МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.86

ПОТОКОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Островский, Л.В. Воронова, Т.Б. Лепёхина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

arvios@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2010

Рассматривается ряд макроэкономических моделей, названных потоковыми моделями экономической динамики и качественно описывающих процессы в социально-экономических системах при различных видах производственных функций. Изучается динамика систем в зависимости от параметров.

Ключевые слова: макроэкономическая модель, потоковая модель, агрегированное предприятие, производственная функция, производственная функция Кобба – Дугласа, дивиденды.

1. Базовая модель

В статье [1] была предложена качественная макроэкономическая модель, названная *потоковой моделью экономической динамики* и качественно описывавшая социально-экономические процессы в некоторой стране. Модель имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений и описывает динамику агрегированных материальных и денежных потоков, в связи с чем и была названа потоковой. Считается, что все предприятия страны агрегированы в одно (макро)предприятие, продукция которого (также агрегированная) на внутреннем рынке конкурирует с импортом, а также идет на экспорт. В качестве фазовых переменных выбраны пять величин: x – количество отечественного товара на отечественном рынке; y – наличные деньги у населения; z – наличные деньги у предприятия; u – производство отечественного продукта в единицу времени; v – поток денег, возвращаемых в банк по кредиту с процентами. Из этих переменных только величина z может принимать значения любого знака (отрицательность z означает, что у предприятия имеются *долги* по зарплате, коммунальным расходам и кредиту), значения же остальных переменных могут быть только неотрицательными.

В базовую модель входят следующие функции:

$p(x/y) = C \cdot \exp(-\alpha x/y) + C_1$ – цена одной единицы отечественного товара (удовлетворяет закону ценообразования; величина x фактически характеризует предложение товара, а величина y – потребительский спрос на товар);

$$f_1(\xi) = \begin{cases} \xi/\left(1 - \sigma\xi + \sigma^2\xi^2\right) \ (\xi \le 1/\sigma); \\ 1/\sigma \ (\xi > 1/\sigma) \end{cases} \quad (1)$$

– производственная функция, удовлетворяющая закону убывающей отдачи [2] (здесь ξ– количество сырья, затрачиваемого на производство, σ – параметр убывающей отдачи);

$\widetilde{A} = \min\left[\gamma y, \delta \cdot p(x/y) \cdot x, \delta_1 \cdot p(x/y)\right]$ – сумма денег, которую потребители потратят на отечественный продукт;

$(1-q)\cdot\min(\gamma y, m)$ – сумма денег, которую потребители потратят на импортный продукт;

$f_2(z) = -\mathrm{th}\rho z + 1$ – сумма кредита, которую производство берет в банке на приобретение сырья;

$\widetilde{F} = \min\left[\dfrac{b}{1+\kappa_1 b} \cdot \max(K \cdot f_2(z), \kappa z), \dfrac{r}{\sigma}\right]$ – сумма денег, которую предприятие фактически тратит на приобретение сырья (r – цена одной единицы сырья);

$$\eta(z) = \begin{cases} 1 \ (z > 0); \\ 0 \ (z \le 0) \end{cases}$$

– функция скачка («усеченный» знаковый множитель), которая используется для описания того обстоятельства, что при $z \le 0$ (отсутствие средств или наличие долгов у предприятия) население не получает от предприятия никаких денежных выплат.

Базовая модель имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x} = u - lx - q \cdot \left(\frac{\widetilde{A}}{p(x/y)} \right) + \beta x;\\
&\dot{y} = \min(az, b) \cdot \eta(z) -\\
&\quad - q \cdot \widetilde{A} - (1-q) \cdot \min(\gamma y, m);\\
&\dot{z} = \frac{b}{1+\kappa_1 b} \cdot K \cdot f_2(z) - \widetilde{F} - (d+b) - v +\\
&\quad + (1-\nu) \cdot q \cdot (\widetilde{A} + \beta\mu x);\\
&T_1 \dot{u} + u = g \cdot f_1(\widetilde{F}/r);\\
&T_2 \dot{v} + v = (1+\nu_1) \cdot \frac{b}{1+\kappa_1 b} \cdot K \cdot f_2(z).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В рамках данной модели в производстве учитывается только фактор использования сырья.

Результаты исследования базовой модели, приведенные в [1], получены качественно-численными методами при следующих значениях параметров: $q = 0.8$ (достаточно высокое доверие отечественному продукту); $C = 2$, $C_1 = 1$, $\alpha = 2$; $K = 300$ (возможности банка по кредитованию достаточно высокие); $r = 3$; $g = 100$ (достаточно высокая производственная мощность); постоянные времени $T_1 = 70$, $T_2 = 50$; $\sigma = 1$, $l = 30$ (достаточно быстро амортизирующийся продукт); $\gamma = 3$, $\delta = 7$, $\delta_1 = 10$, $a = 3$, $m = 7$, $\rho = 0.1$, $\kappa_1 = 0.8$, $d = 0.5$, $\mu = 3$, $\kappa = 3$. Предполагалось, что к моменту $t = 0$ предприятие полностью расплатилось с банком-кредитором (начальное условие $v = 0$). Варьировались параметры *b* (твердая ставка заработной платы), β (показатель доли отечественного продукта, идущей на экспорт), ν (ставка регрессивного налога типа НДС) и ν_1 (ставка процента по банковскому кредиту). В зависимости от значений этих параметров в рамках модели наблюдались следующие сценарии vэкономического развития (при $t \to +\infty$):

1) «*Гибель*» системы (при $b = 0$): $x, y, u, v \to 0$; $z \to -\infty$ (у предприятия накапливаются долги по зарплате и банковскому кредиту).

2) «*Кризисы*» вследствие слишком малой или слишком большой зарплаты: *x*, *u* и *v* стремятся к некоторым положительным константам, $y \to 0$, $z \to -\infty$.

3) «*Удовлетворительное состояние*» (первого рода): *x*, *y* и *u* стремятся к некоторым положительным константам, $z \to +\infty$ (предприятие неограниченно богатеет), $v \to 0$.

4) «Прогрессивное развитие»: отличается от «удовлетворительного состояния» тем, что *y* стремится к $+\infty$ (как и *z*), т.е. неограниченно богатеет не только предприятие, но и население.

Однако при других значениях параметров (отличных от значений, взятых в [1]) могут наблюдаться и другие сценарии экономического развития в рамках модели. Пусть, например, $C = 5$, $a = 90$, $m = 10$, $d = 1$, $\rho = 5$, $\sigma = 3$; $K = 20$ (более низкие возможности банка по кредитованию); $l = 0.5$ (менее скоропортящийся продукт); $g = 15$ (более низкая производственная мощность); $T_1 = 2$, $T_2 = 3$, $\gamma = 0.7$, $\kappa_1 = 0.7$, $r = 2$, $\kappa = 0.01$, $\delta = 0.6$, $\delta_1 = 0.9$, $\alpha = 1$. Как и ранее, будем предполагать, что $v = 0$ при $t = 0$. Качественно-численные исследования показали, что в системе существует не более двух состояний равновесия, причем все эти равновесия неустойчивы (сёдла типа $O^{4,1}$ и $O^{3,2}$).

Как и при предыдущем наборе параметров, в системе можно наблюдать «гибель» (при $b = 0$) и «кризис» вследствие слишком малой зарплаты (например, при $b = 0.01$). Если увеличивать *b* дальше (например, взять $b = 0.1$), то в зависимости от начальных условий система может прийти либо к «удовлетворительному состоянию», либо к автоколебаниям (чего не было при предыдущем наборе параметров); при этом автоколебания возникают, если взять меньшие начальные значения производства (*u*) и наличных денег предприятия (*z*). При дальнейшем увеличении *b* (например, *b*=10) мы попадаем на отрезок изменения *b*, на котором $y \to +\infty$ (причем величина dy/dt колеблется, становясь то положительной, то отрицательной), а все остальные переменные совершают периодические незатухающие колебания; но если при данных значениях *b* мы увеличим значение β и зададим начальные условия с достаточно большими величинами производства (*u*) и наличных денег предприятия (*z*), то попадем в ситуацию «прогрессивного развития». При достаточно большом *b* ($b > 15$) возникает «кризис» системы из-за слишком большой зарплаты. Изменение значений ν и ν_1 влияет на динамику модельной системы так же, как и при предыдущем наборе параметров. Что же касается параметра β, то при малых его значениях наблюдается ситуация, сходная с «кризисом» вследствие слишком малой зарплаты; при увеличении же значения β происходит переход от «кризисного» сценария к ситуации, когда деньги населения (*y*) стремятся к некоторой положительной константе, а переменные *x*, *z*, *u*, *v* колеблются. При дальнейшем увеличении β возникает (в зависимости от b) удовлетворительное состояние или прогрессивное развитие.

2. Уточненная модель с учетом выплаты предприятием дивидендов населению

В базовой модели имеют место ситуации, при которых наличные деньги у населения и предприятия стремятся к $+\infty$. Но в реальности денежные массы в бесконечность не уходят, поэтому базовая модель нуждается в уточнении. В работе [2] представлены уточненная потоковая модель с учетом выплаты предприятием дивидендов населению и ее исследование с теми значениями параметров, при которых в базовой модели имеет место «прогрессивное развитие». Выплата дивидендов происходит, только если предприятие находится в стадии *«процветания»* (т.е. величины наличных денег z и прибыли dz/dt строго положительны). Дивиденды могут выплачиваться как из наличных денег предприятия, так и из его прибыли.

Уточненная модель отличается от базовой изменениями в уравнениях для dz/dt и dy/dt:

$$\dot{z} = \begin{cases} \widetilde{G} = \dfrac{b}{1+\kappa_1} \cdot K \cdot f_2(z) - \widetilde{F} - (d+b) - \\ \quad - v + (1-\nu) \cdot q \cdot (\widetilde{A} + \beta\mu x), \\ \quad \text{если } z \le 0 \text{ или } \widetilde{G} \le 0; \\ \widetilde{G} - f_3(z) - \nu_2 \widetilde{G}, \quad \text{если } z > 0 \text{ и } \widetilde{G} > 0 \\ \quad (f_3(z) \ge 0,\ 0 \le \nu_2 \le 1); \end{cases}$$

в правую часть уравнения для dy/dt добавляется со знаком «плюс» выражение $f_3(z) + \nu_2 \widetilde{G}$ (величина дивидендов), если $z>0$ и $\widetilde{G}>0$, где $f_3(z)$ – неубывающая функция, которую выберем в виде $f_3(z) = a_1 z^s$ ($a_1 \ge 0$, $s \ge 0$). Слагаемое $f_3(z)$ отвечает за выплату дивидендов из наличных денег предприятия, а слагаемое $\nu_2 \widetilde{G}$ – за выплату дивидендов из прибыли.

Система рассматривалась при тех значениях параметров, при которых в базовой системе наблюдалась ситуация «удовлетворительного состояния» (первого рода) или автоколебаний (в зависимости от начальных условий). По сравнению с базовой моделью в уточненной модели возможна новая ситуация, когда население неограниченно богатеет ($y \to +\infty$), а наличные деньги предприятия (z) стремятся к некоторой положительной константе (она наблюдается, в частности, при $s = 1$ и умеренных значениях a_1 из некоторого интервала, например $a_1 = 10$). Такую ситуацию мы будем называть «удовлетворительным состоянием» второго рода. Возможна также ситуация стремления траекторий к устойчивому состоянию равновесия (равновесный режим); она наблюдается, например, при $a_1 = 0$ и $0.994 \le \nu_2 \le 0.998$, а также при $s = 1$, $\nu_2 = 0.8$ и $0.85 \le a_1 \le 0.97$. При малых значениях a_1 будут наблюдаться те же ситуации, что и в базовой модели без дивидендов (в зависимости от значений остальных параметров), а при достаточно больших a_1 – «кризис» (долги предприятия неограниченно растут, а деньги населения стремятся к нулю).

3. Уточненная модель с учетом динамики народонаселения и выплаты дивидендов

Базовая модель (2) не учитывает динамики народонаселения (предполагается, что численность населения рассматриваемой страны достаточно большая). Модифицируем модель (2), учтя в ней численность населения. Для этого введем новую переменную w – народонаселение, и система станет шестимерной. Теперь переменная y – это количество денег на душу населения, а все деньги у населения – это $y \cdot w$. Параметры b, γ и δ_1 теперь характеризуют каждого человека, населяющего страну. Выражения для $\widetilde{A}$ (теперь это также характеристика каждого человека) и $\widetilde{F}$ изменятся и будут иметь следующий вид:

$$\widetilde{A} = \min\left[\gamma y, \frac{\delta p(x/y)x}{w}, \delta_1 p(x/y)\right]; \qquad (3)$$

$$\widetilde{F} = \min\left[\frac{bw}{1+\kappa_1 bw} \cdot \max(K \cdot f_2(z), \kappa z), \frac{r}{\sigma}\right].$$

Будем считать также, что предприятие выплачивает дивиденды населению. В системе будут изменены уравнения для dz/dt и dy/dt:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} G = \dfrac{bw}{(1+\kappa_1 bw)} \cdot K \cdot f_2(z) - \widetilde{F} - (d+bw) - v + \\ \qquad + (1-\nu) \cdot q \cdot (\widetilde{A}w + \beta\mu x), \\ \quad \text{если } z \le 0 \text{ или } G \le 0; \\ G - f_3(z) - \nu_2 G, \\ \quad \text{если } z > 0 \text{ и } G > 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где $f_3(z)+\nu_2 G$ – величина дивидендов на все население страны;

$$\frac{dy}{dt}=\begin{cases}\min\left(\frac{az}{w},b\right)\cdot\eta(z)-q \qquad \widetilde{A}-(1-q)\cdot\min(\gamma y,m), \\ \text{если } z\le 0 \text{ или } G\le 0; \\ \min\left(\frac{az}{w},b\right)\cdot\eta(z)-q \qquad \widetilde{A}-(1-q)\cdot\min(\gamma y,m)+ \\ +\frac{f_3(z)+\nu_2 G}{w}, \text{если } z>0 \text{ и } G>0.\end{cases} \tag{5}$$

Уравнения для dx/dt и dv/dt теперь примут вид:

$$\dot{x}=u-lx-q\cdot\left(\frac{w \qquad \widetilde{A}}{p(x/y)}+\beta x\right); \tag{6}$$

$$T_2\dot{v}+v=(1+\nu_1)\cdot\frac{bw}{1+\kappa_1 bw}\cdot K\cdot f_2(z). \tag{7}$$

Уравнение для du/dt не изменится.

Будем считать, что значение w может расти за счет рождаемости (b_2– коэффициент рождаемости) и убывать за счет смертности $a_2 w$ (a_2– коэффициент смертности) и конкуренции между людьми $a_3 w^2$. Тогда уравнение для w имеет вид:

$$\dot{w}=-a_2 w+b_2 w\cdot\left(\frac{q\widetilde{A}}{p(x/y)}+\right. \\ \left.+\frac{(1-q)\cdot\min(\gamma y,m)}{m_1}\right)-a_3 w^2. \tag{8}$$

Полученная система исследовалась при следующих значениях параметров: $l=0.5$, $q=0.7$, $a=90$, $\gamma=0.7$, $m=10$, $\kappa=0.01$, $\kappa_1=1$, $K=20$, $d=1$, $\mu=3$, $r=2$, $g=100$, $T_1=2$, $T_2=3$, $\sigma=2$, $\delta=0.6$, $\delta_1=0.9$, $\alpha=1$, $\rho=1$, $\nu=0.0001$, $\nu_1=0.0001$, $C=5$, $C_1=1$, $b=12$; a_2 – достаточно малое (близкое к нулю); $a_3=1$ (при $a_3=0$, т.е. при отсутствии конкуренции, в системе без выплаты дивидендов будет наблюдаться «гибель»); $b_2>>1$ (чтобы в системе без дивидендов было «удовлетворительное состояние» первого рода); $m_1=0.2$. Функцию, отвечающую за выплату дивидендов из денег, возьмем, как и в п. 2, в виде $f_3(z)=a_1 z^s$ ($a_1\ge 0$, $s\ge 0$).

Рассмотрим случай, когда дивиденды выплачиваются из прибыли ($a_1=0$). При $0\le\nu_2\le 0.9$ можно наблюдать «удовлетворительное состояние» (первого рода). Далее, при приближении ν_2 к единице, на небольшом интервале значений ν_2 ($0.9\div 0.98$) наступает ситуация, когда все переменные совершают колебания. При дальнейшем приближении ν_2 к единице ($0.99\div 0.999$) наступает ситуация равновесия (равновесный режим), все переменные стремятся к положительным константам.

Далее рассмотрим ситуацию, когда дивиденды выплачиваются из денег ($\nu_2=0$). Зафиксируем $s=1$, а a_1 будем менять. При малых a_1 будет «удовлетворительное состояние» (первого рода), как и в системе без дивидендов. На интервале $0.001\le a_1\le 0.1$ наблюдается равновесный режим. В случае если значение параметра a_1 еще увеличивается ($1\div 4$), в системе будут колебания по всем переменным (автоколебания). При переходе a_1 через следующее пороговое значение попадаем в ситуацию равновесного режима.

Теперь зафиксируем a_1, а s будем менять. При малых s ($0.00001\div 0.1$) динамика системы будет сходна с динамикой системы без дивидендов: при увеличении a_2 происходит переход от «удовлетворительного состояния» первого рода или равновесного режима к гибели системы; при увеличении b_2 – переход от равновесного режима к «удовлетворительному состоянию» первого рода; при увеличении a_3 – переход от «гибели» к «удовлетворительному состоянию» первого рода, затем к равновесному режиму и, наконец, снова к «гибели» системы. На интервале изменения s от 0.5 до 0.9 попадаем в ситуацию равновесного режима. Дальнейшее увеличение значения параметра s приведет к тому, что мы будем наблюдать автоколебания. При переходе s через следующее пороговое значение наблюдаем равновесный режим.

Рассмотрим ситуацию, когда дивиденды выплачиваются и из денег и из прибыли ($a_1>0$, $\nu_2>0$). Зафиксируем $a_1=1$, $s=1.2$; тогда при изменении ν_2 возможны две ситуации: автоколебания и равновесный режим. В случае если меняется a_1, а значения $s=1.2$ и $\nu_2=0.5$ фиксированы, также возможны только две эти ситуации. Для случая когда значения $a_1=1$ и $\nu_2=0.5$ фиксированы, а s варьируется, возможны несколько ситуаций: «удовлетворительное состояние» первого рода (для малых s), автоколебания, равновесный режим и случай, когда переменные x и u принимают постоянные значения, а остальные переменные колеблются.

Таким образом, мы выяснили, что параметры дивидендов a_1, s, ν_2 являются пороговыми и определяют динамику системы.

4. Модель с производственной функцией Кобба – Дугласа

Рассмотрим теперь модель, аналогичную базовой модели (2), но вместо дробно-рациональной производственной функции вида (1) возьмем широко используемую в математической экономике функцию Кобба – Дугласа (см., например, [3–5]). Функция Кобба – Дугласа относится к неоклассическим производственным функциям (в частности, моделирует только убывающую отдачу от масштаба и не учитывает возможности начального роста этой отдачи, в отличие от функции (1)) и имеет вид произведения степенных функций с показателями, большими нуля, но меньшими единицы. Если в системе учитывается только один производственный фактор (обозначим его ξ), то функция Кобба – Дугласа имеет вид:

$$f_1(\xi) = C_2 \xi^{\alpha_1} \ (C_2 > 0,\ 0 < \alpha_1 < 1). \qquad (9)$$

В данной модели, как и в базовой модели (2), мы будем учитывать только фактор использования сырья в производстве: $\xi = \widetilde{F}/r$, где $\widetilde{F}$ и r имеют тот же смысл, что и в модели (2). Однако, по сравнению с производственной функцией (1), в функции (9) отсутствует параметр убывающей отдачи σ, в связи с чем теряет смысл связанная с этим параметром максимальная сумма денег, которую предприятие тратит на сырье (для случая функции (1) она была равна r/σ). Поэтому выражение для $\widetilde{F}$ теперь изменится и примет вид:

$$\widetilde{F} = \frac{b}{1+\kappa_1 b} \cdot \max\left(K \cdot f_2(z), \kappa z\right). \qquad (10)$$

В итоге получаем модельную систему, совпадающую с (2), но с выражениями вида (9) и (10). Для исследования динамики системы и ее эволюции будем менять теперь параметры *q*, β, *b* и *g*. Остальные параметры зафиксируем, но уже с другими значениями, чем в [1]. Поэтому результаты исследования значительно отличаются от тех, которые приведены в статье [1]. Кроме того, влияние на динамику системы оказывает тот факт, что в качестве производственной функции используется функция Кобба–Дугласа.

Исследование модели (2) с функциями (5) и (6) проводилось при следующих значениях параметров: $l = 40$, $\gamma = 0.7$, $\delta = 0.6$, $\delta_1 = 0.9$, $\alpha = 1$, $C_1 = 2$, $C = 5$, $a = 0.4$, $m = 200$, $\kappa_1 = 2$, $K = 0.8$, $\kappa = 0.6$, $d = 1$, $\nu = 0.4$, $\mu = 8$, $r = 2$, $T_1 = 20$, $T_2 = 20$, $\nu_1 = 0.6$, $C_2 = 20$, $\alpha_1 = 0.5$, $\rho = 2$. В системе в зависимости от значений *q*, β и *b* возможны следующие сценарии:

1. «Гибель» (при $b = 0$).
2. «Кризисы» вследствие слишком малой и слишком большой зарплаты (в данном случае соответственно при $b < 0.019$ и $b > 1.8$), а также при слишком малом доверии покупателей ($0 \le q < 0.021$) и малой доле экспорта (т.е. достаточно малых значениях β).
3. Равновесный режим – приход системы в устойчивое состояние равновесия типа узел (при $0.019 < b < 1.8$, $0.021 < q \le 1$ и $\beta > 0.368$).

Переход от «кризиса» к приходу системы в равновесие наблюдается также при увеличении значения параметра *g* – технологического уровня развития производства (производственной мощности); пороговое значение равно примерно 0.25.

5. Модель с производственной функцией Кобба – Дугласа с учетом динамики народонаселения и выплаты дивидендов

Аналогично п. 3, модифицируем модель из п. 4, добавив еще одну (шестую) фазовую переменную *w* – численность народонаселения. Уравнение для *w* также будет иметь вид (8). Выражение для величины $\widetilde{F}$ теперь принимает вид:

$$\widetilde{F} = \frac{bw}{1+\kappa_1 bw} \cdot \max\left(K \cdot f_2(z), \kappa z\right),$$

а выражение для $\widetilde{A}$ имеет вид (3).

Производственная функция Кобба – Дугласа теперь будет учитывать не только сырьевой, но и трудовой фактор и примет вид:

$f_1\left(\widetilde{F}/r, w\right) = C_2 \cdot \left(\widetilde{F}/r\right)^{\alpha_1} \cdot w^{1-\alpha_1}$, где $C_2 > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$.

Уравнения для dz/dt и dy/dt примут вид (4) и (5), а уравнения для dx/dt и dv/dt – вид (6) и (7). Уравнение для du/dt изменится (с учетом того, что производственная функция теперь зависит от двух аргументов) и будет иметь вид:

$$T_1 \dot{u} + u = g \cdot f_1\left(\widetilde{F}/r, w\right).$$

Функцию выплаты дивидендов, как и ранее, будем брать в виде $f_3(z) = a_1 z^s$ ($a_1 \ge 0$, $s \ge 0$).

Исследование системы проводилось при следующих значениях параметров (при данном наборе параметров в модели с учетом динамики народонаселения без дивидендов, т.е. при $a_1 = 0$ и $\nu_2 = 0$, наблюдался приход системы в равновесный режим): $l = 40$, $\gamma = 0.7$, $\delta = 0.6$, $\delta_1 = 0.9$, $\alpha = 1$, $C_1 = 2$, $C = 5$, $a = 0.4$, $m = 200$, $\kappa_1 = 1$, $K = 0.8$, $\kappa = 0.6$, $d = 1$, $\nu = 0.4$, $\mu = 8$, $r = 2$, $T_1 = 20$, $T_2 = 20$, $\nu_1 = 0.6$, $C_2 = 20$, $\alpha_1 = 0.5$,

$\rho = 2$, $q = 0.7$, $\beta = 20$, $g = 10$, $m_1 = 40$. Варьировались ν_2, a_1, s. В модели без дивидендов варьировались также a_2, b_2, a_3 и b, а в модели с дивидендами брались значения $a_2 = 2$, $b_2 = 20$, $a_3 = 0.1$ и $b = 1$.

При отсутствии выплаты дивидендов ($a_1 = 0$ и $\nu_2 = 0$) наблюдались «гибель» (z стремится к $-\infty$, а остальные переменные – к нулю), равновесный режим, а также две новые ситуации, которые можно интерпретировать как кризисные: 1) «кризис перенаселения» (x, w, u и z стремятся к $+\infty$, $y \to \mathrm{const} > 0$, v близко к нулю); 2) «кризис перепроизводства» (x, u и z стремятся к $+\infty$, y и w – к положительным константам, v близко к нулю). При «кризисе перенаселения» (он имеет место, например, при $b_2 = 30$, $a_2 = 20$, $a_3 = 0$ и $b = 30$) численность населения данной страны неограниченно растёт. При «кризисе перепроизводства» (он наблюдается, например, при $b_2 = 70$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$ и $b = 50$, если α_1 взять равным не 0.5, а 0.9) численность народонаселения остаётся постоянной, но при этом производство продукта неограниченно растёт, что, конечно, грозит системе кризисом.

Пусть дивиденды выплачиваются из наличных денег предприятия ($a_1 > 0$, $\nu_2 = 0$). При изменении a_1 от 0 до 0.26 система приходит в равновесный режим при различных начальных условиях. При переходе через пороговое значение ($a_1 = 0.26$) наблюдается «удовлетворительное состояние» второго рода.

Если размер дивидендов определяется как процент от прибыли ($a_1 = 0$, $0 \le \nu_2 \le 1$), то обнаружено, что при любых вариациях параметра ν_2 система приходит в равновесный режим при различных начальных условиях.

Пусть дивиденды выплачиваются одновременно и из всех наличных денег предприятия и от его прибыли ($\nu_2 > 0$, $a_1 > 0$, $s > 0$). В этом случае при малых значениях ν_2, т.е. в ситуации, когда предприятие тратит небольшой процент прибыли на дивиденды, система приходит в равновесный режим. Если же предприятие тратит достаточно большой процент прибыли на выплаты населению ($0.8 \le \nu_2 \le 1$), система приходит в «удовлетворительное состояние» второго рода. Данные варианты поведения системы возникают при различных вариациях параметров a_1 и s.

Выводы

В статье были рассмотрены потоковые модели с производственными функциями двух типов: дробно-рациональной и Кобба – Дугласа. Модели постепенно модифицировались в связи с необходимостью учета новых факторов, без которых динамика той или иной модели могла не вполне соответствовать реальной ситуации. Качественно-численные исследования показали, что для достижения «хорошего» (не «гибельного» и не «кризисного») сценария развития социально-экономической системы в рамках модели необходимо выбирать не очень малый процент отечественного продукта для отправки на экспорт, а значения ставки зарплаты – из некоторого интервала значений, а также обеспечить высокий уровень доверия населения отечественному продукту. Кроме того, при определенных правилах функционирования системы (например, в модели с производственной функцией Кобба – Дугласа и учетом динамики народонаселения) бывает целесообразно выплачивать населению значительную часть прибыли предприятия в качестве дивидендов, чтобы достичь процветания.

Список литературы

1. Неймарк Ю.И., Островский А.В. Потоковая модель экономической динамики // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 1 (18). С. 105–115.

2. Ostrovsky A.V. Flow Models of Economic Dynamics // Mathematical Research. V. 9. Tools for Mathematical Modelling. Proceedings of the Fourth International Conference. St.Petersburg, 2003. P. 345–349.

3. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 304 с.

4. Словарь современной экономической теории Макмиллана / Общ. ред. Дэвида У. Пирса. Пер. с англ. А.Г. Пивоварова. Науч. ред. д.э.н., проф. В.С. Автономов. М.: ИНФРА-М, 1997. 608 с.

5. Scheffran J. Economic Growth, Emission Reduction and the Choice of Energy Technology in a Dynamic-Game Framework // In: Chamoni P. et al., Operations Research Proceedings 2001. Springer, 2002. P. 329–336.

FLOW-ORIENTED MODELS OF ECONOMIC DYNAMICS WITH VARIOUS TYPES OF PRODUCTION FUNCTIONS

A.V. Ostrovsky, L.V. Voronova, T.B. Lepekhina

A number of macroeconomic models are considered. These models are called flow-oriented models, and they describe processes in socio-economic systems qualitatively with various types of production functions. The dynamics of the systems is studied depending on their parameters.

Keywords: macroeconomic model, flow-oriented model, aggregated enterprise, production function, Cobb–Douglas production function, dividends.