МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ВЫРОЖДЕННОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ. I

М.В. Долов, С.А. Чистякова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

svchistyakova@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2010

Доказывается, что полиномиальное векторное поле четвертой степени с вырожденной бесконечностью имеет не более 9 линейных частных интегралов, в том числе и с комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: полиномиальные векторные поля, алгебраические дифференциальные уравнения, частные интегралы, инвариантные множества, вырожденная бесконечность.

1. Введение

При решении различных задач теории дифференциальных уравнений линейные частные интегралы эффективно использовались в работах Л. Эйлера, К. Якоби, Ф.Г. Миндинга, Н.Н. Баутина, В.Н. Горбузова, Н.И. Вулпе, М.Н. Попа, К.С. Сибирского, А.С. Шубэ и других авторов.

Постановка задачи в данной работе связана с [1–5].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \qquad (1.1)$$

где P и Q – взаимно простые полиномы, $\max(\deg P, \deg Q) = n$. В статье [6] показано, что при $n = 3$ существуют вещественные системы (1.1) с восемью вещественными линейными частными интегралами. Изучая общий случай, когда коэффициенты полиномов P и Q и переменные x, y в (1.1) комплексные, в [2] доказывается, что максимальное число различных линейных частных интегралов системы (1.1) при $n = 3$ равно 8.

По определению, система (1.1) вырождена на бесконечности, если

$$xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) \equiv 0, \qquad (1.2)$$

где P_n и Q_n – однородные полиномы степени n, содержащиеся в P и Q соответственно. Обозначим A_n совокупность систем (1.1) с вырожденной бесконечностью. В статье [4] доказано, что для системы (1.1) из A_3 с взаимно простыми P и Q максимальное число различных линейных частных интегралов равно 6.

В работе [5] доказана

Теорема. *Наибольшее число интегральных прямых системы (1.1), где P и Q – взаимно простые вещественные полиномы четвертой степени, равно 9, притом существует 10 различных связок по 9 интегральных прямых в каждой.*

В [5] при доказательстве этой теоремы рассматриваются интегральные прямые $y = kx + b$, $x = k'y + a$ и утверждается, что «общее число различных k и k'-направлений не превосходит 5».

Следует заметить, что если система (1.1) из A_4, то различных k и k'-направлений может быть больше пяти, в чем убеждает система

$$\frac{dx}{dt} = (x-4)(x+2)(y^2 + x - 1), \ \frac{dy}{dt} = xy(y^2 - 9)$$

и ее частные интегралы: $x = 4$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 3$, $y = -3$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$, $y = x/2 + 1$, $y = -x/2 - 1$.

Кроме того, вещественная система (1.1) может иметь линейные частные интегралы с комплексными коэффициентами. Например, система

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1)(x^2 - 3x + 3),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(y-1)(y^2 - 3y + 3)$$

допускает одиннадцать линейных частных интегралов: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $x = \left(3 \pm i\sqrt{3}\right)/2$,

$y=\left(3\pm i\sqrt{3}\right)/2$, $y=x$, $y=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$,

$y=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1.1. *Для системы* (*1.1*) *из* A_4 *число линейных частных интегралов не более 9*.

Работа состоит из трех частей. В I части доказана теорема 1.1 в случае, когда система (1.1) из A_4 имеет инвариантное множество L, являющееся объединением четырех различных инвариантных множеств $\Phi_s=0$, $\deg\Phi_s=1$ таких, что для любых двух множеств $\Phi_s=0$, $\Phi_v=0$ из L выполнено условие $D(\Phi_s,\Phi_v)/D(x,y)=0$. Другие случаи изучаются частях II и III.

2. Вспомогательные утверждения

Если система (1.1) из A_n, то в силу (1.2) правые части (1.1) имеют вид

$$P=x\varphi_{n-1}(x,y)+p_{n-1}(x,y)+\dots+p_0,$$

$$Q=y\varphi_{n-1}(x,y)+q_{n-1}(x,y)+\dots+q_0,$$

где φ_j, p_j, q_j – однородные полиномы степени j.

Пусть система (1.1) из A_n имеет частный интеграл

$$\Phi_j(x,y)=a_jx+b_jy+c_j=0, \tag{2.1}$$

где a_j, b_j, $c_j\in \boldsymbol{C}$, тогда для всех x

$$\begin{aligned}&a_j(x\varphi_{n-1}+p_{n-1}+\ldots+p_0)+\\&+b_j(y\varphi_{n-1}+q_{n-1}+\ldots+q_0)\equiv\\&\equiv(a_jx+b_jy+c_j)\times\\&\times(\varphi_{n-1}+M_{n-2}^{(j)}+\ldots+M_0^{(j)}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь $M_s^{(j)}$ – однородные полиномы степени s, $s=0,1,\ldots,n-2$.

Теорема 2.1. *Если система* (*1.1*) *из* A_n *имеет инвариантные множества* L_s, *являющиеся объединением инвариантных множеств* (*2.1*) *таких, что для любых двух множеств* $\Phi_s=0$ *и* $\Phi_v=0$, *содержащихся в* L_s, *выполнено условие*

$$D(\Phi_s,\Phi_v)/D(x,y)=0, \tag{2.3}$$

то попарно различных величин $k=a_s/b_s$ *не более* $n-1$.

Доказательство. Так как частные интегралы системы (1.1) определены с точностью до постоянного множителя, то в силу условия (2.3) $a_v=a_s$, $b_v=b_s$ и $c_v\neq c_s$. Полагая в тождестве (2.2) $j=v$, $j=s$ и сравнивая в этих тождествах однородные полиномы степени $n-1$, будем иметь

$$(a_vx+b_vy)(M_{n-2}^{(v)}-M_{n-2}^{(s)})\equiv$$
$$\equiv(c_s-c_v)\varphi_{n-1}(x,y).$$

Поскольку $\max(\deg P,\deg Q)=n$, то $\varphi_{n-1}(x,y)\not\equiv0$. Поэтому полином $\varphi_{n-1}(x,y)$, $\deg\varphi_{n-1}=n-1$ делится на a_vx+b_vy. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть система* (*1.1*) *из* A_n *имеет инвариантное множество* L_1, *являющееся объединением n различных инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*). *Тогда всякое инвариантное множество L, пересечение которого с* L_1 *не содержит инвариантных множеств* (*2.1*), *не может быть объединением хотя бы двух инвариантных множеств* (*2.1*) *с условием* (*2.3*).

Доказательство. Пусть это не так. Тогда наряду с L_1 инвариантное множество L содержит хотя бы два инвариантных множества (2.1), не входящих в L_1 и удовлетворяющих условию (2.3). Без ограничения общности можно считать, что $L_1=\bigcup_{j=1}^{n}\{y=\alpha_j\}$, где α_j попарно различны, $L=\{x=0\}\bigcup\{x=\beta\}$, $\beta\neq0$. Отсюда и из тожеств вида (2.2) следует, что

$$\begin{aligned}&Q(x,y)\equiv\lambda(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_n),\\&\lambda\equiv\text{const},\\&P(x,y)\equiv\\&\equiv x(x-\beta)(p_{n-2}(x,y)+\ldots+p_0(x,y)),\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $p_j(x,y)$ – однородные полиномы степени j. Согласно (2.4) и (1.2), имеем

$$\lambda y^{n-1}\equiv xp_{n-2}(x,y)\equiv\varphi_{n-1}(x,y).$$

Следовательно, $\varphi_{n-1}(x,y)\equiv0$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Из теоремы 2.2 и приведенных выше рассуждений вытекает

Лемма 2.1. *Пусть система* (*1.1*) *из* A_n *имеет инвариантное множество L, являющееся объединением n различных инвариантных множеств* (*2.1*), *удовлетворяющих условию* (*2.3*), *и у* (*1.1*) *есть хотя бы одно инвариантное множество* (*2.1*), *не принадлежащее L. Тогда линейной невырожденной заменой переменных с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\begin{aligned}&\dot{x}=x(y^{n-1}+p(x,y))\equiv P(x,y),\\&\dot{y}=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_n)\equiv Q(x,y),\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $\alpha_j\equiv\text{const}$ *попарно различны,* $\deg p(x,y)\le n-2$, *при этом у (2.5) нет част-*

ных интегралов $y = kx + l$, $y = kx + l_1$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$, $l_1 \neq l$.

3. Системы (1.1) из A_4 с инвариантным множеством, являющимся объединением четырех инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3)

Всюду в дальнейшем рассматриваются системы (1.1), принадлежащие A_4, и изучается вопрос о наибольшем числе линейных частных интегралов (2.1) таких систем. При $n = 4$ всякое инвариантное множество, объединяющее инвариантные множества (2.1) с условием (2.3), содержит не более 4 инвариантных множеств (2.1). Поэтому возможны случаи:

1) Среди $\Phi_j = 0$ есть 4 полинома, удовлетворяющих условию (2.3), т.е. с точностью до обозначений $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, а c_j, $j = \overline{1,4}$, попарно различны.

2) Наибольшее число инвариантных множеств (2.1), удовлетворяющих условию (2.3), равно 3.

3) Наибольшее число инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3) есть 2.

4) Среди $\Phi_j = 0$ нет полиномов, удовлетворяющих (2.3).

В п. 3 изучается случай 1). В силу теоремы 2.2 и леммы 2.1 справедлива

Лемма 3.1. *Пусть система* (*1.1*) *из* A_4 *имеет не менее пяти линейных частных интегралов, при этом* $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, c_j *для* $j = \overline{1,4}$ *попарно различны. Тогда линейной невырожденной заменой с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ &\quad + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}) \equiv P, \\ \frac{dy}{dt} &= (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\times \\ &\quad \times(y-\alpha_3)(y-\alpha_4) \equiv Q, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где P *и* Q *– взаимно просты,* α_j *попарно различны,* $a_j \in C$, *при этом у (3.1) нет частных интегралов* $y = kx + l$, $y = kx + l_1$, $l \neq l_1$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$.

В силу тождества (2.2) система (3.1) допускает частный интеграл $y = kx + l$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &kx\Big((kx+l)^3 + a_{20}x^2 + a_{11}x(kx+l) + \\ &+ a_{02}(kx+l)^2 + (a_{10}+ka_{01})x + a_{01}l + a_{00}\Big) \equiv \\ &\equiv (kx+l-\alpha_1)(kx+l-\alpha_2)\times \\ &\times(kx+l-\alpha_3)(kx+l-\alpha_4). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $l \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Полагая $l = \alpha_j$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях этого тождества, можно убедиться, что справедлива

Лемма 3.2. *1) Для того чтобы система* (*3.1*) *допускала частный интеграл* $y = kx + \alpha_1$, $k \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered} A_1k^2 + a_{11}k + a_{20} = 0, \\ (2\alpha_1A_1 + B_1)k + a_{11}\alpha_1 + a_{10} = 0, \\ A_1\alpha_1^2 + B_1\alpha_1 + a_{00} + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{02} + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ B_1 &= a_{01} - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 - \alpha_3\alpha_4. \end{aligned} \tag{3.3}$$

2) Система (3.1) имеет инвариантное множество $y = kx + \alpha_2$, $k \neq 0$, *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} A_2k^2 + a_{11}k + a_{20} = 0, \\ (2\alpha_2A_2 + B_2)k + a_{11}\alpha_2 + a_{10} = 0, \\ A_2\alpha_2^2 + B_2\alpha_2 + a_{00} + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= a_{02} + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ B_2 &= a_{01} - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_3\alpha_4. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3) Система (*3.1*) *имеет инвариантное множество* $y = kx + \alpha_3$, $k \neq 0$ *в том и только том случае, если*

$$\begin{gathered} A_3k^2 + a_{11}k + a_{20} = 0, \\ (2\alpha_3A_3 + B_3)k + a_{11}\alpha_3 + a_{10} = 0, \\ A_3\alpha_3^2 + B_3\alpha_3 + a_{00} + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 = 0, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned} A_3 &= a_{02} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \\ B_3 &= a_{01} - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4. \end{aligned} \tag{3.7}$$

4) Система (*3.1*) *имеет инвариантное множество* $y = kx + \alpha_4$, $k \neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} A_4k^2 + a_{11}k + a_{20} = 0, \\ (2\alpha_4A_4 + B_4)k + a_{11}\alpha_4 + a_{10} = 0, \\ A_4\alpha_4^2 + B_4\alpha_4 + a_{00} + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned} A_4 &= a_{02} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ B_4 &= a_{01} - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Лемма 3.3. *Пусть система (3.1) имеет инвариантные множества* $y = k_1^{(j)}x + \alpha_j$, $y = k_2^{(j)}x + \alpha_j$, $k_1^{(j)} \neq k_2^{(j)}$, $k_1^{(j)}k_2^{(j)} \neq 0$. *Тогда*

$$\left(k_1^{(j)} + k_2^{(j)}\right)A_j + a_{11} = 0, \qquad (3.10)$$

$$2A_j\alpha_j + B_j = 0, \qquad (3.11)$$

$$a_{11}\alpha_j + a_{10} = 0, \qquad (3.12)$$

$$a_{00} + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 / \alpha_j - \alpha_j^2 A_j = 0, \qquad (3.13)$$

где $j = 1, 2, 3, 4$; A_1, B_1 *имеют вид* (3.3), A_2, B_2 – *вид* (3.5), A_3, B_3 – *вид* (3.7) *и* A_4, B_4 – *вид* (3.9), *при этом* $A_j \neq 0$.

Доказательство. При $j = 1$, согласно лемме 3.2, имеем

$$\begin{aligned} &A_1(k_1^{(1)})^2 + a_{11}k_1^{(1)} + a_{20} = 0,\\ &A_1(k_2^{(1)})^2 + a_{11}k_2^{(1)} + a_{20} = 0, \end{aligned} \qquad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &(2A_1\alpha_1 + B_1)k_1^{(1)} + a_{11}\alpha_1 + a_{10} = 0,\\ &(2A_1\alpha_1 + B_1)k_2^{(1)} + a_{11}\alpha_1 + a_{10} = 0, \end{aligned} \qquad (3.15)$$

$$A_1\alpha_1^2 + B_1\alpha_1 + a_{00} + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0. \qquad (3.16)$$

Из равенств (3.14) и из условия $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$ получаем (3.10). При $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$ из (3.15) следует (3.11) и (3.12) для $j = 1$. Из соотношений (3.16) и (3.11) вытекает равенство (3.13). Допустим $A_1 = 0$. Тогда, в силу (3.10)–(3.14), параметры $a_{11} = a_{10} = a_{20} = B_1 = 0$, $a_{00} = -\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Для $A_1 = B_1 = 0$, согласно (3.3), $a_{01} = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$, $a_{02} = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$. Следовательно, в (3.1) полином

$$y^3 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = (y - \alpha_2)(y - \alpha_3)(y - \alpha_4).$$

Поэтому правые части (3.1) имеют общий делитель $(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)(y - \alpha_4)$. Полученное противоречие доказывает, что $A_1 \neq 0$.

В случаях $j = 2, 3, 4$ доказательство аналогично изложенному выше. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Состояние покоя* $(0,\alpha_j)$, $j = \overline{1,4}$, *системы* (3.1) *наряду с* $x = 0$, $y = \alpha_j$ *может принадлежать не более чем двум инвариантным множествам* $y = k_1x + \alpha_j$, $y = k_2x + \alpha_j$, $k_1 \neq k_2$, $k_1k_2 \neq 0$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда без ограничения общности полагаем $j = 1$. Так как первое уравнение (3.2) имеет не менее трех решений, то (в силу леммы 3.2) $A_1 = a_{11} = a_{20} = 0$. Отсюда для $j = 1$, согласно (3.11) и (3.12), имеем $B_1 = a_{10} = 0$. Далее повторяем рассуждения леммы 3.3 и приходим к противоречию с взаимной простотой правых частей (3.1). Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Система (3.1) может иметь не более четырех инвариантных множеств вида*

$$\left.\begin{aligned} &y = k_1x + \alpha_s,\ y = k_2x + \alpha_s,\\ &k_1 \neq k_2,\ k_1k_2 \neq 0;\\ &y = k_3x + \alpha_j,\ y = k_4x + \alpha_j,\\ &k_3 \neq k_4,\ k_3k_4 \neq 0, \end{aligned}\right. \qquad (3.17)$$

где $s, j \in \{1,2,3,4\}$, $s \neq j$.

Доказательство. Допуская противное, без ограничения общности считаем $s = 1$, $j = 2$. Пусть наряду с (3.17) при $s = 1$, $j = 2$ система (3.1) имеет инвариантные множества

$$\begin{aligned} &y = k_5x + \alpha_3,\ y = k_6x + \alpha_3,\\ &k_5 \neq k_6,\ k_5k_6 \neq 0. \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Тогда в силу леммы 3.3 имеем

$$\begin{aligned} &2A_1\alpha_1 + B_1 = 2A_2\alpha_2 + B_2 =\\ &= 2A_3\alpha_3 + B_3 = 0. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Подставляя в (3.19) вместо A_j, B_j их значения из (3.3), (3.5) и (3.7), получаем

$$\begin{aligned} &(2a_{02} + 3\alpha_3 + 3\alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,\\ &(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_3) = 0. \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Из равенств (3.20) вытекает, что выполнено хотя бы одно из соотношений $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_3$. Последнее невозможно, ибо в (3.1) величины α_j парно различны. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть система (3.1) имеет инвариантные множества*

$$\begin{aligned} &y = k_1x + \alpha_1,\ y = k_2x + \alpha_1,\\ &k_1 \neq k_2,\ k_1k_2 \neq 0, \end{aligned} \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned} &y = k_3x + \alpha_2,\ y = k_4x + \alpha_2,\\ &k_3 \neq k_4,\ k_3k_4 \neq 0. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Тогда

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = a_{11} = a_{10} = 0, \qquad (3.23)$$

$$2a_{02} + 3(\alpha_3 + \alpha_4) = 0,\ a_{01} = 3\alpha_3\alpha_4, \qquad (3.24)$$

$$2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4), \qquad (3.25)$$

$$2a_{00} = 2\alpha_1\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2^2\alpha_3 - \alpha_2^2\alpha_4. \qquad (3.26)$$

Доказательство. В силу леммы 3.3, с учетом (3.12) имеем $a_{11}\alpha_1 = a_{11}\alpha_2$. Отсюда получаем $a_{11} = 0$, так как в (3.1) величины α_j попарно различны. При $a_{11} = 0$, согласно (3.12), $a_{10} = 0$, и в силу первых уравнений (3.2) и (3.4) $k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = 0$. Следовательно, выполнены равенства (3.23).

Полагая в (3.13) $j = 1, 2$ и заменяя A_1 и A_2 из (3.3) и (3.5), будем иметь

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + (\alpha_1 + \alpha_2)(a_{02} + \alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

Отсюда и из первого соотношения (3.20) следует равенство (3.25). Первое соотношение (3.24) вытекает из (3.20). Поэтому $2A_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$. Отсюда с учетом (3.25), (3.11), (3.3) находим $a_{01} = 3\alpha_3\alpha_4$.

Равенство (3.26) вытекает из (3.11), (3.5) и из первого соотношения (3.25). Лемма доказана.

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x(y^3 + x^2 - 3y),\ \frac{dy}{dt} = (y^2 + 1)(y^2 - 1),$$

допускающая частные интегралы $x = 0$, $y = -i$, $y = i$, $y = 1$, $y = -1$, $y = i + \sqrt{-i}\,x$, $y = i - \sqrt{-i}\,x$, $y = \sqrt{i}\,x - i$, $y = -\sqrt{i}\,x - i$, удовлетворяет как условиям, так и утверждению леммы 3.6.

Лемма 3.7. *Если система (3.1) имеет инвариантные множества (3.17), то максимальное число различных линейных частных интегралов системы (3.1) равно 9*.

Доказательство. Достаточно показать, что у системы (3.1) нет других инвариантных множеств вида $y = kx + l$, $k \neq 0$, отличных от (3.17). Допустим противное, при этом, как и в лемме 3.5, считаем $s = 1$, $j = 2$. Согласно лемме 3.4, $l \neq \alpha_1$, $l \neq \alpha_2$, и при этом, в силу леммы 3.1, $k \neq k_j$, $j = \overline{1,4}$. Поэтому без ограничения общности полагаем $l = \alpha_3$. По лемме 3.6 $a_{11} = a_{10} = 0$. Отсюда с учетом (3.2), (3.4) и (3.6) получаем (3.19) и (3.20). Следовательно, либо $\alpha_1 = \alpha_2$, либо $\alpha_1 = \alpha_3$, либо $\alpha_2 = \alpha_3$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.8. *Система (3.1) не может иметь одновременно 5 частных интегралов вида* $y = k_1x + \alpha_1$, $y = k_2x + \alpha_1$, $y = k_3x + \alpha_2$, $y = k_4x + \alpha_3$, $y = k_5x + \alpha_4$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу лемм 3.2 и 3.3, имеем

$$2A_1\alpha_1 + B_1 = 0,\ a_{11}\alpha_1 + a_{10} = 0, \qquad (3.27)$$

$$A_2k_3^2 + a_{11}k_3 + a_{20} = 0,$$
$$A_3k_4^2 + a_{11}k_4 + a_{20} = 0, \qquad (3.28)$$
$$A_4k_5^2 + a_{11}k_5 + a_{20} = 0,$$

$$(2\alpha_2A_2 + B_2)k_3 + a_{11}(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$$
$$(2\alpha_3A_3 + B_3)k_4 + a_{11}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0, \qquad (3.29)$$
$$(2\alpha_4A_4 + B_4)k_5 + a_{11}(\alpha_4 - \alpha_1) = 0,$$

где A_j, B_j определяются из формул (3.3), (3.5), (3.7) и (3.9) соответственно, при этом, согласно лемме 3.2, $A_1 \neq 0$. Покажем, что $a_{11} \neq 0$. Допустим, что $a_{11} = 0$, тогда из (3.29) имеем

$$2\alpha_2A_2 + B_2 = 2\alpha_3A_3 + B_3 = 2\alpha_4A_4 + B_4 = 0.$$

Отсюда с учетом (3.5), (3.7) и (3.9) следует, что

$$2a_{02} + 3\alpha_1 + 3\alpha_4 = 2a_{02} + 3\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0.$$

Последнее невозможно. Поэтому $a_{11} \neq 0$.
Из формул (3.3), (3.5), (3.7) и (3.9) имеем

$$A_2 = A_1 + \alpha_1 - \alpha_2,\ A_3 = A_1 + \alpha_1 - \alpha_3,$$
$$A_4 = A_1 + \alpha_1 - \alpha_4,$$
$$B_2 = B_1 + (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (3.30)$$
$$B_3 = B_1 + (\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_1),$$
$$B_4 = B_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1).$$

Так как $B_1 = -2\alpha_1A_1$, то

$$2A_2\alpha_2 + B_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)\times$$
$$\times(2A_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) =$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(2a_{02} + 3\alpha_3 + 3\alpha_4),$$
$$2A_3\alpha_3 + B_3 = (\alpha_3 - \alpha_1)\times$$
$$\times(2A_1 - 2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4) =$$
$$= (\alpha_3 - \alpha_1)(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_4),$$
$$2A_4\alpha_4 + B_4 = (\alpha_4 - \alpha_1)\times$$
$$\times(2A_1 - 2\alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3) =$$
$$= (\alpha_4 - \alpha_1)(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_3).$$

Используя эти равенства, согласно (3.29), имеем

$$k_3 = -a_{11}/(2a_{02} + 3\alpha_3 + 3\alpha_4),$$
$$k_4 = -a_{11}/(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_4),$$
$$k_5 = -a_{11}/(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_3).$$

Подставляя найденные значения k_3, k_4, k_5 в уравнения (3.28) и учитывая (3.30) и (3.3), будем иметь

$$a_{11}^2(a_{02} + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 - \alpha_1) =$$
$$= a_{20}(2a_{02} + 3\alpha_3 + 3\alpha_4)^2,$$
$$a_{11}^2(a_{02} + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 - \alpha_1) =$$
$$= a_{20}(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_4)^2,$$
$$a_{11}^2(a_{02} + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_1) =$$
$$= a_{20}(2a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_3)^2.$$

Если из первого равенства вычесть второе и третье, то с учетом неравенства $\alpha_j \neq \alpha_s$, $j \neq s$, получим

$$2a_{11}^2 = 3a_{20}(4a_{02} + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6\alpha_4) =$$
$$= 3a_{20}(4a_{02} + 3\alpha_2 + +6\alpha_3 + 3\alpha_4).$$

Отсюда следует, что $\alpha_3 = \alpha_4$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 3.1. *Максимальное число линейных частных интегралов системы* (*3.1*) *с взаимно простыми правыми частями равно 9*.

Доказательство. Приведенный после леммы 3.6 пример показывает, что существуют системы (3.1) с девятью линейными частными интегралами.

Допустим, что система (3.1), кроме $x = 0$, $y = \alpha_1$, $y = \alpha_2$, $y = \alpha_3$, $y = \alpha_4$, имеет не менее 5 частных линейных интегралов $y = k_j x + l_j$, $j = \overline{1, 5}$, где $k_j \neq 0$ и, в силу леммы 3.1, попарно различны. Так как $l_j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, то среди l_j есть равные. Если равны только две величины l_j, то, в силу лемм 3.4 и 3.8, число различных линейных частных интегралов не более 9. В противном случае, в силу лемм 3.4, 3.5 и 3.7, максимальное число различных линейных частных интегралов системы (3.1) равно 9. Теорема доказана.

Работа поддержана грантом НК-13П-13.

Список литературы

1. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 838–839.

2. Долов М.В., Павлюк Ю.В. К вопросу об алгебраической интегрируемости полиномиальных векторных полей // Тр. СВМО. 2004. Т. 6, № 1. С. 40–50.

3. Долов М.В., Бубнова И.В. Системы с линейными частными интегралами // Изв. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2006. № 11. С. 79–80.

4. Долов М.В., Чистякова С.А. О числе линейных интегралов кубической системы с вырожденной бесконечностью // Тр. СВМО. 2007. Т. 9, № 2. С. 62–74.

5. Латипов Х.Р., Косс М.Ш. Об интегральных прямых одного дифференциального уравнения // IX Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Качественные методы теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1984. Т. 2. С. 219–222.

6. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференц. и интегральные уравнения. Горький: ГГУ, 1977. С. 19–22.

ON LINEAR PARTIAL INTEGRALS OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS OF THE FOURTH DEGREE WITH DEGENERATE INFINITY. I.

M.V. Dolov, S.A. Chistyakova

It is proved that a polynomial vector field of the fourth degree with degenerate infinity has no more than nine linear partial integrals including those with complex coefficients.

Keywords: polynomial vector fields, algebraic differential equations, partial integrals, invariant sets, degenerate infinity.