УДК 330.101 (030)

ДИНАМИКА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СУБЪЕКТА

А.Г. Иванов [1], ***В.А. Кукушкин*** [2]

[1] Чувашский госуниверситет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары
[2] Филиал Санкт-Петербургского государственного инженерно-экономического университета, Чебоксары

animax@chuvsu.ru

Поступила в редакцию 05.04.2009

В рамках вероятностно-динамического метода, предложенного авторами, рассмотрены вопросы потребительского выбора и полезности благ, формирующих оптимальное потребительское поведение субъекта. Решена система дифференциальных уравнений для функции оптимального состояния и найдены спектры благ и предпринимательской способности субъекта, обеспечивающих это состояние. Получено выражение для полного набора благ, максимизирующего общую полезность этого набора. Показано, что каждое благо такого набора должно потребляться в количестве, обеспечивающем одинаковую предельную полезность всех благ набора.

Ключевые слова: вероятностно-динамический метод, потребительское поведение, полный набор потребительских благ, потребительский бюджет, функции полезности благ и полного набора благ, бюджетная функция, кванты предпринимательской способности, законы Госсена, функция полезности фон Неймана – Моргенштерна.

Введение

Под потребительским поведением понимается экономическая деятельность, направленная на удовлетворение потребностей субъекта в определенном наборе экономических благ – материальном факторе потребительского поведения. По типу удовлетворяемых потребностей все блага делятся на большие классы α, каждый из которых, в свою очередь, делится на подклассы α_k, в соответствии со спецификой потребностей в товарах этого класса. Классы составляют продукты питания, предметы одежды, обувь, интеллектуальные блага, предметы роскоши и др. Класс продуктов питания содержит в себе подклассы мясных, молочных продуктов, хлебобулочных, кондитерских изделий и т.д.

Набор денежных средств, выступающий в качестве условия приобретения и потребления соответствующих средств материального фактора, составляет понятие денежного фактора, или бюджета потребительского поведения. Потребительский бюджет подразделяется на статьи и пункты, соответствующие классам и подклассам материального фактора.

Способность субъекта к рациональному использованию материальных и денежных средств для формирования данного потребительского поведения в рамках вероятностно-динамического метода описывается величиной частной (индивидуальной) собственности P, представленной числом квантов предпринимательской способности субъекта [1, 2].

Для описания потребительского поведения субъекта введем полные наборы самосопряженных операторов основных факторов состояния: материального, денежного и фактора предпринимательской способности с элементами $\hat{\vec{b}} = \left(\hat{b}_{\alpha_k}\right)$, $\hat{\vec{x}} = \left(\hat{x}_{\alpha_k}\right)$ и $\hat{\vec{n}} = \{\hat{n}_l\}$, соответственно. Каждые из этих наборов определяют представление функции экономического состояния $\left|\Psi, t\right\rangle$ как элемент гильбертова пространства, базис которого сформирован полной системой собственных функций операторов данного набора. Различают материальное $\left\langle \vec{b} \middle| \Psi, t\right\rangle$, денежное $\left\langle \vec{x} \middle| \Psi, t\right\rangle$ и представление предпринимательской способности $\left\langle \vec{n} \middle| \Psi, t\right\rangle$. Экономический смысл имеют квадраты модулей представлений основных факторов, определяющих законы распределения случайных векторов $\vec{b} = \left(b_{\alpha_k}\right)$, $\vec{x} = \left(x_{\alpha_k}\right)$ и $\vec{n} = \{n_l\}$ в соответствующих векторных пространствах. Допустимые значения случайных координат каждого из этих векторов образуют спектры операторов данного полного набора. Действительные неотрицательные числа b_{α_k} равны количеству (т.е. числу единиц измерения) благ, входящих в подкласс α_k класса α; неотрицательные числа x_{α_k}

определяют величину денежных средств, предназначенных для приобретения и потребления благ b_{α_k}, и имеют размерность, выражаемую в денежных единицах ($, €, RUB, DM, F и т.п.); $n_l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Величины b_{α_k} и x_{α_k}, отвечающие подклассу α_k, называются сопряженными факторами состояния.

Так, функция $\left|\langle\vec{x}\,|\,\Psi,t\rangle\right|^2$ определяет плотность вероятности того, что при формировании состояния $|\Psi,t\rangle$ субъект использовал денежные средства, описываемые вектором $\vec{x}$. В дальнейшем мы будем использовать предположение о независимости потребления благ, принадлежащих различным подклассам α_k и α_m, в том смысле, что вероятность использования денежных средств x_{α_k} не зависит от условий, при которых используются средства x_{α_m}, то есть

$$\left|\langle\vec{x}\,|\,\Psi,t\rangle\right|^2 = \prod_{\alpha=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_\alpha}\left|\langle x_{\alpha_k}\,|\,\Psi,t\rangle\right|^2 .$$

Здесь n_α – число подклассов класса α; $\alpha = 1,\ 2, \ldots, N$.

Средние квадратичные отклонения координат x_{α_k} и b_{α_k} связаны между собой соотношением неопределенностей [1]:

$$\sigma\left(x_{\alpha_k}\right)\sigma\left(b_{\alpha_k}\right) \geq \frac{\lambda}{2},\ \lambda \text{ – рыночный параметр,} \quad (1)$$

которое характеризует свободу проявления предпринимательской способности субъекта при формировании потребительского поведения в условиях данного механизма хозяйствования. В зависимости от величины рыночного параметра различают рыночный, смешанный и плановый механизмы хозяйственной деятельности.

При рыночном механизме хозяйствования способность субъекта к принятию решения описывается оператором индивидуальной (частной) собственности P

$$\hat{P}(\hat{\vec{b}},\hat{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\beta\left(\hat{\vec{b}}\right)\hat{\vec{b}}^2 + V\left(\hat{\vec{x}}\right) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_\alpha}\left\{\frac{1}{2}\beta_{\alpha_k}\left(\hat{b}_{\alpha_k}\right)\hat{b}_{\alpha_k}^2 + V_{\alpha_k}\left(\hat{x}_{\alpha_k}\right)\right\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_\alpha}\hat{P}_{\alpha_k}. \quad (2)$$

Здесь $\beta_{\alpha_k}\left(\hat{b}_{\alpha_k}\right), \beta\left(\hat{\vec{b}}\right)$ – операторные функции полезности блага b_{α_k} и полного набора благ $\vec{b}$, соответственно. В дальнейшем будем пользоваться денежным представлением ($\vec{x}$-представлением) функции состояния, для которого операторы $\hat{b}_{\alpha_k} = -i\lambda\dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}$ и $\hat{x}_{\alpha_k} = x_{\alpha_k}$ [2].

В качестве условия, ограничивающего выбор такого решения при формировании потребительского поведения, выступает неопределенность потребительского бюджета, описываемая функцией бюджетного ограничения

$$V\left(\vec{x}\right) = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_\alpha}V_{\alpha_k}\left(x_{\alpha_k}\right), \quad (3)$$

где

$$V_{\alpha_k}\left(x_{\alpha_k}\right) = \begin{cases} 0, & x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k} \\ V_{\alpha_k}^{(0)}, & x_{\alpha_k} \notin \Delta X_{\alpha_k} \end{cases} \quad (4)$$

– бюджетная «яма» подкласса α_k (см. рис. 1); величины $V_{\alpha_k}^{(0)}$ определяют предельное значение собственности P, которой может обладать субъект в условиях заданных неопределенностей $\Delta X_{\alpha_k} = \left[x_{\alpha_k}^{(1)}; x_{\alpha_k}^{(2)}\right]$ потребительского бюджета.

Нахождение спектра собственности и потребительских благ, формирующих оптимальное состояние субъекта, сводится к решению уравнения на собственные функции и собственные значения оператора (2):

$$\langle\vec{x}\,|\hat{P}(\hat{\vec{b}},\vec{x})|\,\Psi_P\rangle = P\langle\vec{x}\,|\,\Psi_P\rangle, \quad (5)$$

основного уравнения рыночной динамики потребительского поведения. Критерий оптимальности экономических состояний субъекта описан в работах [1, 2].

Решение основного уравнения динамики

1. В силу упомянутой выше независимости потребления благ, относящихся к различным подклассам α_k, решение уравнения (5) следует искать в виде произведения

$$\langle\vec{x}\,|\Psi_P\rangle = \prod_{\alpha=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_\alpha}\left\langle x_{\alpha_k}\,\middle|\,\Psi_{P_{\alpha_k}}\right\rangle \equiv$$
$$\equiv \prod_{\alpha=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_\alpha}\left\langle x_{\alpha_k}\,\middle|\,P_{\alpha_k}\right\rangle,$$

где функции $\left\langle x_{\alpha_k}\,\middle|\,\Psi_{P_{\alpha_k}}\right\rangle$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

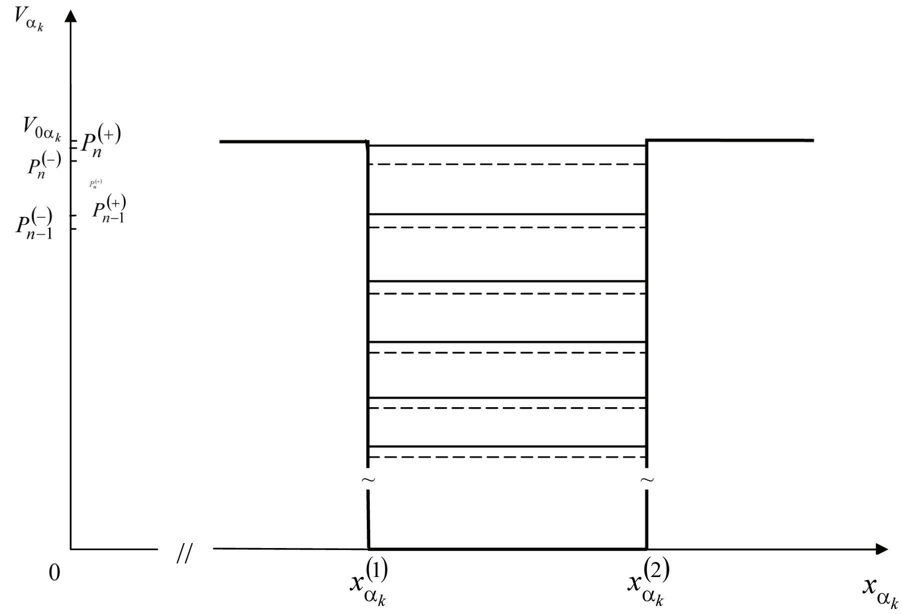

Рис. 1. Структура спектра собственности P_{α_k} в бюджетной яме (4). Сплошные и пунктирные линии отвечают, соответственно, четным и нечетным решениям уравнения (7)

$$\left\langle x_{\alpha_k} \middle| \widehat{P}_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = \\ = \left\langle x_{\alpha_k} \middle\| \left[\frac{\beta_{\alpha_k}\left(\widehat{b}_{\alpha_k}\right)\widehat{b}^2_{\alpha_k}}{2} + V_{\alpha_k}\left(x_{\alpha_k}\right) \right] \middle\| P_{\alpha_k} \right\rangle = \\ = P_{\alpha_k} \left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle, \quad (6)$$

где $\widehat{b}_{\alpha_k} = -i\lambda \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}$.

Для решения (6) заметим, что функция V_{α_k} постоянна на различных участках области определения, кроме граничных точек $x_{\alpha_k}^{(1)}$ и $x_{\alpha_k}^{(2)}$ области неопределенностей ΔX_{α_k} бюджета, где эта функция испытывает скачок. Предполагая, что при $V_{\alpha_k} = \text{const}$ операторная функция $\widehat{P}_{\alpha_k} = \widehat{P}_{\alpha_k}\left(\widehat{b}_{\alpha_k}\right)$ может быть разложена в ряд Тейлора по степеням оператора $\widehat{b}_{\alpha_k}$, легко убедиться в справедливости правила коммутации $\left[\widehat{P}_{\alpha_k}, \widehat{b}_{\alpha_k}\right] = 0$, в силу чего собственные значения операторов $\widehat{P}_{\alpha_k}$ и $\widehat{b}_{\alpha_k}$ будут связаны друг с другом функциональной зависимостью: $P_{\alpha_k} = P_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$, а их собственные функции совпадают (с точностью до константы), то есть имеет место уравнение:

$$\left\langle x_{\alpha_k} \middle| \widehat{b}_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = \\ \left\langle x_{\alpha_k} \middle| -i\lambda \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = b_{\alpha_k}\left(P_{\alpha_k}\right)\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle \quad (7)$$

($\vec{x}$ -представление).

В точках разрыва функции $V_{\alpha_k}\left(x_{\alpha_k}\right)$ должны выполняться условия непрерывности решения (6) и его первой производной (условия «сшивания» решений):

$$\lim_{x_{\alpha_k} \to x_{\alpha_k}^{(1,2)} - 0} \frac{d \ln\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle}{dx_{\alpha_k}} = \lim_{x_{\alpha_k} \to x_{\alpha_k}^{(1,2)} + 0} \frac{d \ln\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle}{dx_{\alpha_k}}. \quad (8)$$

Элементарное интегрирование уравнения (7) дает

$$\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = C_{\alpha_k} \exp\left[-i \frac{b_{\alpha_k}\left(P_{\alpha_k}\right)x_{\alpha_k}}{\lambda} \right], \quad (9)$$

где C_{α_k} – нормировочная константа. Подставляя (9) в (8), получаем

$$\frac{\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)b^2_{\alpha_k}}{2} = P_{\alpha_k} \geq 0, \; x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k}; \quad (10)$$

$$\frac{\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)b^2_{\alpha_k}}{2} = P_{\alpha_k} - V_{\alpha_k}^{(0)} \leq 0, \\ x_{\alpha_k} \notin \Delta X_{\alpha_k}. \quad (11)$$

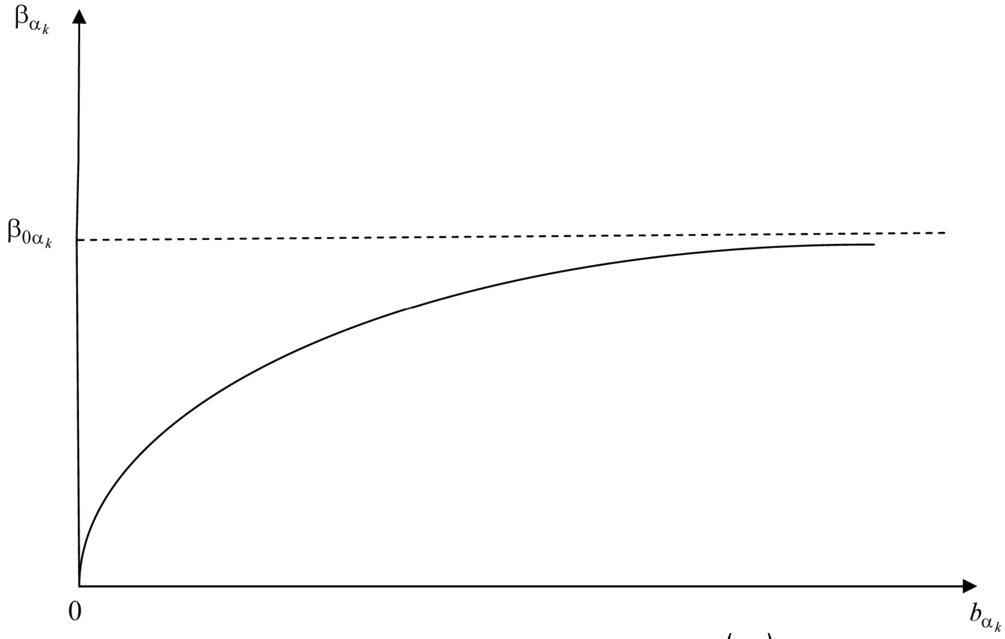

Рис. 2. Характерный вид функции общей полезности $\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$ блага α_k

Здесь $\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$ – функция общей полезности, описывающая способность блага b_{α_k} удовлетворять определенным потребностям субъекта. Численно функция $\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$ равна изменению собственности $2P_{\alpha_k}$ при изменении величины $b_{\alpha_k}^2$ на единицу.

Из соотношений (10), (11) вытекает, что функция общей полезности $\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$ может принимать только неотрицательные значения. Аналитическое выражение для этой функции, однако, не удается получить из общих соображений. Оно может быть найдено лишь при анализе взаимодействия спроса и предложения на данный вид потребительского товара [2]. Поэтому для дальнейшего изложения ограничимся видом зависимости $\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right)$, иллюстрирующей эмпирический закон убывающей предельной полезности [3] (так называемый первый закон Госсена, см. рис. 2). Мы предполагаем, что приобретение дополнительных благ в области больших значений b_{α_k} приводит лишь к насыщению полезности ($\beta_{\alpha_k} \to \beta_{0\alpha_k} = =\text{const}$), не принося вреда субъекту.

Согласно (11), в области $x_{\alpha_k} \notin \Delta X_{\alpha_k}$ (так называемой запрещенной области) величины b_{α_k} принимают мнимые значения $b_{\alpha_k} = =-i\kappa_{\alpha_k}\left(P_{\alpha_k}\right)$, что исключает возможность регулярной экономической деятельности вне области задания бюджетных средств. Соответствующая функция состояния (9) описывает экспоненциально убывающую плотность вероятности:

$$\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = C_{\alpha_k} \exp\left[-\frac{\kappa_{\alpha_k}\left(P_{\alpha_k}\right)x_{\alpha_k}}{\lambda}\right]. \quad (12)$$

Тем не менее использование денежных средств в запрещенной области носит индетерминистический характер и обусловлено соотношением неопределенностей (1). Действительно, если процесс измерения зарегистрировал в состоянии $\left\langle x_{\alpha_k} \middle| \Psi_{P_{\alpha_k}} \right\rangle$ значения денежного фактора x_{α_k} в запрещенной области, то возмущение, испытываемое субъектом в ходе такого процесса, приведет к значительному разбросу значений блага b_{α_k}, являющихся, однако, действительными. При $\lambda \to 0$ мощность спектра таких значений стремится к нулю, что приводит к невозможности регулярных (плановых) состояний в запрещенной области.

Решение уравнения (6) в области $x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k}$ (разрешенной области функции бюджетного ограничения) следует искать в виде линейной комбинации комплексно-сопряженных функций (9):

$$\left\langle x_{\alpha_k} \middle| P_{\alpha_k} \right\rangle = A \sin\left(\frac{b_{\alpha_k} x_{\alpha_k}}{\lambda} + \delta_{\alpha_k}\right). \quad (13)$$

Фазу δ_{α_k} и спектр возможных значений блага b_{α_k} найдем из условий «сшивания» (8) функций (12) и (13) на границах бюджетной «ямы». Для удобства поместим центр «ямы» в начале координат, совершив преобразование $\bar{x}_{\alpha_k} = x_{\alpha_k} - \frac{x^{(2)}_{\alpha_k} + x^{(1)}_{\alpha_k}}{2}$. Приравнивая логарифмические производные $\frac{d}{d\bar{x}_{\alpha_k}} \ln\langle \bar{x}_{\alpha_k} | P_{\alpha_\kappa} \rangle$ функций (12) и (13) в точках $\bar{x}_{\alpha_k} = \pm\frac{\left|x^{(2)}_{\alpha_k} - x^{(1)}_{\alpha_k}\right|}{2}$, получим (для удобства до конца пункта индекс α_k опускаем):

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{b\bar{a}}{2} + \bar{\delta}\right) = \frac{b}{\kappa};\quad \operatorname{tg}\left(\frac{b\bar{a}}{2} + \bar{\delta}\right) = -\frac{b}{\kappa}. \quad (14)$$

Здесь $\bar{a} = \frac{\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right|}{\lambda} \equiv \frac{a}{\lambda}$ – приведенная ширина бюджетной «ямы»; $\bar{\delta} = \delta - b\frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2\lambda}$. Система тригонометрических уравнений (14) имеет два класса решений, соответствующих полуцелым и целым значениям приведенной фазы $\bar{\delta}/\pi$. Первый класс $(\bar{\delta} = (l + 1/2)\pi, l \in Z)$ определяет четные $\langle \bar{x} | \Psi_P \rangle^{(+)}$, а второй ($\bar{\delta} = l\pi$) – нечетные $\langle \bar{x} | \Psi_P \rangle^{(-)}$ решения уравнения (6):

$$\langle \bar{x} | P \rangle^{(+)} = A\begin{cases} \cos\frac{b\bar{a}}{2}\exp\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{a}{2} + \bar{x}\right), & -\frac{a}{2} > \bar{x}; \\ \cos b\bar{x}, & |\bar{x}| \le a/2; \\ \cos\frac{b\bar{a}}{2}\exp\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{a}{2} - \bar{x}\right), & \frac{a}{2} < \bar{x}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\langle \bar{x} | P \rangle^{(-)} = A\begin{cases} -\sin\frac{b\bar{a}}{2}\exp\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{a}{2} + \bar{x}\right), & -\frac{a}{2} > \bar{x}; \\ \sin b\bar{x}, & |\bar{x}| \le a/2; \\ \sin\frac{b\bar{a}}{2}\exp\frac{\kappa}{\lambda}\left(\frac{a}{2} - \bar{x}\right), & \frac{a}{2} < \bar{x}, \end{cases}$$

со спектром собственности, вытекающим из уравнений

$$\cos\frac{b\bar{a}}{2} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \kappa^2}},$$

$$\sin\frac{b\bar{a}}{2} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 + \kappa^2}}, \quad (16)$$

соответственно. Здесь $A = \left(\frac{\kappa/\lambda}{1 + \kappa\bar{a}/2}\right)^{\frac{1}{2}}$ – нормировочная константа.

Рассмотрим решение уравнений (16) в наиболее интересном случае больших значений b, для которых, в согласии со сказанным выше, функция полезности выходит на асимптоту $\beta(b) \approx \beta_0 = \text{const}$, называемую полезностью насыщения. В этом случае соотношения (16) принимают вид

$$\cos\eta = \gamma\eta; \sin\eta = -\gamma\eta, \quad (17)$$

где $\eta = \frac{b\bar{a}}{2} = \sqrt{\frac{P\bar{a}^2}{2\beta_0}}$; $\gamma = \sqrt{\frac{2\beta_0}{V_0\bar{a}^2}}$.

Рассмотрим структуру дозволенных уровней собственности в бюджетной «яме», определяемую уравнениями (17). При заданном значении V_0 вблизи вершины «ямы» формируется уровень $P^{(+)}_n$, отвечающий четному решению уравнения (6) (см. рис. 1):

$$P^{(+)}_n = V_0\left(1 - \varepsilon^{(+)2}_n\right), \quad (18)$$

где $\varepsilon_n = 2\pi n - \sqrt{\frac{V_0\bar{a}^2}{2\beta_0}} << 1$, причем номер уровня n $(n >> 1)$ равен

$$n = \left[\sqrt{\frac{V_0\bar{a}^2}{8\pi^2\beta_0}}\right], \quad (19)$$

где $[x]$ – целая часть числа *x*. Нечетный уровень $P^{(-)}_n$ определяется выражением

$$P^{(-)}_n = \frac{8\pi^2\beta_0}{\bar{a}^2}\left(n - \frac{1}{4}\right)^2. \quad (20)$$

Последующие уровни собственности $P^{(+)}_k$, $P^{(-)}_k$ $(1 << k \le n - 1)$ представляют собой дублеты линий:

$$P^{(+)}_k = P^{(+)}_{k,0}\left(1 \pm \varepsilon^{(+)}_k\right); P^{(-)}_k = P^{(-)}_{k,0}\left(1 \pm \varepsilon^{(-)}_k\right), \quad (21)$$

где

$$P^{(\pm)}_{k,0} = \frac{8\pi^2\beta_0}{\bar{a}^2}k^2_\pm;\ \varepsilon^{(\pm)}_k \approx \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{k_\pm}{n}};\ k_+ = k;$$

$$k_- = k - \frac{1}{4}.$$

В пренебрежении слабым расщеплением уровней собственности в дублетах расстояние между соседними линиями спектра одинаковой четности запишем в виде

$$\Delta P_k^{(\pm)} = P_{k+1}^{(\pm)} - P_k^{(\pm)} \approx \frac{4\pi^2\beta_0}{\bar{a}^2} k \equiv \frac{4\pi^2\beta_0\lambda^2}{a^2} k ;$$
$$(1 << k \le n-1). \quad (22)$$

Величина $\Delta P_k^{(\pm)}$ получила название кванта собственности, или кванта предпринимательской способности. Величина собственности, запасенная в кванте, характеризует способность субъекта к выбору решения о потреблении блага, обеспечивающего переход с уровня $P_k^{(\pm)}$ на уровень $P_{k+1}^{(\pm)}$.

Мы видим, что активизация предпринимательской способности проявляется в типично рыночном случае (λ велико) при выборе блага большой полезности β_0 субъектом с малой неопределенностью потребительского бюджета a. Такой рост активности с уменьшением величины a характеризует поведение «бедных» субъектов, для которых выбор блага усложняется недостаточностью выделенных денежных средств $x \in \Delta X$, сопряженных с малой неопределенностью бюджета a.

Спектр собственности $P_l^{(\pm)}$ определяет допустимые значения $b_l^{(\pm)}$ блага, формирующего оптимальное потребительское поведение субъекта:

$$b_l^{(\pm)} = \sqrt{\frac{2P_l^{(\pm)}}{\beta_0}} \approx \frac{4\pi}{\bar{a}} l_{\pm} \left[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{l}{n}} \right]; \quad (23)$$

здесь $l_+ = l$; $l_- = l - \frac{1}{4}$; $1 << l \le n$. Так, максимальное значение $b_n^{(+)}$ блага, приобретаемого при заданных параметрах V_0, $\bar{a}$ бюджетной «ямы» и полезности β_0 этого блага, составляет

$$b_n^{(+)} = \frac{4\pi}{\bar{a}} n = \sqrt{\frac{2V_0}{\beta_0}}. \quad (24)$$

Формула (24) демонстрирует известное положение теории потребительского поведения: количество благ, обеспечивающих насыщение большей полезности, оказывается меньше количества благ, обеспечивающих насыщение меньшей полезности.

С уменьшением неопределенности бюджетной «ямы» a (при фиксированных значениях V_0 и β_0) уменьшается максимальное число линий спектра благ n и, следовательно, увеличивается расстояние между соседними уровнями. Этот вывод вновь характерен для потребления «бедного» субъекта, который не может позволить себе излишеств при выборе благ. Напротив, при больших значениях a (в случае «богатого» субъекта) становится возможным создание потребительского поведения с богатым спектром закупаемых благ.

2. До сих пор мы рассматривали потребительское поведение субъекта, реализующееся на отдельных уровнях спектра собственности. Такое состояние описывается собственными функциями (13) оператора $\hat{P}_{\alpha_k}$ (2), иллюстрирующими равномерный (однородный) закон распределения денежного фактора x_{α_k} в области неопределенности ΔX_{α_k} бюджетной функции (4). В общем случае приобретение благ b_{α_k} происходит в условиях заданного неоднородного распределения денежного фактора $x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k}$ с функцией состояния $\langle x_{\alpha_k} | \Psi, t \rangle$. В этом случае каждый уровень собственности $P_{l\alpha_k}$ реализуется с вероятностью $\left| \langle P_{l\alpha_k} | \Psi \rangle \right|^2$, определяемой коэффициентами разложения функции $\langle x_{\alpha_k} | \Psi, t \rangle$ по собственным функциям (13):

$$\langle x_{\alpha_k} | \Psi, t \rangle =$$
$$= \sum_l \exp\left(\frac{iP_{l\alpha_k} t}{\lambda} \right) \langle x_{\alpha_k} | P_{l\alpha_k} \rangle \langle P_{l\alpha_k} | \Psi \rangle. \quad (25)$$

В состоянии (25) сохраняющаяся величина собственности субъекта характеризуется средним значением

$$\bar{P}_{\alpha_k} = \sum_l P_{l\alpha_k} \left| \langle P_{l\alpha_k} | \Psi \rangle \right|^2 =$$
$$= \int_{x_{\alpha_k}^{(1)}}^{x_{\alpha_k}^{(2)}} \langle \Psi | x_{\alpha_k} \rangle \langle x_{\alpha_k} | \hat{P}_{\alpha_k} | \Psi \rangle. \quad (26)$$

Очевидно, что с такими же вероятностями $\left| \langle P_{l\alpha_k} | \Psi \rangle \right|^2$ распределены и допустимые значения спектра благ b_{α_k}, обеспечивающие формирование потребительского поведения с функцией $\langle x_{\alpha_k} | \Psi, t \rangle$.

Если же потребительское поведение субъекта формируется на полном наборе благ $\vec{b}$, то функция состояния описывается формулой

$$\langle \vec{x} | \Psi, t \rangle = \prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{k=1}^{n_\alpha} \langle x_{\alpha_k} | \Psi, t \rangle,$$

а величина собственности P равна

$$P = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \overline{P}_{\alpha_k} \ . \qquad (27)$$

3. В пределе, при $\lambda \to 0$, область неопределенности сопряженных факторов состояния (1) стягивается в точку и вероятностно-динамическое состояние потребителя переходит в динамическое (плановое) состояние $\left(b_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right)$. Поскольку число линий спектра собственности (19) в бюджетной «яме» при этом неограниченно растет, величина индивидуальной собственности, заключенной в кванте (22), стремится к нулю. В этом случае вся собственность субъекта принимает форму обобществленной (государственной) собственности, выражение для которой можно получить, заменив, в согласии с принципом соответствия [1], в (2) операторы $\hat{b}_{\alpha_k}$ и $\hat{x}_{\alpha_k}$ на величины b_{α_k} и x_{α_k} :

$$P(\vec{b}, \vec{x}) = \frac{1}{2}\beta\left(\vec{b}\right)\vec{b}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \left\{ \frac{1}{2}\beta_{\alpha_k}\left(b_{\alpha_k}\right) b_{\alpha_k}^2 \right\};$$
$$x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k} \ . \qquad (28)$$

Поскольку в динамическом пределе спектр собственности становится непрерывным, то различие между понятиями «бедного» и «богатого» субъекта (в указанном выше смысле) исчезает. В этом случае оба типа экономических субъектов являются лишь исполнителями плановых директив, в силу чего ответственность за создание их благосостояний ложится только на плановые органы государства.

Непрерывный спектр собственности можно получить также устремляя ширину бюджетных «ям» к бесконечности. Получаемое при этом состояние (так называемое свободное состояние) не обеспечивается использованием денежных средств; поэтому оно не может быть реализовано в обществе с развитыми производительными силами и характерно для примитивного, полудикого человеческого сообщества. Поставку материальных благ в этом случае обеспечивает сама природа.

Второй закон Госсена

В заключение докажем утверждение, которое в экономической теории известно под названием второго закона Госсена: функция полезности полного набора благ $\beta\left(\vec{b}\right)$ максимальна в том случае, если эти блага потребляются в количестве, обеспечивающем их одинаковую предельную полезность [3]. Для простоты ограничимся случаем непрерывного спектра благ; обобщение на случай дискретного спектра не содержит, очевидно, принципиальных трудностей.

Действительно, получая из выражения (28) полезность набора благ β как многомерную функцию координат b_{α_k} :

$$\beta = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \beta_{\alpha_k} b_{\alpha_k}^2 \Bigg/ \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_\alpha} b_{\alpha_k}^2 \ , \qquad (29)$$

запишем необходимое условие максимума этой функции в виде системы уравнений $\dfrac{\partial \beta}{\partial b_{\alpha_k}} = 0$.

В результате находим

$$\frac{\partial \beta}{\partial b_{\alpha_k}} = \frac{b_{\alpha_k}}{\vec{b}^2}\left[\frac{\partial \beta_{\alpha_k}}{\partial b_{\alpha_k}} b_{\alpha_k} + 2\left(\beta_{\alpha_k} - \beta\right)\right] = 0 \ . \qquad (30)$$

Формула (30) показывает, что максимальное значение полезности набора благ обеспечивается каждой компонентой этого набора в количестве $b_{\alpha_k}^{(m)}$, равном

$$b_{\alpha_k}^{(m)} = -2\left(\beta_{\alpha_k} - \beta\right) \Bigg/ \frac{\partial \beta_{\alpha_k}}{\partial b_{\alpha_k}} > 0 \ . \qquad (31)$$

Поскольку выбор величины b_{α_k} (при заданной собственности P_{α_k}) определяется только ее общей полезностью β_{α_k} , то предельные полезности, стоящие в знаменателе (31), следует считать постоянными:

$$\frac{\partial \beta_{\alpha_k}}{\partial b_{\alpha_k}} = \text{const}, \qquad (32)$$

что и требовалось доказать. Отметим, что мы не рассматриваем решение $b_{\alpha_k} = 0$ уравнения (30), поскольку оно не вносит вклад ни в функцию полезности, ни в величину собственности системы.

Из формулы (31) следует, что в режиме насыщающей полезности $\left(\dfrac{\partial \beta_{\alpha_k}}{\partial x_{\alpha_k}} \to 0\right)$ максимальная полезность полного набора благ равна предельному значению общих полезностей всех благ из этого набора $\left(\beta_{\alpha_k} \to \beta\right)$. Другими словами, в режиме насыщения потребность субъекта в полном наборе благ должна быть равна его потребности в каждом благе этого набора.

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, при потреблении полного набора благ $\vec{b}$ в количествах $b_{\alpha_k}^{(m)}$ (31), наряду с функцией полезности $\beta\left(\vec{b}\right)$, максимального значения (при заданной величине $\vec{b}^2$) достигает и величина собственности (28). Но последняя характеризует оптимальный выбор субъекта на рынке потребительских благ [1, 2], которые должны браться в количествах $b_{\alpha_k}^{(m)}$, принадлежащих спектру благ (23). Таким образом, соотношение (31) описывает структуру набора благ, оптимизирующую не только потребности и предпочтения субъекта, но и расходы его на покупку благ при заданных бюджетных ограничениях. Во-вторых, формула (29) выражает собой функцию полезности фон Неймана – Моргенштерна [4], представленную в виде математического ожидания полезностей β_{α_k}, распределенных в пространстве B с вероятностями $w_{\alpha_k} = \frac{b_{\alpha_k}^2}{\vec{b}^2}$. В этом случае формула (31) решает основную задачу теории фон Неймана – Моргенштерна о нахождении закона распределения вероятностей $w_{\alpha_k}^{(m)}$, обеспечивающих максимум полезности $\beta(\vec{b})$ на «лотерее» $\vec{b}$.

Выводы

1. С позиций вероятностно-динамического метода изучены вопросы потребительского выбора и полезности благ теории потребительского поведения.

2. В предположении насыщающей полезности получены спектры благ (23) и способности (18), (20), (21) субъекта, формирующие оптимальное поведение потребителя. Показано, что значения благ (24), насыщающих функцию полезности, обратно пропорциональны корню квадратному из максимальной полезности этих благ $\beta_{0\alpha_k}$. Этот вывод иллюстрирует известное положение о том, что количество благ, обеспечивающих насыщение большей полезности, меньше количества благ, обеспечивающих насыщение меньшей полезности.

3. С уменьшением ширины бюджетной «ямы» $a_{\alpha_k} = \left|x_{\alpha_k}^{(2)} - x_{\alpha_k}^{(1)}\right|$ (при фиксированных уровнях способности $V_{\alpha_k}^{(0)}$ и насыщенной полезности $\beta_{0\alpha_k}$) увеличивается расстояние между соседними уровнями спектра благ. Этот результат характеризует потребление «бедного» субъекта, который не может позволить себе излишеств при выборе благ. При больших же значениях a_{α_k} (случай «богатого» субъекта) возможно создание потребительского поведения с богатым спектром, реализующимся на большом многообразии закупаемых благ.

4. Показано, что активизация предпринимательской способности проявляется в типично рыночном случае (λ велико) при выборе блага большой полезности $\beta_{0\alpha_k}$ субъектом с малой неопределенностью потребительского бюджета a_{α_k}. Такой рост способности с уменьшением величины a_{α_k} также характерен для «бедных» субъектов, поскольку способность к выбору ими элементарного блага α_k усложняется недостаточностью денежных средств $x_{\alpha_k} \in \Delta X_{\alpha_k}$, сопряженных с малой неопределенностью бюджета a_{α_k}.

5. В плановом пределе различие между понятиями «бедного» и «богатого» субъекта исчезает, поскольку они являются в этом случае лишь исполнителями плановых директив, а ответственность за создание их благосостояний ложится только на плановые органы государства.

6. Получено выражение для второго закона Госсена (32), которое определяет структуру полного набора благ, оптимизирующую не только потребности и предпочтения субъекта, но и его расходы на приобретение этих благ при заданных бюджетных ограничениях. Показано, что каждое благо такого набора должно потребляться в количестве, обеспечивающем одинаковую предельную полезность всех благ набора.

Выражаем благодарность В.А. Зорину за ряд плодотворных критических замечаний.

Список литературы

1. Кукушкин В.А. Введение в математическую микроэкономику. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2007. 344 с.

2. Иванов А.Г., Кукушкин В.А. О вероятностно-динамическом методе в задачах микроэкономики // Вестн. ННГУ. 2010. № 1. С. 179–189.

3. Нуреев Р.М. Курс микроэкономики. М.: Изд-во «НОРМА», 2001. 572 с.

4. Гребенников П.И., Леусский А.И., Тарасевич Л.С. Микроэкономика. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 1998. 447 с.

CONSUMER BEHAVIOUR DYNAMICS

A.G. Ivanov, V.A. Kukushkin

In the framework of the probabilistic dynamic method [1, 2], consumer choice and goods utility forming optimal consumer behaviour are considered. The system of differential equations for the optimal state function is solved and the spectra of goods and entrepreneurial ability of the person providing this state are found. An expression is obtained for a full set of goods maximizing the total utility of the set. It is shown that each good of such a set has to be consumed in amounts securing an equal limit utility of all goods of the set.

Keywords: probability dynamic method; consumer behavior; complete set of consumer goods; consumer budget; functions of goods utility and complete set of goods; budget function; quantum of entrepreneurial ability; Gossen's laws; von Neumann and Morgenstern utility function.