, \quad (7)$$

$$r_{00} = \frac{a^2 - l^2}{2}(3q_{03} + q_{21}).$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Улитка Паскаля (3) является интегральной кривой кубического дифференциального уравнения (2) в том и только том случае, когда 15 из 20 коэффициентов этого уравнения могут быть представлены как функции пяти произвольных его коэффициентов p_{03} , q_{03} , q_{21} , q_{12} , q_{02} и двух параметров a и l улитки по формулам (6).

Подчеркнем, что при нахождении коэффициентов дифференциального уравнения (2) принципиально важно, что улитка Паскаля не вырождается в кардиоиду, т.е. в уравнении (3) $a \neq l$. Для кардиоды дифференциальное уравнение получается иное, как это уже отмечалось и в других работах с улиткой Паскаля [11, 12].

Построение класса кубических дифференциальных уравнений с улиткой Паскаля в качестве предельного цикла

Понятно, что начало координат плоскости XOY является особой точкой построенного дифференциального уравнения при любых значениях пяти его произвольных коэффициентов p_{03} , q_{03} , q_{21} , q_{12} , q_{02} и указанных в (3) значениях параметров a и l улитки. Корни характеристического уравнения для этой особой точки, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(a^2 - l^2)(q_{21} + 3q_{03}) \pm \frac{l}{a}(q_{02} - ap_{03})\sqrt{a^2 - l^2}$, свидетельствуют о том, что если $(q_{21} + 3q_{03}) \times (q_{02} - ap_{03}) \neq 0$, то точка эта является фокусом при $a^2 < l^2$, что согласуется с формой самой улитки Паскаля, для которой $(0; 0)$ является либо точкой самопересечения, либо изолированной, в зависимости от соотношений между параметрами a и l (рис. 1).

Однако полное исследование построенного пятипараметрического семейства дифференциальных уравнений, да еще с произвольно взятой кривой из двухпараметрического семейства (3), не представляется возможным ввиду трудностей даже с нахождением формул для вычисления координат особых точек дифференциального уравнения как функций всех семи параметров. Поэтому настоящая работа ограничивается доказательством утверждения, что в построенном семействе дифференциальных уравнений существуют такие, для которых улитка Паскаля является не просто интегральной кривой, а предельным циклом.

Наложим следующие ограничения, упрощающие решение поставленной задачи:

1) пусть в уравнении (3) улитки Паскаля $a = 1$, что не сужает общности исследования, ибо к этому случаю можно прийти линейной однородной заменой переменных x и y , а также по-

ложим $l = 2a$ – при этом условии овал улитки уже выпуклый;

2) из пяти коэффициентов-параметров дифференциального уравнения свободным оставим лишь один $q_{02} \equiv q$, придав остальным четырем коэффициентам следующие конкретные значения: $p_{03} = 1$, $q_{03} = 0$, $q_{21} = 4$, $q_{12} = 0$.

Таким образом, дальнейшему исследованию подлежит следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 4x^2y - 3qx^2 + qy^2 + 3(1-q)x - 3y}{x^3 + 5x^2y - 3xy^2 + y^3 - 2x^2 + (1+4q)xy - 3y^2 - 3x + 4(q-1)y} \equiv \frac{Q}{P}, \quad (8)$$

для которого при любом действительном значении параметра q улитка Паскаля

$$f \equiv f(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - x)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0 \quad (9)$$

является интегральной кривой, а $(0; 0)$ – особой точкой типа фокус или узел.

Тем не менее, и для однопараметрического семейства уравнений (8) нахождение координат особых точек как функций параметра q весьма затруднительно. На помощь приходит единственно известная интегральная кривая этого уравнения – улитка Паскаля. Как следует из тождества (5), особые точки любого уравнения (1) с алгебраической интегральной кривой $f \equiv f(x, y) = 0$ располагаются только либо на этой алгебраической интегральной кривой, либо на кофакторе [13] – вспомогательной алгебраической кривой $R \equiv R(x, y) = 0$, вообще говоря, интегральной кривой не являющейся. Для дифференциального уравнения (8) и улитки Паскаля (9) кофактор имеет следующий конкретный вид:

$$R \equiv R(x, y) \equiv 4x^2 + 4xy - 6x + (4q - 2)y - 6 = 0. \quad (10)$$

Поэтому для нахождения координат всех особых точек уравнения (8) необходимо и достаточно исследовать следующие две системы, каждая из которых состоит из трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными x , y , q :

$$\begin{cases} P \equiv x^3 + y^3 + 5x^2y - 3xy^2 - 2x^2 - 3y^2 + \\ \quad + (4q + 1)xy - 3x + 4(q - 1)y = 0, \\ Q \equiv -3qx^2 - 4x^3 + 4x^2y + qy^2 - \\ \quad - 3(q - 1)x - 3y = 0, \\ f \equiv x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 - \\ \quad - 3x^2 - 4y^2 = 0; \end{cases} \quad (11)$$

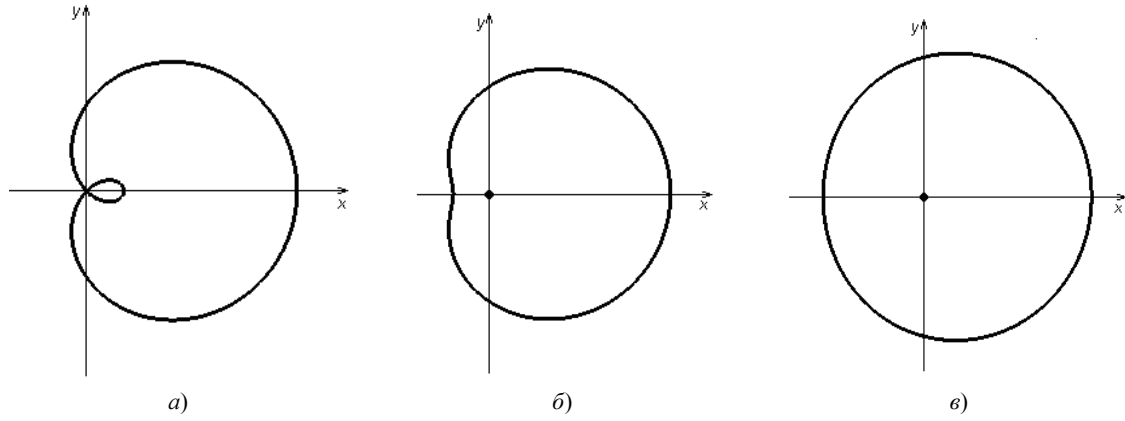


Рис. 1. Зависимость формы улитки Паскаля от соотношений между параметрами a и l : а) $0 < l < a$, б) $a < l < 2a$, в) $2a \leq l$

$$\begin{cases} P \equiv x^3 + y^3 + 5x^2y - 3xy^2 - 2x^2 - 3y^2 + \\ + (4q+1)x - 3x + 4(q-1)y = 0, \\ Q \equiv -3qx^2 - 4x^3 + 4x^2y + qy^2 - \\ - 3(q-1)x - 3y = 0, \\ R \equiv 4x^2 + 4xy - 6x + (4q-2)y - 6 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Система (11) связывает с параметром q координаты особых точек уравнения, находящихся на улитке Паскаля. Заметим, что точка $(-1; 0)$, принадлежащая улитке, не является особой точкой дифференциального уравнения (8) ни при каком *конечном* значении параметра q . Пара чисел $x = y = 0$, напротив, удовлетворяет этой системе при любом действительном значении параметра q . Кроме того, система (11) имеет следующие два семейства решений:

$$M_1(x_1, y_1, q_1) \equiv \begin{cases} -1 < x_1 \leq 3, \\ y_1 \equiv y_1(x_1) \equiv \sqrt{2 + x_1 - x_1^2 + 2\sqrt{x_1 + 1}}, \\ q_1 \equiv q_1(x_1) \equiv -\frac{1}{2x_1(x_1 + 1)}(x_1 - \sqrt{2 + x_1 - x_1^2 + 2\sqrt{x_1 + 1}})(2x_1^2 + x_1 - 1 + \sqrt{x_1 + 1}); \end{cases}$$

$$M_2(x_2, y_2, q_2) \equiv \begin{cases} -1 < x_2 \leq 3, \\ y_2 \equiv y_2(x_2) \equiv (-\sqrt{2 + x_2 - x_2^2 + 2\sqrt{x_2 + 1}}), \\ q_2 \equiv q_2(x_2) \equiv -\frac{1}{2x_2(x_2 + 1)}(x_2 + \sqrt{2 + x_2 - x_2^2 + 2\sqrt{x_2 + 1}})(2x_2^2 + x_2 - 1 + \sqrt{x_2 + 1}). \end{cases}$$

Точка $A_1(x_1, y_1)$ – произвольная точка верхней половины овала графика улитки Паскаля, точка $A_2(x_2, y_2)$ – нижней. Каждая из этих точек является особой точкой дифференциального уравнения только при значении параметра q , вычисляемого по формулам $q = q_1(x_1)$ или

$q = q_2(x_2)$ соответственно. Приводимые ниже графики функций $q = q_1(x)$ и $q = q_2(x)$ позволяют проследить появление этих особых точек $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ на улитке Паскаля, их продвижение по улитке и исчезновение в зависимости от изменения параметра q (рис. 2–4).

Рис. 2 дает возможность утверждать, что при $q = -\infty$ точка $(-1; 0)$ улитки является особой точкой дифференциального уравнения, которая с ростом параметра q монотонно перемещается вверх по улитке, достигая при $q = \frac{3}{2}$ точки $(0; 2)$ (рис. 5). При $q = -\frac{11}{4}$ в точке $(3; 0)$ улитки появляется еще одна особая точка, которая с ростом параметра q тоже перемещается по верхней части улитки, достигая той же точки

$(0; 2)$ при том же значении параметра $q = \frac{3}{2}$. Таким образом, по достижении параметром q значения $\frac{3}{2}$ две особые точки, находящиеся на верхней половине улитки, сливаются в одну, $(0; 2)$, и при дальнейшем увеличении q на верх-

ней половине улитки Паскаля действительных особых точек нет.

Аналогично по рис. 3 прослеживается динамика поведения особых точек дифференциального уравнения (8), находящихся на нижней половине овала улитки Паскаля. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. При любом конкретном значении параметра $q \leq \frac{3}{2}$ на овале улитки находятся от одной до четырех особых точек дифференциального уравнения (8); при $q > \frac{3}{2}$ овал улитки Паскаля от особых точек свободен.

Система (12) содержит информацию о тех особых точках дифференциального уравнения (8), координаты которых удовлетворяют урав-

нению кофактора (10), и имеет семейство решений

$$M_3(x_3, y_3, q_3) \equiv \begin{cases} -\infty < x_3 < +\infty, \\ y_3 \equiv y_3(x_3) \equiv 3(x_3 + 1), \\ q_3 \equiv q_3(x_3) \equiv \frac{3 - 4x_3^2}{3(x_3 + 1)}. \end{cases}$$

Следовательно, точки $A_3(x_3, y_3)$, координаты которых удовлетворяют кофактору (10), на плоскости XOY находятся на прямой $y = 3(x + 1)$ и являются особыми точками дифференциального уравнения лишь при значении параметра q , вычисленном по формуле $q = q_3(x_3)$. График функции $q = q_3(x)$, гипер-

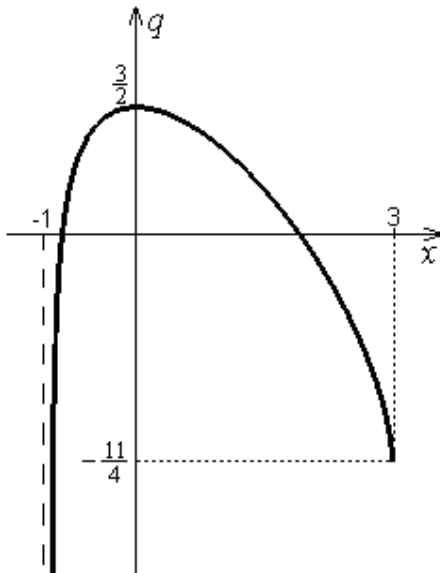


Рис. 2. График функции $q = q_1(x)$

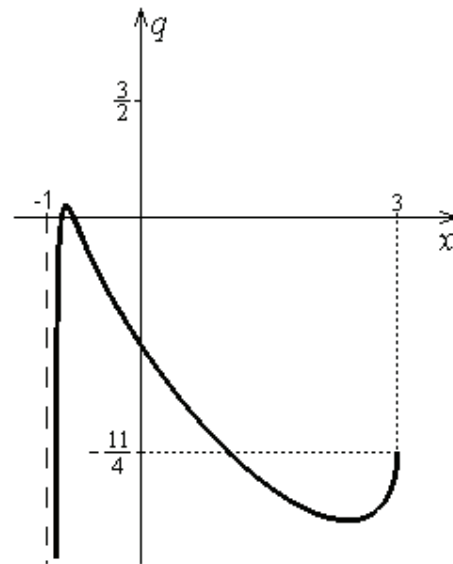


Рис. 3. График функции $q = q_2(x)$

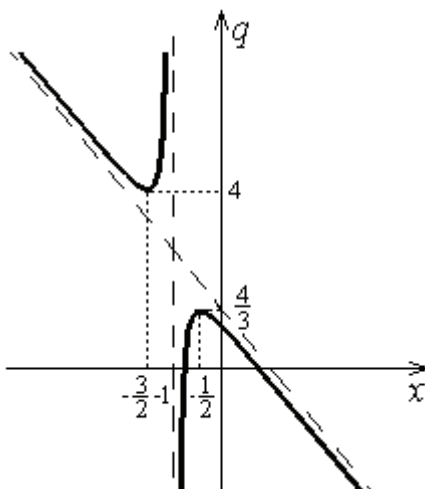


Рис. 4. График функции $q = q_3(x)$

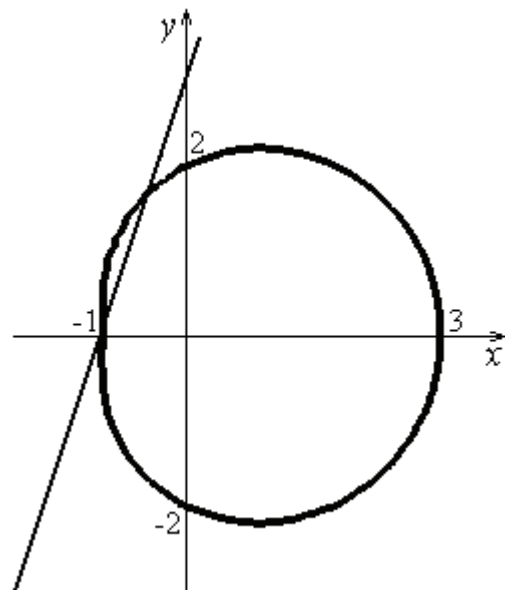


Рис. 5. График улитки Паскаля и прямой $y = 3(x + 1)$

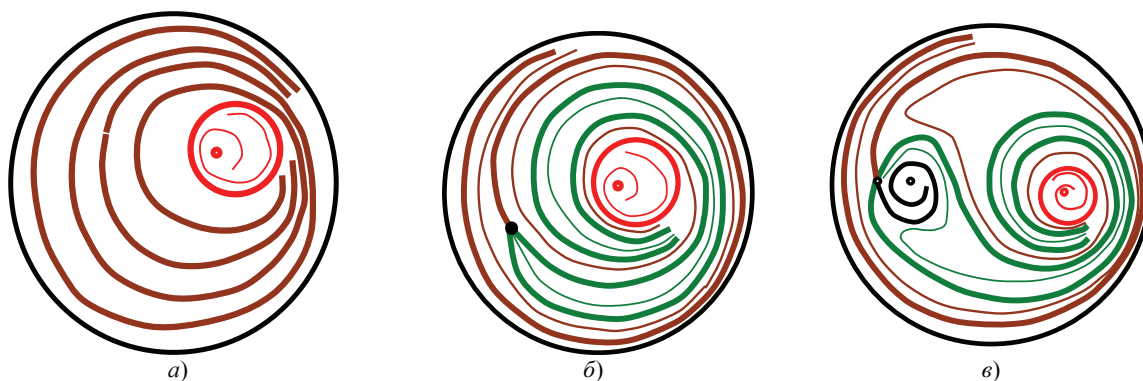


Рис. 6. Картины поведения семейства интегральных кривых: а) $\frac{3}{2} < q < 4$; б) $q = 4$; в) $q > 4$

бола, представлен на рис. 4. Этот график дает возможность проследить перемещение особых точек дифференциального уравнения по прямой $y = 3(x + 1)$ с изменением параметра q от $-\infty$ до $+\infty$.

При $q = \frac{4}{3}$ уравнению кофактора удовлетворяют координаты единственной особой точки $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$. При любом $q \in (-\infty; \frac{4}{3})$ на прямой $y = 3(x + 1)$ находятся две особые точки дифференциального уравнения (8), которые с убыванием q разбегаются по этой прямой от точки $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$: одна – к точке $(-1; 0)$, другая – вверх по прямой в бесконечность (см. рис. 5).

Если $q \in (\frac{4}{3}; 4)$, на прямой $y = 3(x + 1)$ действительных особых точек нет. При значении параметра $q = 4$ на кофакторе вновь появляется особая точка дифференциального уравнения $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$. Если $q \in (4; +\infty)$, на прямой $y = 3(x + 1)$ находятся две особые точки, с ростом q расходящиеся по этой прямой от точки $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$ к точкам $(-1; 0)$ и вниз до бесконечности. Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. При любом фиксированном значении параметра $q \in (-\infty; \frac{4}{3}) \cup (4; +\infty)$ уравнению кофактора (10) удовлетворяют координаты двух особых точек дифференциального уравнения (8), и располагаются эти точки на прямой $y = 3(x + 1)$; при $q = \frac{4}{3}$ или $q = 4$ на кофакторе – единственная особая точка $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ или $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$ соответственно.

При $q \in (\frac{4}{3}; 4)$ действительных особых точек на кофакторе нет.

Непосредственные вычисления показывают, что при любом $q > 4$ из двух особых точек дифференциального уравнения (8), находящихся в третьей четверти плоскости XOY на прямой $y = 3(x + 1)$, нижняя особая точка – седло, верхняя – фокус или узел. Начало координат $(0; 0)$ – фокус при любом $q \neq 1$.

Таким образом, поскольку, координаты особых точек дифференциального уравнения (8) удовлетворяют только (9) или (10), доказана следующая

Теорема 2. Кубическое дифференциальное уравнение (8) при любом значении параметра q из интервала $(\frac{3}{2}; +\infty)$ имеет алгебраический предельный цикл – кривую четвертого порядка, улитку Паскаля (9).

При любом $q \leq \frac{3}{2}$ на овале улитки Паскаля имеются особые точки, и (9) перестает быть предельным циклом.

Вопрос о единственности предельного цикла остается открытым. Поэтому на рис. 6 изображены с точностью до количества предельных циклов все три различные качественные картины поведения семейства интегральных кривых уравнения (8) в зависимости от значений параметра q из интервала $(\frac{3}{2}; +\infty)$ («в бесконечности» особых точек нет).

Заметим еще, что при $q = +\infty$ кубическое уравнение (8) вырождается в алгебраически интегрируемое квадратичное дифференциальное уравнение [12]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + y^2 - 3x}{4xy + 4y} \quad (13)$$

с картиной поведения семейства интегральных кривых в круге Пуанкаре, представленной на рис. 7.

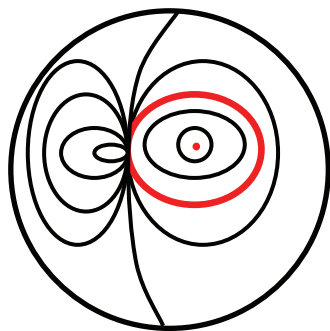


Рис. 7. Качественная картина в круге Пуанкаре уравнения (13)

Улитка Паскаля уже не является предельным циклом и вливается в бесконечное число интегральных кривых уравнения (13), примыкающих к сложной особой точке $(-1; 0)$.

Список литературы

1. Darboux M.G. Memoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des sciences mathématiques et astronom. Paris. 1878. P. 60–96, 123–144, 151–200.

2. Цинь Юань-сюнь. Об алгебраических предельных циклах второго порядка для дифференци-

ального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j}{\sum_{0 \leq i+j \leq 2} b_{ij} x^i y^j}$ // Шсюэ сюэбао Acta math. Sinica. 1958. Т. 8, № 1. С. 23–25.

3. Яблонский А.И. О предельных циклах одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 335–344.

4. Chavarriga J., Llibre J., Sorolla J. Algebraic limit cycles of degree 4 for quadratic systems // J. Differential Equations. 2004. **200**. P. 206–244.

5. Christopher C.J., Llibre J., Swirszcz G. Invariant algebraic curves of large degree for quadratic systems // J. Math. Anal. Appl. 2005. **303**. P. 450–461.

6. Дружкова Т.А. О порядке алгебраической интегральной кривой дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 7. С. 1338.

7. Jine J. On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. **31**. P. 1118–1134.

8. Алексеев А.А. Об одном классе кубических систем дифференциальных уравнений с сингулярным интегрирующим множителем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 1. С. 94–98.

9. Долов М.В., Павлюк Ю.В. Инвариантные алгебраические кривые полиномиальных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1038–1043.

10. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. 293 с.

11. Дружкова Т.А. О квадратичном дифференциальном уравнении с алгебраическим интегралом // Дифференц. и интегральные уравнения: Межвуз. сборник. Горький, 1977. С. 3–6.

12. Дружкова Т.А., Сиротина Е.А. Улитка Паскаля как интегральная кривая квадратичного дифференциального уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2008. № 3. С. 120–125.

13. Singer M.F. Liouvillian first integrals of differential equations // Transactions of the American Mathematical Societi. 1992. V. 333, № 2. P. 673–688.

PASCAL'S LIMACON AS A LIMIT CYCLE OF A CUBIC SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

T.A. Druzhkova, E.A. Sirotina

The whole class of cubic differential equations, which have a fourth-order algebraic curve, Pascal's limaçon, in their set of integral curves, has been derived. A one-parameter family of equations, which have Pascal's limaçon as a limit cycle has been studied.

Keywords: cubic differential equation, Pascal's limaçon, algebraic particular integral, limit cycle, Poincaré cycle.