УДК 519.17

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ ПЛАНАРНЫХ И ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

Е.В. Бурков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

evgeny.burkov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.04.2010

Исследуются конструктивные описания графов. Показано, что классы планарных и эйлеровых графов, их объединение и пересечение имеют все четыре возможных сочетания конечных и счетных элементных и операционных базисов.

Ключевые слова: граф, конструктивные описания, элементный базис, операционный базис, планарный граф, эйлеров граф.

Введение

В работе исследуются конструктивные описания графов, введенные в [1]. На множестве $\Im$ всех неориентированных графов, допускающих петли и кратные ребра, рассматривается многозначная бинарная операция $\phi : \Im \times \Im \to \Im$ и соответствующее тернарное отношение $\Phi \subseteq \Im \times \Im \times \Im$. Отношение $\Phi \subseteq \Im \times \Im \times \Im$ определяет *бинарную операцию склейки* следующим образом: для любых графов G_1, G_2, G тройка (G_1, G_2, G) находится в отношении Φ тогда и только тогда, когда результирующий граф G допускает представление в виде *склейки* графов-операндов G_1 и G_2 по некоторому подграфу $\tilde{G}$, то есть G является таким объединением графов, изоморфных G_1 и G_2, что пересечение этих графов изоморфно графу $\tilde{G}$. Это пересечение $\tilde{G}$, изоморфное подграфам $G_1' \subseteq G_1$ и $G_2' \subseteq G_2$, называется *подграфом склейки*, а отношение Φ – *отношением склейки*.

В общем случае результат операции склейки неоднозначен и зависит не только от вида подграфа склейки, но и от выбора отождествляемых подграфов в графах-операндах, а также от способа их отождествления. Акцентируя внимание на виде подграфа склейки, операцию склейки будем обозначать как $(G_1 \circ G_2)_{\tilde{G}} = G$. При наличии симметрии в графах-операндах и отождествляемых подграфах запись $(G_1 \circ G_2)_{\tilde{G}}$ однозначно определяет результирующий граф и будет использоваться для обозначения графов (рис. 1).

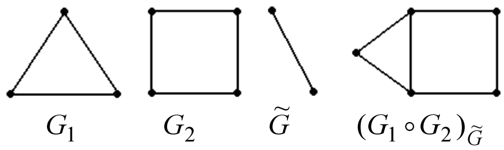

Рис. 1. Пример операции склейки

Будем говорить, что операции относятся к одному *типу*, если их подграфы склейки $\tilde{G}$ изоморфны.

Операция склейки ϕ *удовлетворяет системе ограничений* $H \subseteq \Im \times \Im \times \Im$, если соответствующее отношение $\Phi \subseteq H$. В этом случае операцию ϕ называем *операцией H-склейки*.

Ограничение H_t *на тип операции склейки* определяется множеством $H = \{\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, ...\}$ допустимых подграфов склейки и включает в себя такие тройки (G_1, G_2, G), что граф G допускает представление в виде склейки подграфов, изоморфных G_1 и G_2, по подграфу, изоморфному некоторому графу $\tilde{G}_i \in H$.

Пусть $P \subseteq \Im$ – класс графов, обладающих некоторым характеристическим свойством.

Система ограничений $H = \{(G_1, G_2, G) \mid G_1, G_2, G \in P\}$ обеспечивает сохранение заданного свойства графов-операндов. Про отношение склейки $\Phi_H = \Phi \cap H$ и соответствующие операции склейки будем говорить, что они сохраняют характеристическое свойство графов класса *P*.

Граф *G* является *H-суперпозицией* графов из *P*, если $G \in P$ или *G* может быть получен из графов множества *P* с помощью операций *H*-склейки. Множество $[P]_H$ всех графов, являющихся H-суперпозицией графов из P, образует *H-замыкание* P. Если $[P]_H = P$, то P является *H-замкнутым* классом графов.

Минимальное по включению подмножество B_e графов из P образует *элементный базис* H-замкнутого класса P, если $[B_e]_H = P$.

Минимальное по включению подмножество $B_o \subseteq \mathsf{H} = \{\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots\}$, определяющее ограничение H_t на тип операции склейки, при котором $[B_e]_{H \cap H_t} = P$, называется *операционным базисом* H-замкнутого класса P.

Совокупность системы ограничений H элементного базиса B_e и операционного базиса B_o образует *конструктивное описание* H-замкнутого класса P.

Известно, что для любого *H-замкнутого* класса графов существует единственный элементный базис B_e [1] и, по крайней мере, один операционный базис B_o [2]. Как элементный, так и операционный базис может быть конечным или бесконечным [1, 3]. В данной работе рассмотрены взаимосвязанные классы эйлеровых и планарных графов, реализующие все четыре возможных сочетания конечности и бесконечности элементного и операционного базисов. Класс планарных графов обозначается через P, класс эйлеровых графов – через E. K_n – полный n-вершинный граф, K_0 – нуль-граф, то есть граф с пустыми множествами вершин и ребер, O_n – пустой n-вершинный граф, C_n – цикл длины n, P_n – цепь из n вершин.

В работе [1] было также показано, что класс планарных графов P имеет конечные элементный и операционный базисы при различных ограничениях на операции склейки, сохраняющие свойство планарности. В то же время класс максимальных планарных графов имеет счетный элементный базис и конечный операционный базис.

Операция склейки называется *тривиальной*, если $G_1' = G_1$ или $G_2' = G_2$.

Операции склейки разделяются на внутренние, когда $|V(G_1)| = |V(\widetilde{G})|$ или $|V(G_2)| = |V(\widetilde{G})|$, и внешние, когда $V(G_1) \setminus V(G_1') \neq \varnothing$ и $V(G_2) \setminus V(G_2') \neq \varnothing$ (рис. 2).

Заметим, что склейка двух графов по подграфу K_0 дает их дизъюнктное объединение.

Непосредственно из определения следует, что если операция склейки внешняя, то $V(\widetilde{G})$ – разделяющее множество графа G.

Класс пересечения эйлеровых и планарных графов

Лемма 1. *Операция склейки сохраняет свойство эйлеровости графов-операндов тогда и только тогда, когда подграф склейки $\widetilde{G} \neq K_0$ и степени всех его вершин четны.*

Доказательство. Граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны. Операция склейки сохраняет связность графов тогда и только тогда, когда подграф склейки $\widetilde{G} \neq K_0$. Четность степени любой вершины $v \notin V(\widetilde{G})$ следует из четности степени ее прообраза в графе-операнде. Степень вершины $v \in V(\widetilde{G})$ равна сумме четных степеней ее прообразов в графах-операндах минус степень вершины v в подграфе склейки $\widetilde{G}$, следовательно, четность степеней всех вершин результирующего графа обеспечивается тогда и только тогда, когда степени всех вершин $v \in V(\widetilde{G})$ четны.

Теорема 1. *Класс эйлеровых планарных графов $P \cap E$ имеет счетный элементный базис $B_e = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$ и, по крайней мере, три конечных операционных базиса: $B_1 = \{O_1, O_2, O_3\}$, $B_2 = \{O_1, O_2, O_4\}$, $B_3 = \{O_1, O_2, O_5\}$.*

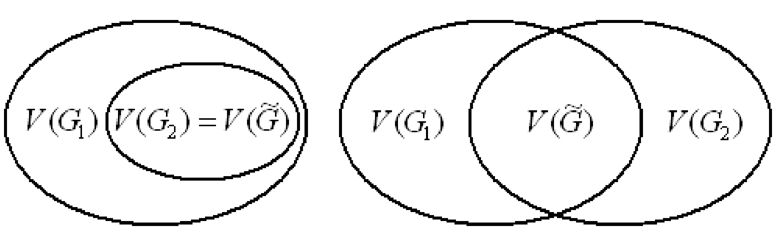

Рис. 2. Внутренняя склейка (слева) и внешняя склейка (справа)

Доказательство. Пусть H – система ограничений на операцию склейки, обеспечивающая сохранение свойств планарности и эйлеровости. По лемме 1 ограничение H совпадает с пересечением ограничения H_t на тип операции склейки, допускающего склейку лишь по четным ненулевым подграфам, в том числе по пустым, и ограничения, обеспечивающего сохранение свойства планарности.

Покажем, что H-замкнутый класс $P \cap E$ имеет элементный базис $B_e = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$. Действительно, никакой $C_i, i = 1,2,\ldots$, не может быть получен склейкой других эйлеровых графов, так как не содержит собственных эйлеровых подграфов, а множество ребер любого эйлерового графа разбивается на циклы, поэтому его можно получить из набора B_e последовательным применением операций склейки текущего графа с $C_i, i \in \{1,2,\ldots\}$, по $O_j, j \in \{1,2,\ldots\}$.

Покажем, что операций склейки по графам из B_1, B_2 или B_3 достаточно для построения любого графа из класса $P \cap E$. Доказательство проведем методом индукции по числу ребер графа. Минимальным эйлеровым планарным графом является петля. Этот граф содержится в элементном базисе. Предположим, что все эйлеровы планарные графы с числом ребер, меньшим m, построить можно. Рассмотрим произвольный эйлеров планарный граф G с m ребрами. Если G является простым циклом, то он содержится в элементном базисе.

Через $G_1 \setminus G_2$ обозначим граф, получающийся удалением из графа G_1 ребер, принадлежащих графу G_2, без удаления вершин. Если в G есть петля C_1, то он строится как $((G \setminus C_1) \circ C_1)_{O_1}$ (рис. 3), где $G \setminus C_1$ можно построить по предположению индукции.

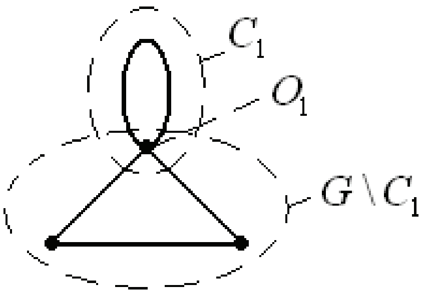

Рис. 3. Склейка в случае наличия петли

Далее рассмотрим случай, когда в G нет петель, но есть кратные ребра, то есть цикл C_2. Если граф $G \setminus C_2$ связен, то граф G можно получить склейкой $((G \setminus C_2) \circ C_2)_{O_2}$. Если $G \setminus C_2$ состоит из двух компонент связности G_1 и G_2, то G можно получить как $((G_1 \circ C_2)_{O_1} \circ G_2)_{O_1}$ (рис. 4). В первом случае граф $G \setminus C_2$, а во втором графы G_1 и G_2 можно построить по предположению индукции.

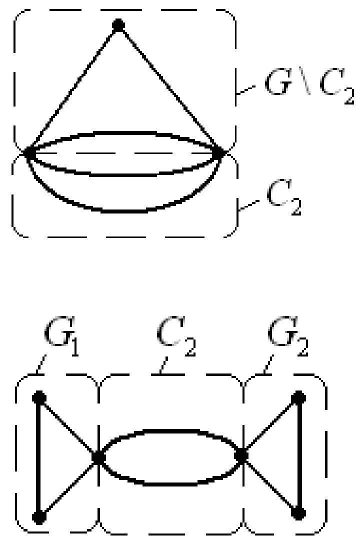

Рис. 4. Склейка в случае наличия кратных ребер

В случае когда G – обыкновенный эйлеров планарный граф, содержащий вершину x степени два, рассмотрим граф G', получающийся из G добавлением ребра e между вершинами, смежными с x, и удалением вершины x (ребро добавляется, даже если вершины уже смежны). G' можно построить по предположению индукции. Схема построения графа G отличается от схемы построения графа G' только тем, что вместо цикла C_i, содержащего ребро e, используется цикл C_{i+1} (рис. 5), также содержащийся в элементном базисе.

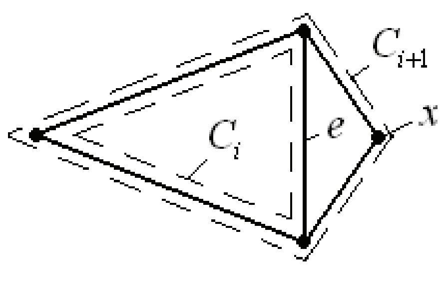

Рис. 5. Случай наличия вершины степени два

Пусть теперь G – обыкновенный эйлеров планарный граф без вершин степени два. В [4] доказано, что в каждом обыкновенном планарном графе со степенями вершин не менее четырех найдется каждый из следующих подграфов:

- цикл C_3;
- цикл C_4 или подграф $(C_3 \circ C_3)_{O_1}$, центральная вершина которого смежна только с вершинами этого подграфа;
- цикл C_5.

Пусть G' – любой из этих подграфов. G' содержится в элементном базисе или получается из графов элементного базиса одной склейкой по O_1.

Обозначим через G'' граф, получающийся после удаления из графа G ребер подграфа G' (в случае $G' = (C_3 \circ C_3)_{O_1}$ мы удаляем также образовавшуюся изолированную вершину). Так как степени вершин графа G больше двух, других изолированных вершин образоваться не может. Каждая из компонент связности графа G'' является эйлеровым графом, так как степени всех вершин в G'' четны. Если G'' связен, то $G = (G'' \circ G')_{O_i}$, $i \in \{3, 4, 5\}$, а G'' можно построить по предположению индукции. Если компонент связности больше чем одна, то, так как $|V(G')| \le 5$, найдётся компонента G_1, содержащая не более двух вершин, принадлежащих G'. Тогда $G = (G_1 \circ G_2)_{O_i}, i \in \{1, 2\}$. Здесь G_2 – граф, образованный ребрами G, не принадлежащими G_1, а склейка производится по вершинам из $G_1 \cap G'$. Графы G_1 и G_2 являются эйлеровыми планарными графами, и их можно построить по предположению индукции. В зависимости от того, какой подграф G' был взят, доказан индукционный переход для базиса B_1, B_2 или B_3.

Осталось показать минимальность по включению множеств B_1, B_2 и B_3. Склейка по O_1 необходима для построения графа $(C_1 \circ C_1)_{O_1}$. Склейка по O_2 необходима для построения графа $(C_2 \circ C_2)_{O_2}$. Пары $\{O_1, O_2\}$ не достаточно для построения октаэдра, так как он не содержит циклов C_1 и C_2, необходимых для внутренней склейки, а также разделяющего множества из 1 или 2 вершин, необходимого для внешней склейки. Следовательно, B_1, B_2 и B_3 являются операционными базисами класса эйлеровых планарных графов.

Класс эйлеровых графов

Теорема 2. *Класс эйлеровых графов E имеет счетные элементный и операционный базисы.*

Доказательство. Пусть H – система ограничений на операцию склейки, обеспечивающая сохранение свойства эйлеровости. По лемме 1, ограничение H совпадает с ограничением H_t на тип операции склейки, допускающим склейку лишь по четным ненулевым подграфам, в том числе по пустым.

Обоснование того, что множество $B_e = \{C_1, C_2, C_3, \ldots\}$ является элементным базисом H-замкнутого класса E, абсолютно аналогично обоснованию, приведенному в доказательстве теоремы 1 для класса $P \cap E$.

Счетность операционного базиса докажем от противного. Предположим, что существует конечный операционный базис B_o класса E. Тогда число вершин графов операционного базиса ограничено сверху конечным числом s.

Граф G называется t*-жестким*, если для любого $k > 1$ граф G не может быть разделен на k компонент связности удалением менее, чем tk вершин. Граф имеет *обхват* g, если он не содержит циклов длины менее g. В [5] доказано существование для сколь угодно больших t и g графа с жесткостью t и обхватом g. Там же показано существование $(p+1)$-регулярного графа с указанными свойствами, где $p \equiv 1 (mod 4)$ – простое число. Следовательно, так как $(p+1)$ четно, для любого s существует эйлеров граф G_s с жесткостью и обхватом больше s. Этот граф не содержится в элементном базисе.

Покажем, что он не может быть результирующим графом нетривиальной операции склейки графов из E по подграфу из B_o. Предположим противное, то есть что $(G_1 \circ G_2)_{\widetilde{G}} = G_s$, $\widetilde{G} \in B_o$, $|V(\widetilde{G})| \le s$. Эта операция внешняя или внутренняя. В случае внешней операции множество $V(\widetilde{G})$ является разделяющим в графе G_s, содержащим не более s вершин, что противоречит тому, что G_s имеет жесткость больше s. В случае внутренней склейки $|V(G_1)| = |V(\widetilde{G})|$ или $|V(G_2)| = |V(\widetilde{G})|$. Следовательно, так как операция склейки нетривиальна, а графы-операнды являются подграфами результирующего графа, граф G_s содержит эйлеров подграф G' из не более, чем s вершин. G' содержит эйлеров цикл, а, следовательно, по крайней мере один простой цикл длины не более s, что невозможно, так как обхват графа G_s больше s.

Граф $G_s \in E$ не содержится в элементном базисе и не может быть получен нетривиальной операцией склейки по подграфам из B_o, следовательно, B_o не является операционным базисом класса эйлеровых графов. Так как класс E не имеет конечного операционного базиса, а любой класс графов имеет, по крайней мере, один операционный базис [2], класс эйлеровых графов имеет счетный операционный базис.

Класс объединения эйлеровых и планарных графов

Теорема 3. *Класс объединения эйлеровых и планарных графов* $E \cup P$ *имеет конечный элементный базис* $B_e = \{K_1, C_1, K_2\}$ *и счетный операционный базис.*

Доказательство. Пусть H – система ограничений на операцию склейки, обеспечивающая сохранение свойства планарности или эйлеровости. Покажем, что B_e является элементным базисом класса $E \cup P$. Минимальность по включению очевидна, каждый граф из B_e не может быть получен из других нетривиальной операцией склейки. Покажем, что любой планарный или эйлеров граф может быть получен H-суперпозицией графов из B_e. Цепь $P_2 = K_2$ содержится в базисе, а другие простые цепи $P_n, n > 2$, получаются из P_2 с помощью $(n-2)$ операций склейки по O_1. Цикл C_1 содержится в элементном базисе, а другие простые циклы получаются склейкой $(P_n \circ K_2)_{O_2} = C_n$. Простые цепи и циклы являются планарными графами и содержатся в $E \cup P$. Множество ребер любого эйлерового графа разбивается на циклы, поэтому его можно получить последовательным применением операций склейки с циклом по пустому подграфу, все промежуточные графы принадлежат классу $E \cup P$.

Для построения произвольного планарного графа G сначала строим пустой $|V(G)|$-вершинный граф из K_1 с помощью $(|V(G)|-1)$ операций склейки с K_1 по K_0, затем дополняем его ребрами до графа G, использовав $|E(G)|$ операций склейки с K_2 по O_2.

Счетность операционного базиса докажем от противного. Предположим, что существует конечный операционный базис B_o класса $E \cup P$. Тогда число вершин графов операционного базиса ограничено сверху конечным числом s. Как и в доказательстве теоремы 2, рассмотрим эйлеров граф G_s, имеющий жесткость и обхват больше $\max(s,6)$. Существование такого графа доказано в [5]. Покажем, что G_s не может быть результирующим графом нетривиальной операции склейки графов из $E \cup P$ по подграфу из B_o. Предположим противное, то есть, что $(G_1 \circ G_2)_{\tilde{G}} = G_s$, $\tilde{G} \in B_o$, $|V(\tilde{G})| \le \max(s,6)$.

Эта операция, как и любая операция склейки, может быть внешней или внутренней. В случае внешней операции множество $V(\tilde{G})$ является разделяющим в графе G_s, содержащим не более s вершин, что противоречит тому, что G_s имеет жесткость больше s.

В случае внутренней склейки $|V(G_1)| = |V(\tilde{G})|$ или $|V(G_2)| = |V(\tilde{G})|$. Пусть $|V(G_1)| = |V(\tilde{G})| \le s$. Если G_1 и G_2 планарные, то по следствию из формулы Эйлера $|E(G_1)| < 3|V(G_1)|$, $|E(G_2)| < 3|V(G_2)|$, следовательно, $|E(G_s)| < 6|V(G_s)|$, поэтому в G_s есть вершина степени менее 12, что противоречит тому, что его жесткость больше 6. Если G_1 эйлеров, он содержит эйлеров цикл, а, следовательно, по крайней мере один простой цикл длины не более s. Таким образом, граф G_s содержит цикл длины не более s, что противоречит тому, что его обхват больше s. Остался случай, когда G_1 планарен, но не эйлеров, а G_2 эйлеров, но не планарен. Рассмотрим граф $G' = (V(G_s), E(G_s) \setminus E(\breve{G}_2))$, $E(G_s) \setminus E(\breve{G}_2) \subseteq E(\breve{G}_1)$, где $\breve{G}_1$, $\breve{G}_2$ – подграфы G_s, изоморфные G_1 и G_2 соответственно. Если G_1 содержит цикл, снова получаем противоречие с тем, что обхват графа G_s больше s. Если G_1 не содержит цикла, то G' является лесом. Операция склейки нетривиальна, поэтому G' содержит, по крайней мере, одно ребро, следовательно, в G' есть вершина v степени 1. Подграф $\breve{G}_2$ эйлеров, поэтому степень вершины v в подграфе $\breve{G}_2$ четна. $E(G_s) = E(\breve{G}_2) \cup E(G')$, следовательно, степень вершины v в графе G_s нечетна, что противоречит тому, что он эйлеров. Таким образом, граф $G_s \notin E \cup P$.

Отсюда следует, что класс $E \cup P$ имеет счетный операционный базис, обоснование этого абсолютно аналогично обоснованию, приведенному в доказательстве теоремы 2 для класса E.

Заключение

В работе были указаны взаимосвязанные классы графов, имеющие все четыре возможных сочетания конечных и счетных элементных и операционных базисов. Полученные результаты можно представить в таблице.

Класс графов	Элементный базис	Операционный базис
P	конечный	конечный
$P \cup E$	конечный	счетный
$P \cap E$	счетный	конечный
E	счетный	счетный

Список литературы

1. Иорданский М.А. Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 33–63.
2. Бурков Е.В. Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», Москва, 18–23 июня 2007 г. С. 261–263.
3. Иорданский М.А. Счетный операционный базис топологических эйлеровых планарных графов // Материалы VIII международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем», Москва, 6–9 апреля 2009 г. С. 127–129.
4. Бурков Е.В. Короткие циклы в планарных графах с минимальной степенью четыре // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. № 4. С. 146–148.
5. Alon N. Tough Ramsey Graphs Without Short Cycles // Journal of Algebraic Combinatorics, 1995. V. 4, № 3. P. 189–195.

CONSTRUCTIVE DESCRIPTIONS OF PLANAR AND EULERIAN GRAPHS

E.V. Burkov

Constructive descriptions of graphs are studied. It is shown that classes of planar and Eulerian graphs, their intersection and union have all four possible combinations of finite and infinite elemental and operational bases.

Keywords: graph, constructive descriptions, elemental basis, operational basis, planar graph, Eulerian graph.