УДК 517.518.24, 517.518.3

ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В ОЦЕНКАХ РЯДОВ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ХААРА ЧЕРЕЗ ВАРИАЦИЮ КАК МАКСИМУМ НЕКОТОРОЙ ФУНКЦИИ

О.Е. Галкин, С.Ю. Галкина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

galkin@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 08.09.2010

Показано, что точная константа c_γ в оценке $\left(\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(f)|^\gamma\right)^{1/\gamma} \le c_\gamma \cdot V_0^1 f$, где $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье – Хаара функции *f*, равна максимуму в степени $1/\gamma$ некоторой непрерывной функции L_γ на отрезке [0; 1]. Приведен пример функции положительной вариации, на которой в этой оценке достигается равенство.

Ключевые слова: система функций Хаара, коэффициенты Фурье – Хаара, функции ограниченной вариации.

Введение

Пусть функция f принадлежит пространству $V[0,1]$ всех функций ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$, $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье этой функции по системе Хаара, и $V_0^1 f$ — полная вариация функции f на отрезке $[0,1]$.

П.Л. Ульянов (см. [1, стр. 533], теорема 5') доказал, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(f)|^\gamma$ сходится при любом $\gamma > 2/3$, а также показал, что для функции $f_0(x) = x \in V[0,1]$ будет $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(f_0)|^{2/3} = \infty$.

Настоящая статья посвящена вычислению точной константы c_γ в оценке

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty}|a_n(f)|^\gamma\right)^{1/\gamma} \le c_\gamma \cdot V_0^1 f. \qquad (1)$$

Основной результат статьи содержится в теореме 1 и заключается в том, что при $\gamma \ge 1$ константа c_γ равна максимуму в степени $1/\gamma$ некоторой вещественной непрерывной функции L_γ на отрезке [0,1]. Кроме того, приведен пример функции положительной вариации, на которой в оценке (1) достигается равенство. Основная теорема 1 предваряется рядом вспомогательных лемм.

Ограничение $\gamma \ge 1$ возникает из метода доказательства.

Основные определения

Определение 1 (см. [2, стр. 381]). *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называется конечный набор точек $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$, таких что $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Обозначим через $\tau([a,b])$ семейство всех разбиений отрезка $[a,b]$. Функция f, определенная на отрезке $[a,b]$ и принимающая действительные значения, называется *функцией с ограниченной вариацией* на отрезке $[a,b]$, если найдется такое число *K*, что для всякого разбиения $T = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| \le K.$ Величина $V_a^b f = \sup_{T\in\tau([a,b])}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i) - f(t_{i-1})| \le K$ называется (*полной*) *вариацией* функции f на отрезке $[a,b]$. Класс всех функций, имеющих ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$, обозначается через $V[a,b]$.

Определение 2 (см. [3, стр. 77]). *Система Хаара* – это ортонормированная система функций $\chi = \{\chi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0,1]$, в которой $\chi_1(t) \equiv 1$, а при $n = 2^k + i$, $i = 1,\ldots,2^k$, $k = 0,1,\ldots$, функция $\chi_n(t) = \chi_k^i(t)$ определяется следующим образом:

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]; \\ 2^{k/2} & \text{при } t \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right); \\ -2^{k/2} & \text{при } t \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right); \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(\delta) & \text{при } t = 0; \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(1-\delta) & \text{при } t = 1; \\ 1/2 \lim\limits_{\delta \to 0} \left(\chi_n(t+\delta) + \chi_n(t-\delta)\right) & \text{при остальных } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Определение 3. Пусть функция f принадлежит множеству $L^1[0,1]$ всех функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке [0; 1]. Тогда ее *коэффициенты Фурье – Хаара* определяются формулой

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Определение 4. *Многочленом Хаара* порядка M, где $M \in \mathbb{N}$, будем называть любую функцию вида $P = \sum\limits_{n=1}^{M} a_n\chi_n$, где $a_1,\ldots,a_M \in \mathbb{R}$. Если $a_n = a_n(f)$ при $n = 1,\ldots,M$, то будем называть P *многочленом Хаара функции* f. Множество всех многочленов Хаара порядка 2^N, отличных от постоянной, обозначим $\mathcal{P}_N$. Кроме того, положим $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}_N$.

Замечание 1. Многочлен Хаара P_N порядка 2^N — это ступенчатая функция, имеющая скачки величиной

$$b_j = P_N\left(j/2^N + 0\right) - P_N\left(j/2^N - 0\right)$$

только в точках $j/2^N$, $j = 1,\ldots,2^N - 1$, и значения в этих точках

$$P_N\left(\frac{j}{2^N}\right) = \frac{1}{2}\left(P_N\left(\frac{j}{2^N} - 0\right) + P_N\left(\frac{j}{2^N} + 0\right)\right).$$

Замечание 2. Вариация многочлена Хаара P_N порядка 2^N вычисляется по формуле

$$V_0^1 P_N = \sum_{j=1}^{2^N - 1} |b_j|. \qquad (3)$$

Замечание 3. Коэффициенты Фурье – Хаара $a_n(P_N)$ многочлена Хаара P_N порядка 2^N при $n > 2^N$ равны нулю.

Замечание 4. У всякого многочлена $P \in \mathcal{P}$ полная вариация положительна.

Определение 5. При всяком $k = 0,1,\ldots$ зададим на отрезке $[0,1]$ ломаную $l_k(t)$ формулами:

$$l_k(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } t = \frac{p}{2^k},\ p = 0,\ldots,2^k; \\ 2^{-k/2-1} \quad \text{при } t = \frac{p}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}, \\ p = 0,\ldots,2^k - 1; \\ \text{линейна на каждом отрезке } \left[\frac{s-1}{2^{k+1}}, \frac{s-1}{2^{k+1}}\right], \\ s = 1,\ldots,2^{k+1}. \end{cases}$$

Определение 6. Для всякого $\gamma > 0$ зададим на отрезке $[0,1]$ функцию L_γ равенством

$$L_\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(l_k(t)\right)^\gamma,$$

где функции $l_k(t)$, $k = 0,1,2,\ldots$, описаны в определении 5.

Замечание 5. Из определения 5 видно, что данный функциональный ряд составлен из непрерывных функций и при $\gamma > 0$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(-k/2-1)\gamma}$. Значит, согласно признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(l_k(t)\right)^{\gamma}$ сходится равномерно, а его сумма $L_{\gamma}(t)$ есть непрерывная функция, ограниченная величиной $\dfrac{2^{-\gamma/2}}{2^{\gamma/2}-1}$.

Определение 7. При каждом $\gamma > 2/3$ зададим величину c_{γ} (точную константу в оценке (1)) равенством

$$c_{\gamma} = \sup\left\{ \frac{(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^{\gamma})^{1/\gamma}}{V_0^1 f} \;\middle|\; f \in V[0,1], V_0^1 f \neq 0 \right\}.$$

Определение 8. Для каждого $N \in \mathsf{N}$ и $\gamma > 2/3$ зададим величину $c_{N,\gamma}$ равенством

$$c_{N,\gamma} = \sup\left\{ \frac{(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(P_N)|^{\gamma})^{1/\gamma}}{V_0^1 P_N} \;\middle|\; P_N \in \mathcal{P}_N \right\}.$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$, и P_N — ее многочлен Хаара порядка 2^N. Тогда для всех $i = 1,\ldots,2^N$ и $x \in \left(\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N}\right)$ верно равенство*

$$P_N(x) = 2^N \cdot \int_0^{1/2^N} f\left(t + \frac{i-1}{2^N}\right) dt.$$

Доказательство. Известно (см. [3, стр. 78], формула (8)), что выполняется равенство

$$P_N(x) = 2^N \cdot \int_{(i-1)/2^N}^{i/2^N} f(t)\,dt$$

$$\text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N}\right).$$

Сделав линейную замену переменной, получим доказываемую формулу. □

Лемма 2. *Пусть функция f принадлежит классу $V[0,1]$, P_N – ее многочлен Хаара порядка 2^N. Тогда справедливо неравенство*

$$V_0^1 P_N \le V_0^1 f.$$

Доказательство вытекает из равенства (3) в замечании 2 и леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть $t \in [0,1]$ и $k = 0,1,\ldots$. Тогда выполнено равенство*

$$-\int_t^1 \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \chi_m(x)\,dx = l_k(t),$$

где функция $l_k(t)$ задана в определении 5.

Доказательство этой леммы приведено в [4, стр. 44].

Лемма 4. *Пусть $N \in \mathsf{N}$, P_N – многочлен Хаара порядка 2^N, и b_j – его скачки в точках $j/2^N$, $j = 1,\ldots,2^N-1$. Тогда при $n = 2,\ldots,2^N$ коэффициенты Фурье – Хаара многочлена P_N можно записать в следующем виде:*

$$a_n(P_N) = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j \cdot \int_{j/2^N}^{1} \chi_n(t)\,dt.$$

Доказательство следует из замечания 1 и формулы (2) в определении 3. □

При $p \ge 1$ будем обозначать через R_p^M пространство R^M с нормой $\|x\|_p$, где для $x = (x_1,\ldots,x_M)$ положим $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{M} |x_j|^p)^{1/p}$ при $p < \infty$, и $\|x\|_p = \sup_{j=1,\ldots,M} |x_j|$ при $p = \infty$.

При $p, r \ge 1$ обозначим символом $L(\mathsf{R}_p^M, \mathsf{R}_r^M)$ множество всех линейных ограниченных операторов $A : \mathsf{R}_p^M \to \mathsf{R}_r^M$. Через $\|A\|_{p,r}$ обозначим норму оператора $A \in L(\mathsf{R}_p^M, \mathsf{R}_r^M)$.

Лемма 5. *Пусть $\gamma \ge 1$ и $A : \mathsf{R}_1^M \to \mathsf{R}_{\gamma}^M$ – линейный оператор с матрицей $(a_{nj})_{n,j=1}^M$. Тогда норма оператора A вычисляется по формуле*

$$\|A\|_{1,\gamma} = \sup_{j=1,\ldots,M} (\sum_{n=1}^{M} |a_{nj}|^{\gamma})^{1/\gamma}.$$

Доказательство вытекает из равенства норм оператора A и сопряженного к нему оператора (см. [2, стр. 266]), а также из формулы вычисления нормы линейного функционала в R_γ^M (см. [2, стр. 216]). □

Лемма 6. *При* $\gamma \ge 1$, $N \in \mathsf{N}$ *величины* $c_{N,\gamma}$ *вычисляются по формуле*

$$c_{N,\gamma} = \sup_{j=1,\ldots,2^N-1} \left(\sum_{n=1}^{2^N-1} |a_{nj}|^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

где $a_{nj} = \int\limits_{j/2^N}^{1} \chi_{n+1}(t)dt, \quad n, j = 1,\ldots,2^N-1.$

Доказательство леммы следует из леммы 4, определения 8, равенства (3) и леммы 5. □

Лемма 7. *При* $\gamma \ge 1$, $N \in \mathsf{N}$, *величины* $c_{N,\gamma}$ *вычисляются по формуле*

$$c_{N,\gamma} = \sup_{j=1,\ldots,2^N-1} \left(L_\gamma\left(\frac{j}{2^N}\right) \right)^{1/\gamma}.$$

Доказательство леммы вытекает из леммы 6, определения функций Хаара и леммы 3. □

Лемма 8. *При* $\gamma \ge 1$ *константа* c_γ, *заданная определением 7, вычисляется по формуле*

$$c_\gamma = \sup_{N \in \mathsf{N}} c_{N,\gamma}, \quad \textit{причем} \quad c_\gamma \le \frac{\sqrt{2}}{2(2^{\gamma/2}-1)^{1/\gamma}}.$$

Доказательство. Обозначим $c_\gamma^* = \sup\limits_{N \in \mathsf{N}} c_{N,\gamma}$. В замечании 2 отмечено, что функция L_γ ограничена сверху при $\gamma > 0$:

$$L_\gamma(t) \le \frac{2^{-\gamma/2}}{2^{\gamma/2}-1} \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

Тогда, в силу леммы 7, при $\gamma \ge 1$ последовательность $\{c_{N,\gamma}\}_{N=1}^\infty$ ограничена сверху величиной $\dfrac{2^{-1/2}}{(2^{\gamma/2}-1)^{1/\gamma}}$. Поэтому

$$c_\gamma^* = \sup_{N \in \mathsf{N}} c_{N,\gamma} \le \frac{\sqrt{2}}{2(2^{\gamma/2}-1)^{1/\gamma}}. \tag{4}$$

Докажем, что $c_\gamma = c_\gamma^*$. Пусть f — произвольная функция с ограниченной ненулевой вариацией, P_N — ее многочлен Хаара порядка 2^N. Если $V_0^1 P_N > 0$, то из определения 8 величин $c_{N,\gamma}$ следует неравенство

$$\left(\sum_{n=2}^{2^N} |a_n(P_N)|^\gamma \right)^{1/\gamma} \le c_{N,\gamma} \cdot V_0^1 P_N.$$

Если же $V_0^1 P_N = 0$, то P_N — постоянная функция, и это неравенство превращается в равенство. Применяя формулу (4) и лемму 2, получаем:

$$\left(\sum_{n=2}^{2^N} |a_n(P_N)|^\gamma \right)^{1/\gamma} \le c_\gamma^* \cdot V_0^1 P_N \le c_\gamma^* \cdot V_0^1 f$$

при всех $N \in \mathsf{N}$.

Учитывая, что при $n = 1,\ldots,2^N$ коэффициенты Фурье – Хаара функции f и многочлена P_N совпадают, и переходя к пределу при $N \to \infty$, получим:

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^\gamma \right)^{1/\gamma} \le c_\gamma^* \cdot V_0^1 f.$$

Поскольку это неравенство верно для произвольной функции f с ограниченной ненулевой вариацией, то

$$c_\gamma = \sup\left\{ \frac{(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^\gamma)^{1/\gamma}}{V_0^1 f} \;\middle|\; f \in V[0,1], V_0^1 f \ne 0 \right\} \le c_\gamma^*.$$

С другой стороны, верна оценка

$$c_\gamma = \sup\left\{ \frac{(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^\gamma)^{1/\gamma}}{V_0^1 f} \;\middle|\; f \in V[0,1], V_0^1 f \ne 0 \right\} \ge$$

$$\ge \sup_{P \in \mathcal{P}} \frac{(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n(P)|^\gamma)^{1/\gamma}}{V_0^1 P} = \sup_{N \in \mathsf{N}} c_{N,\gamma} = c_\gamma^*.$$

Таким образом, $c_\gamma = c_\gamma^*$. Лемма доказана. □

Основная теорема

Теорема 1. *При* $\gamma \ge 1$ *выполняется следующее:*

а) величина c_γ, *заданная определением 7, вычисляется по формуле*

$$c_\gamma = \left(\max_{t \in [0,1]} L_\gamma(t) \right)^{1/\gamma};$$

б) равенство в оценке (1) достигается, например, на функции

$$f_\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le t \le t_\gamma, \\ 1 & \text{при} \quad t_\gamma < t \le 1, \end{cases}$$

где t_γ *— любая из точек, в которых функция* $L_\gamma(t)$ *принимает наибольшее значение на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Докажем утверждение пункта а). Обозначим через α_γ величину

$$\alpha_\gamma = \left(\max_{t\in[0,1]} L_\gamma(t) \right)^{1/\gamma} \qquad (5)$$

и покажем, что $c_\gamma = \alpha_\gamma$. По леммам 7 и 8 при $\gamma \ge 1$ величина $c_{N,\gamma}$ вычисляется по формуле

$$c_\gamma = \sup_{N\in\mathbf{N}} c_{N,\gamma},$$

где $c_{N,\gamma} = \sup\limits_{j=1,\ldots,2^N-1} \left(L_\gamma\left(\dfrac{j}{2^N}\right)\right)^{1/\gamma}$.

Очевидно, что $c_{N,\gamma} \le \alpha_\gamma$. Переходя в этом неравенстве к супремуму по $N \in \mathbf{N}$, получаем:

$$c_\gamma \le \alpha_\gamma. \qquad (6)$$

Покажем, что верно и обратное неравенство. Как отмечено в замечании 5, функция L_γ непрерывна на отрезке $[0,1]$. Поэтому найдется число $t_\gamma \in [0,1]$, такое что $L_\gamma(t_\gamma) = \max\limits_{t\in[0,1]} L_\gamma(t)$. Тогда $\alpha_\gamma = \left(L_\gamma(t_\gamma)\right)^{1/\gamma}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции L_γ в точке t_γ, найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in [0,1]$ при $|t - t_\gamma| < \delta$ выполняется неравенство $|(L_\gamma(t))^{1/\gamma} - \alpha_\gamma| < \varepsilon$. Возьмем натуральное число N_0 так, что $\dfrac{1}{2^{N_0}} < \delta$. Тогда найдется номер $j_0 \in \{1,2,\ldots,2^{N_0}-1\}$ такой, что $|j_0/2^{N_0} - t_\gamma| < \delta$. Поэтому

$$\left| \left(L_\gamma\left(\frac{j_0}{2^{N_0}}\right)\right)^{1/\gamma} - \alpha_\gamma \right| < \varepsilon.$$

Отсюда $\alpha_\gamma < c_{N_0,\gamma} + \varepsilon$. А из леммы 8 следует, что $\alpha_\gamma < c_\gamma + \varepsilon$. В силу того, что ε можно взять сколь угодно малым, имеем

$$\alpha_\gamma \le c_\gamma.$$

Из последнего неравенства и из (6) получаем, что $c_\gamma = \alpha_\gamma$. Тогда по (5) выполняется равенство $c_\gamma = \left(\max\limits_{t\in[0,1]} L_\gamma(t) \right)^{1/\gamma}$. Утверждение пункта а) доказано.

Утверждение пункта б) теоремы следует из определения функций Хаара и леммы 3. □

Статья подготовлена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П-13, контракт П945).

Список литературы

1. Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара // ДАН СССР. 1963. Т. 149. Вып. 3. С. 532–534.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.
3. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.
4. Галкина С.Ю. О коэффициентах Фурье – Хаара от функций с ограниченной вариацией // Матем. заметки. 1992. Т. 51, вып. 1. С. 42–54.

SHARP CONSTANT IN ESTIMATIONS OF SERIES OF FOURIER – HAAR COEFFICIENTS VIA VARIATION AS A MAXIMUM OF SOME FUNCTION

O.E. Galkin, S.Yu. Galkina

It is shown that the sharp constant c_γ in the estimation $\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n(f)|^\gamma \right)^{1/\gamma} \le c_\gamma \cdot V_0^1 f$, where $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ are the Fourier – Haar coefficients of function *f*, is equal to $1/\gamma$ power of the maximum of some continuous function L_γ on the interval [0; 1]. As an example, a positive variation function is presented that provides an equality in this estimation.

Keywords: Haar function system, Fourier – Haar coefficients, functions of bounded variation.