УДК 541.186

СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМЕРНОМ СТАНДАРТНОМ СИМПЛЕКСЕ

О.А. Кузенков, Д.В. Капитанов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Kapitanov.dmitry@cs.vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 02.03.2010

Целью работы является исследование предельных свойств решений специального класса систем нелинейных разностных уравнений. Для рассматриваемых систем вводится понятие отбора и доказывается ряд связанных с этим понятием теорем.

Ключевые слова: система разностных уравнений, стандартный симплекс, система отбора.

Разностные уравнения [1–4] являются важнейшим инструментом современной математики и математического моделирования. Они широко используются при описании самых разных процессов и систем: электрических, механических, демографических, биологических, экономических и др. Разностные уравнения и их системы находят свое применение в анализе цепных (лестничных) схем в теории цепей, при изучении моделей длинных линий в электротехнике [5]. Также они широко применяются при изучении методов численного интегрирования в вычислительной математике [6], например в методах сеток и конечных элементов [7, 8]. К системам разностных уравнений приводят многочисленные экологические задачи и модели популяционной динамики [9], экономические задачи [10] (расчет сложных процентов, управление банковскими депозитами и т.п.). Среди всего изобилия прикладных задач, приводящих к системам разностных уравнений, лишь немногие сводятся к линейным системам, которые в настоящее время изучены достаточно глубоко. При всем многообразии методов решения и исследования нелинейных систем эта область математики не изучена так же полно, как теория линейных систем. Поэтому на практике большое значение имеет изучение отдельных классов систем, исследование которых существенно опирается на их специфику.

Важное значение при построении математических моделей имеют системы разностных уравнений, в которых фазовые переменные принимают лишь неотрицательные значения. Так, например, в биологических процессах положительными остаются количества особей различных видов, в экономических − величины производств, капиталов, а также цены на продукцию. Аналогичная ситуация встречается при рассмотрении многих других моделей, которые аппроксимируют разностные уравнения.

Среди систем, у которых фазовые переменные принимают лишь неотрицательные значения, можно выделить системы разностных уравнений, относительно вектор-функций принимающих значения из стандартного симплекса [11] − подмножества конечномерного евклидова пространства, состоящего из векторов с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Так, например, в экономических моделях простого воспроизводства остаются постоянными суммы величин производимого продукта, капиталов и т.д. Если рассматривать марковские цепи [12], то распределение вероятностей на множестве траекторий заданной длины является решением системы разностных уравнений. Причем эти вероятности, очевидно, неотрицательны и их сумма равна единице. Разностные уравнения, обладающие такими свойствами, и являются предметом данного исследования. В [13] подробно исследована теория систем дифференциальных уравнений на конечномерном стандартном симплексе. Данная работа является расширением этой теории на случай разностных уравнений.

Рассмотрим систему разностных уравнений вида

$$\Delta x_i = F_i(x)\Delta t,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Здесь и далее под x понимается n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а под Δx_i − конечные разности

$$\Delta x_i = x_i(t_0 + (k+1)\Delta t) - x_i(t_0 + k\Delta t) =$$
$$= x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k), \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем говорить, что система (2) имеет неотрицательное решение $x(t_k)$, $k \in N$, если все его компоненты $x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)$ неотрицательны для любых рассматриваемых значений параметра k. Также будем называть начальные условия

$$x^0 = x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \qquad (3)$$

неотрицательными, если все компоненты вектора x^0 неотрицательны. Очевидно, что для неотрицательности решения необходимо, чтобы начальные условия были неотрицательными. Но это условие не является достаточным. Ниже мы приведем доказанное в [13] условие, которое является необходимым и достаточным для сохранения неотрицательности решения системы (2).

Теорема 1. *Для того чтобы решение системы (2) при любых неотрицательных начальных условиях было неотрицательным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$F_i(x_1(t_k), \dots, x_n(t_k))\Delta t \geq -x_i(t_k), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Систему (2), в которой функции $F_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, непрерывны по совокупности переменных, имеют частные производные $\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$ по соответствующей i-й координате, в достаточно малых окрестностях точек с нулевой i-й координатой, непрерывные в этих точках, и удовлетворяют условию квазиположительности в виде равенств*

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

можно представить в форме

$$\Delta x_i = G_i(x) x_i \Delta t, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

где функции $G_i(x)$ – непрерывные.

Доказательство. Функции $G_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, определим следующим образом

$$G_i(x) = \begin{cases} \dfrac{F_i(x)}{x_i}, & x_i \neq 0, \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), & x_i = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Очевидно, что если $x_i \neq 0$, то выполняется равенство

$$F_i(x) = G_i(x) x_i. \qquad (8)$$

Если $x_i = 0$, то в силу (5) левая и правая части равенства (7) обращаются в нуль, следовательно, равенство (7) справедливо при любых x_i. Очевидно, что функция (7) непрерывна при $x_i \neq 0$. Покажем ее непрерывность и при $x_i = 0$. Обозначим $M_i^0 = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$. В силу условий (5)

$$F_i(M_i^0) = 0.$$

Тогда из существования частной производной $\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$ в окрестности точки M_i^0 по формуле конечных приращений Лагранжа [14] будем иметь соотношение

$$F_i(x) = F_i(x) - F_i(M_i^0) = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(M_i) x_i.$$

Здесь $M_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, \theta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, где $0 < \theta < 1$. С учетом равенства (8) получим

$$G_i(x) = \frac{F_i(x)}{x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(M_i), \quad x_i \neq 0.$$

По условию теоремы частные производные $\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$ определены в достаточно малых окрестностях точек, где $x_i = 0$, и непрерывны в самих точках, тогда из последнего соотношения для функций $G_i(x)$ следует, что функции $G_i(x)$, определенные равенством (7), непрерывны и при $x_i = 0$. Теорема доказана.

Система вида (6) называется *системой с наследованием*.

Лемма 1. *Пусть для правой части i-го уравнения системы (2) условие квазиположительности выполняется в виде равенства (5) при любых неотрицательных переменных x_j, $j \neq i$. Если при этом в начальный момент времени задано условие $x_i(t_0) = 0$, то для любого номера $k > 0$ справедливо равенство $x_i(t_k) = 0$.*

Доказательство. Пусть для некоторого индекса i соответствующая ему компонента решения в начальный момент времени $x_i(t_0)$ равна нулю, то есть $x_i(t_0) = 0$. Рассмотрим ту же компоненту решения в следующий момент времени $x_i(t_1)$.

Поскольку

$$x_i(t_1) = x_i(t_0) + F_i(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))\Delta t,$$

то, учитывая равенство нулю компоненты x_i в начальный момент времени и условия (5), получим

$$x_i(t_0 + \Delta t) = F_i(x_1(t_0), \dots,$$
$$x_{i-1}(t_0), 0, x_{i+1}(t_0) \dots, x_n(t_0))\Delta t = 0.$$

То есть $x_i(t_1)=0$. Предположим, что равенство $x_i(t_l)=0$ выполнено для всех номеров $l=\overline{1,k-1}$. Покажем справедливость этого равенства и для $l=k$. Учитывая равенства (5), получим

$$x_i(t_0+k\Delta t)=F_i(x_1(t_{k-1}),\ldots,x_{i-1}(t_{k-1}),\\ 0,x_{i+1}(t_{k-1})\ldots,x_n(t_{k-1}))\Delta t=0.$$

Или, что то же самое, $x_i(t_k)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) неотрицательны: $x_i(t_0)\ge 0,\ i=\overline{1,n}$. Тогда, если условия (4) выполнены в виде строгих неравенств*

$$F_i(x_1(t_k),\ldots,x_n(t_k))\Delta t>-x_i(t_k),\\ i=\overline{1,n},\ \ k=\overline{1,\infty}, \tag{9}$$

то для любого номера $k\ge 1$ будут справедливы соотношения

$$x_l(t_k)>0,\ \ l=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть i-я компонента вектора начальных условий системы (2) строго положительна $x_i(t_0)>0$. Тогда из системы (2) и неравенств (9) получим

$$x_i(t_1)=x_i(t_0)+F_i(x)\Delta t>x_i(t_0)-x_i(t_0)=0,$$

то есть $x_i(t_1)>0$.

Пусть i-я компонента вектора начальных условий системы (2) удовлетворяет равенству $x_i(t_0)=0$. Из системы (2) и неравенств (9) получим

$$x_i(t_1)=x_i(t_0)+F_i(x)\Delta t>0,$$

то есть $x_i(t_1)>0$. Таким образом, $x_i(t_1)>0,\ i=\overline{1,n}$.

Предположим, что неравенства $x_i(t_m)>0$, $i=\overline{1,n}$, справедливы для любых номеров $1\le m\le k-1$. Покажем их справедливость и при $m=k$. Из системы (2) с учетом неравенств (9) сразу же получаем требуемый результат

$$x_i(t_k)=x_i(t_{k-1})+F_i(x)\Delta t>\\ >x_i(t_{k-1})-x_i(t_{k-1})=0,$$

то есть $x_i(t_k)>0$.

Таким образом, убеждаемся в справедливости неравенств (10). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть i-я компонента вектора начальных условий системы (2) неотрицательна: $x_i(t_0)\ge 0$. Тогда, если для правой части i-го уравнения этой системы справедливы условия (5) при любых неотрицательных переменных x_j, $j\ne i$, и существует такой номер K, что в момент времени t_K соответствующее указанному индексу i условие (4) выполняется в виде строгого равенства*

$$F_i(x_1(t_K),\ldots,x_n(t_K))\Delta t=-x_i(t_K), \tag{*}$$

то равенства $x_i(t_k)=0$ будут справедливы для любого номера $k>K$.

Доказательство. По условию леммы для правой части i-го уравнения системы (2) существует такой номер K, что в момент времени t_K справедливо равенство (*). С учетом (*) i-е уравнение системы (2) можно переписать в виде $\Delta x_i(t_K)=-x_i(t_K)$, отсюда $x_i(t_{K+1})=0$. Предположим, что равенство $x_i(t_m)=0$ справедливо для всех номеров $K+1\le m\le k-1$. Покажем, что оно будет выполняться и для $m=k$. Действительно имеет место равенство $x_i(t_k)=x_i(t_{k-1})+F_i(x)\Delta t$, или, что то же самое, $x_i(t_k)=F_i(x_1,x_2,\ldots,0,\ldots x_n)\Delta t$, отсюда в силу равенств (5) получим $x_i(t_k)=0$. Лемма доказана.

Определение 1. *Систему (2), решение которой в любой момент времени принадлежит стандартному симплексу (1), при любых начальных условиях, принадлежащих симплексу (1), будем называть системой на стандартном симплексе.*

Ниже приводится доказанное в [13] необходимое и достаточное условие принадлежности решения системы разностных уравнений стандартному симплексу.

Теорема 3. *Пусть для системы (2) справедливы условия сохранения положительности решения (4), тогда для того, чтобы решение системы (2) удовлетворяло тождеству*

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\equiv 1,$$

при любых начальных условиях $x_i(t_0)=x_i^0$, $i=\overline{1,n}$, принадлежащих стандартному симплексу (1), необходимо и достаточно, чтобы равенство $\sum_{i=1}^{n}F_i(x)=0$ выполнялось в точках x, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

Теорема 4 (о представлении). *Пусть задана система (2) на стандартном симплексе. Тогда* *отношения компонент ее решения* $\frac{x_1}{x_i}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{x_1(t_0+k\Delta t)}{x_i(t_0+k\Delta t)}=\frac{x_1(t_0+\Delta t)}{x_i(t_0+\Delta t)}\times$$
$$\times\exp\left(\sum_{l=1}^{k-1}\left[\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+l\Delta t))}{x_1(t_0+l\Delta t)}\right)-\right.\right. \quad (11)$$
$$\left.\left.-\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+l\Delta t))}{x_i(t_0+l\Delta t)}\right)\right]\right),$$

для компонент $x_1(t_0+k\Delta t)$ *и* $x_i(t_0+k\Delta t)$, *не обращающихся в нуль ни при каких значениях параметра k.*

Доказательство. Для индексов i, у которых компоненты $x_i(t_0+k\Delta t)$ не обращающихся в нуль ни при каких значениях параметра *k,* представим систему (2) в виде

$$x_i(t_0+(k+1)\Delta t)=x_i(t_0+k\Delta t)+$$
$$+x_i(t_0+k\Delta t)\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)}\Delta t.$$

В этом представлении положим $k=1$, тогда

$$x_i(t_0+2\Delta t)=x_i(t_0+\Delta t)\times$$
$$\times(1+x_i(t_0+\Delta t)\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+\Delta t)}\Delta t).$$

При $k=2$ получим

$$x_i(t_0+3\Delta t)=x_i(t_0+2\Delta t)\times$$
$$\times(1+x_i(t_0+2\Delta t)\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+2\Delta t)}\Delta t)=$$
$$=x_i(t_0+\Delta t)(1+x_i(t_0+\Delta t)\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+\Delta t)}\Delta t)\times$$
$$\times(1+x_i(t_0+2\Delta t)\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+2\Delta t)}\Delta t).$$

Аналогично выведем общую формулу

$$x_i(t_0+k\Delta t)=x_i(t_0+\Delta t)\prod_{l=1}^{k-1}(1+\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+l\Delta t)}\Delta t).$$

Пусть компонента $x_1(t_0+k\Delta t)$ не обращается в нуль ни при каких значениях параметра *k.* Представим отношение $\frac{x_1}{x_i}$ в виде

$$\frac{x_1(t_0+k\Delta t)}{x_i(t_0+k\Delta t)}=\frac{x_1(t_0+\Delta t)\prod_{l=1}^{k-1}(1+\frac{F_1(x)}{x_1(t_0+l\Delta t)}\Delta t)}{x_i(t_0+\Delta t)\prod_{l=1}^{k-1}(1+\frac{F_i(x)}{x_i(t_0+l\Delta t)}\Delta t)}=$$
$$=\frac{x_1(t_0+\Delta t)}{x_i(t_0+\Delta t)}\exp[\ln\prod_{l=1}^{k-1}(1+\frac{F_1(x(t_0+l\Delta t))}{x_1(t_0+l\Delta t)})-$$
$$-\ln\prod_{l=1}^{k-1}(1+\frac{F_i(x(t_0+l\Delta t))}{x_i(t_0+l\Delta t)})]=$$
$$=\frac{x_1(t_0+\Delta t)}{x_i(t_0+\Delta t)}\exp(\sum_{l=1}^{k-1}[\ln(1+\frac{F_1(x(t_0+l\Delta t))}{x_1(t_0+l\Delta t)})-$$
$$-\ln(1+\frac{F_i(x(t_0+l\Delta t))}{x_i(t_0+l\Delta t)})]).$$

Отсюда следует справедливость (11). Теорема доказана.

Целью дальнейшего исследования является изучение предельных свойств решения системы (2) на стандартном симплексе (1).

Определение 2. *Систему* (*2*) *на симплексе* (*1*) *будем называть системой отбора* [13], *если найдётся такой номер* i, *что независимо от начальных условий, принадлежащих стандартному симплексу, с ненулевой i-й координатой, имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{k\to\infty}x_i(t_0+k\Delta t)=1,\ \lim_{k\to\infty}x_j(t_0+k\Delta t)=0,\ i\neq j.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $i=1$, в противном случае достаточно переобозначить переменные.

Рассмотрим систему (2) на стандартном симплексе. Очевидно, что для ее правых частей будут выполняться неравенства (4). Обозначим E_1 – подмножество индексов *i* из множества $\{1,2...,n\}$, для которых условия (4) выполняются в виде строгих неравенств, а E_2 – подмножество индексов *j* из $\{1,2...,n\}$, для каждого из которых хотя бы в один момент времени эти условия выполняются в виде равенств, при этом $E_1\cup E_2=\{1,...,n\}$, $E_1\cap E_2=\varnothing$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы система* (*2*), *для которой выполняются равенства* (*5*), *являлась системой отбора, необходимо и достаточно, чтобы вдоль любого решения этой системы, соответствующего начальным условиям* $x(t_0)$, *для которых справедливы неравенства* $x_i(t_0)\geq 0$, $i=\overline{1,n}$, *выполнялись соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+k\Delta t))}{x_1(t_0+k\Delta t)}\right)-\right.$$
$$\left.-\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)}\right)\right)=+\infty \quad (12)$$

для любых индексов $i\in E_1\setminus\{1\}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенствам $x_i(t_0)\geq 0$. Заметим, что при выполнении равенств (5) множество E_1 не может быть пустым. Действительно, в противном случае все индексы $i=\overline{1,n}$ принадлежали бы множеству E_2 и для каждого индекса i нашелся бы соответствующий номер p_i такой, что в момент времени t_{p_i} условие (4) для правой части i-го уравнения выполнялось бы в виде равенства. В силу леммы 3 для любого номера $k>p_i$ соответствующая i-я компонента $x_i(t_0+k\Delta t)$ решения обращалась бы в нуль. Из всех номеров p_i, $i=\overline{1,n}$, можно было бы выбрать наибольший $p=\max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i$, и тогда для любого номера $k>p$ равенство $x_i(t_0+k\Delta t)=0$ выполнялось бы сразу для всех $i=\overline{1,n}$, что противоречит условию (1) сохранения стандартного симплекса.

Поскольку система (2) является системой отбора, то очевидно индекс $i=1$ будет принадлежать множеству E_1. Для индексов $i\in E_1$ в силу леммы 2 справедливы неравенства $x_i(t_0+k\Delta t)>0,\ k\ge 1$. Из теоремы 4 следует, что для индексов $i\in E_1\setminus\{1\}$ отношение $\dfrac{x_1}{x_i}$ компонент решения системы (2) удовлетворяет условиям (11). Так как по условию теоремы система (2), (1) является системой отбора, то $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_1}{x_i}(t_0+k\Delta t)=+\infty$, а значит, учитывая равенство (11), при $x_i(t_0+k\Delta t)>0$ ряд (12) будет расходиться к $+\infty$.

Достаточность. Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенству $x_i(t_0)\ge 0$.

Из соотношений (12) следует, что компонента $x_1(t_0+k\Delta t)$ не обращается в нуль ни при каких значениях параметра *k,* поэтому индекс $i=1$ принадлежит множеству E_1.

Если множество $E_1\setminus\{1\}$ окажется пустым, то индексы $i=\overline{2,n}$ будут принадлежать множеству E_2, следовательно, в силу леммы 3, условие $\lim\limits_{k\to\infty} x_i(t_0+k\Delta t)=0,\ i=\overline{2,n},$ отбора выполняется, и теорема доказана.

Если же множество $E_1\setminus\{1\}$ не пустое, то в силу леммы 2 будут выполняться неравенства $x_i(t_0+k\Delta t)>0,\ k\ge 1,\ i\in E_1\setminus\{1\}$. Из теоремы 4 следует, что для индексов $i\in E_1\setminus\{1\}$ выполнено равенство (11). Переходя к пределу в этом равенстве, получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_1}{x_i}(t_0+k\Delta t)=+\infty,\ \ i\in E_1\setminus\{1\}.$$

Это означает, что

$$\lim_{k\to\infty} x_i(t_0+k\Delta t)=0,\ \ i\in E_1\setminus\{1\}.$$

Для индексов $i\in E_2$ в силу леммы 3 справедливо равенство $x_i(t_0+k\Delta t)=0$ для любого $k>p$, поэтому условие отбора для этих индексов можно считать выполненным. Объединяя оба рассмотренных случая, получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_i(t_0+k\Delta t)=0$ для индексов $i\in E_2\cup\cup E_1\setminus\{1\}$, то есть для $i=\overline{2,n}$. Следовательно, в силу условий (1) $\lim\limits_{k\to\infty} x_1(t_0+k\Delta t)=1$. Но эти условия являются условиями отбора. Теорема полностью доказана.

Теорема 6. *Для того чтобы система* (*2*)*, для которой выполняются неравенства* (*9*)*, являлась системой отбора, необходимо и достаточно, чтобы вдоль любого решения этой системы, соответствующего начальным условиям* $x(t_0)$*, для которых справедливы неравенства* $x_i(t_0)\ge 0,\ i=\overline{1,n},$ *выполнялись соотношения* (*12*) *для* $i=\overline{2,n}.$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенствам $x_i(t_0)\ge 0$, тогда в силу леммы 2 для любого натурального числа $k\ge 1$ будут выполняться неравенства $x_i(t_0+k\Delta t)>0,\ i=\overline{1,n}.$ В силу теоремы 4 отношение $\dfrac{x_1}{x_i},\ i=\overline{2,n},$ компонент решения системы (2) удовлетворяет условиям (11). Так как по условию теоремы система (2), (1) является системой отбора, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_1}{x_i}(t_0+k\Delta t)=+\infty,\ \ i=\overline{2,n},$$

а значит, учитывая равенство (11), при $x_i(t_0+\Delta t)>0$ ряд (12) будет расходиться к $+\infty$.

Достаточность. Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенству $x_i(t_0)\ge 0$. Тогда из леммы 2 следует, что $x_i(t_k)>0,\ k\ge 1$.

Если для индексов $i=\overline{2,n}$ выполнено равенство (11), то, перейдя к пределу в этом равенстве, учитывая $x_i(t_1)>0,$ получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_1}{x_i}(t_0+k\Delta t)=+\infty,\ \ i=\overline{2,n}.$$

Это означает, что

$$\lim_{k\to\infty}x_i(t_0+k\Delta t)=0,\ \ i=\overline{2,n}.$$

Но эти условия являются условиями отбора. Теорема доказана.

Определение 3. Временным средним величины $\xi(k)$ будем называть следующее выражение

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\xi(l)=<\xi(k)>.$$

Теорема 7. *Для того чтобы система* (*2*) *на стандартном симплексе, для которой выполняются равенства* (*5*), *являлась системой отбора, достаточно, чтобы вдоль любого решения системы* (*2*), *соответствующего начальным условиям* $x(t_0)$, *для которых справедливы неравенства* $x_i(t_0)\ge 0,\ i=\overline{1,n},$ *выполнялись соотношения*

$$\left\langle \ln(1+\frac{F_1(x(t_0+k\Delta t))}{x_1(t_0+k\Delta t)})\right\rangle > \left\langle \ln(1+\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)})\right\rangle,\ \ i\in E_1\setminus\{1\}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенству $x_i(t_0)\ge 0.$ Так как система (2) является системой на стандартном симплексе, то для ее правых частей, очевидно, будут выполняться неравенства (4). Для индексов $i\in E_2$ в силу леммы 3 справедливо равенство $x_i(t_0+k\Delta t)=0$ для любого $k>p$, поэтому условие отбора для этих индексов можно считать выполненным.

Из соотношений (13) следует, что компонента $x_1(t_0+k\Delta t)$ не обращается в нуль ни при каких значениях параметра *k,* поэтому индекс $i=1$ принадлежит множеству E_1.

Для индексов $i\in E_1\setminus\{1\}$ в силу леммы 2 будут выполняться неравенства $x_i(t_0+k\Delta t)>0,$ $k\ge 1,\ i\in E_1\setminus\{1\}.$ Из определения временного среднего следует, что для индексов $i\in E_1\setminus\{1\},$ условие (13) можно переписать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+l\Delta t))}{x_1(t_0+l\Delta t)}\right)-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+l\Delta t))}{x_i(t_0+l\Delta t)}\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]>0.$$

Обозначим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]=\alpha,$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}\left(k\cdot\alpha\right)=+\infty.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+k\Delta t))}{x_1(t_0+k\Delta t)}\right)-\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)}\right)\right)=+\infty,\ \ i\in E_1\setminus\{1\}.$$

Это есть не что иное, как условие (12). Теорема доказана.

Теорема 8. *Для того чтобы система* (*2*) *на стандартном симплексе, для которой выполняются неравенства* (*9*), *являлась системой отбора, достаточно, чтобы вдоль любого решения системы* (*2*), *соответствующего начальным условиям* $x(t_0)$, *для которых справедливы неравенства* $x_i(t_0)\ge 0,\ i=\overline{1,n},$ *выполнялись соотношения*

$$\left\langle \ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+k\Delta t))}{x_1(t_0+k\Delta t)}\right)\right\rangle > \left\langle \ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)}\right)\right\rangle,\ \ i=\overline{2,n}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть все компоненты вектора начальных условий системы (2) удовлетворяют неравенствам $x_i(t_0)\ge 0,$ тогда в силу леммы 2 для любого натурального числа $k\ge 1$ будут выполняться неравенства $x_i(t_k)>0,$ $i=\overline{1,n}.$ Из определения временного среднего следует, что для индексов $i=\overline{2,n}$ условие (14) можно переписать в виде

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+l\Delta t))}{x_1(t_0+l\Delta t)}\right)-$$
$$-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+l\Delta t))}{x_i(t_0+l\Delta t)}\right)=$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]>0.$$

Обозначим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]=\alpha,$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_1(x)}{x_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{k}\ln\left(1+\frac{F_i(x)}{x_i}\right)\right]=\lim_{k\to\infty}\left(k\cdot\alpha\right)=+\infty.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{F_1(x(t_0+k\Delta t))}{x_1(t_0+k\Delta t)}\right)-\right.$$
$$\left.-\ln\left(1+\frac{F_i(x(t_0+k\Delta t))}{x_i(t_0+k\Delta t)}\right)\right)=+\infty,\quad i=\overline{2,n}.$$

Тогда в силу следствия из теоремы 5 система (2) на стандартном симплексе (1) будет системой отбора. Теорема доказана.

Список литературы

1. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Однородные разностные уравнения: Уч. пос. Горький: Изд-во Горьковского государственного университета, 1975.
2. Солдатов М.А. Решение линейных разностных уравнений с линейными коэффициентами // Матем. сб. Т. 47/89/:2,1959. С. 221–236.
3. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные неоднородные разностные уравнения: Уч. пос. Горький: Изд-во Горьковского государственного университета, 1980.
4. Романко В.К. Разностные уравнения. М.: Бином, 2006.
5. Кузовкин В. А. Теоретическая электротехника. М.: Логос, 2006.
6. Вержбицкий В.М. Численные методы. М.: Высшая школа, 2001.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Серия: Классический университетский учебник. М.: Бином, 2008.
9. Ризниченко Г.Ю. Популяционная динамика. URL: http://www.library.biophys.msu.ru/MathMod/PD.HTML
10. Мироновский Л.А. Моделирование разностных уравнений: Уч. пос. СПб.: СПбГУАП, 2004.
11. Кузенков О.А., Капитанов Д.В. Системы разностных уравнений на единичном симплексе // МКО. Сб. научных трудов. Том 2 / Под ред. Г.Ю. Ризниченко. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. С. 39–50.
12. Романовский И.В. Дискретный анализ. СПб.: Изд-во «Невский Диалект», 2003.
13. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пос. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 324 с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1949.

DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS ON A FINITE-DIMENSIONAL STANDARD SIMPLEX

O.A. Kuzenkov, D.V. Kapitanov

Limit properties of solutions of a special class of nonlinear difference equation systems are studied. For the systems under consideration, the selection concept is introduced and a number of theorems related to this concept are proved.

Keywords: difference equation system, standard simplex, selection system.