Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2010, № 6, с. 178–185

УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ, ОТДЕЛЕННЫМИ ОТ МАТРИЦЫ ТОНКИМ СЛОЕМ

© 2010 г. ***В.Л. Саваторова*** [1], ***А.В. Талонов*** [1], ***Д.Б. Волков-Богородский*** [2], ***А.Н. Власов*** [2]

[1] Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
[2] Институт прикладной механики РАН, Москва

svl97@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.11.2010

Моделируется процесс теплопроводности в неоднородной среде, представляющей собой однородную матрицу с цилиндрическими включениями, отделенными от нее контактным слоем. Проведено исследование влияния толщины и материала слоя на эффективные свойства системы матрица – слой – включение. Для среды, содержащей большое число периодически повторяющихся изолированных цилиндрических включений, с использованием метода асимптотического усреднения проведены численные расчёты температурного распределения при различных геометрических и физических характеристиках включений, слоёв и матрицы.

Ключевые слова: математическое моделирование, структурно-неоднородные среды, усреднение, уравнение теплопроводности, коэффициент теплопроводности.

Введение

Реальные композиционные материалы имеют неоднородную и сложную структуру, которая позволяет им обладать уникальными свойствами. Сложность пространственной структуры и наличие большого числа веществ в составе композитного материала существенно затрудняют описание его физических свойств при различных условиях воздействия. Особую роль в формировании физических характеристик материалов могут играть тонкие слои, отделяющие различные их компоненты. Такие слои могут составлять малую объёмную долю в рассматриваемом материале, однако результаты исследований [1, 2] показывают, что их вклад в эффективные характеристики неоднородных сред может быть весьма значительным.

В данной работе исследуется распространение тепла в периодической среде, содержащей большое число цилиндрических включений, отделенных от матрицы контактным слоем. Проводится анализ влияния физических и геометрических характеристик тонкого слоя в системе матрица – слой – включение на распределение температуры в неоднородной среде.

Постановка и решение задачи теплопроводности для гетерогенной среды матрица – слой – включение

Рассмотрим неограниченную трехкомпонентную среду с периодической структурой, представляющую собой матрицу, содержащую цилиндрические изолированные включения радиуса R_1, каждое из которых отделёно от матрицы слоем толщиной $R_2 - R_1$ (рис. 1). Будем предполагать, что матрица, слои и включения являются изотропными средами, каждая из которых характеризуется своей плотностью, теплоёмкостью и коэффициентом теплопроводности. Пусть L – характерный размер образца композита, l – сторона периодически повторяющейся ячейки, представляющей собой в сечении квадрат (рис. 2).

В случае когда неоднородная среда содержит только твердую фазу и в процессе воздействия на среду не происходят фазовые переходы в отдельных компонентах материала, в качестве определяющего механизма теплопередачи можно рассматривать кондуктивную теплопроводность. Тогда процесс переноса тепла в неоднородной изотропной среде будет определяться уравнением:

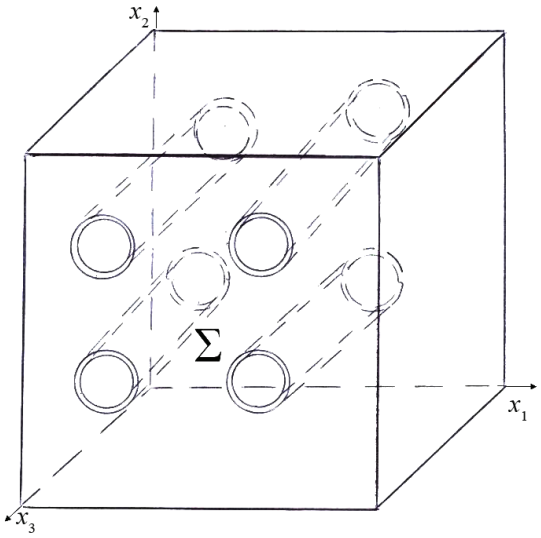


Рис. 1

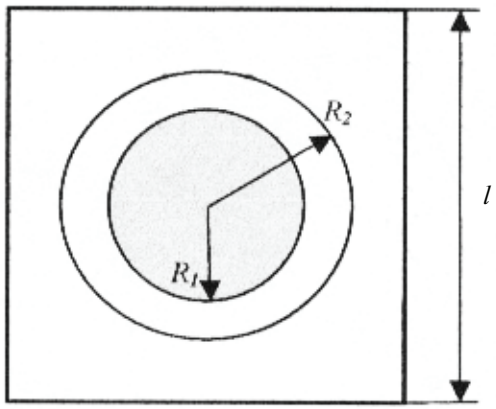


Рис. 2. Ячейка периодичности

$$\rho(x,T)c(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j}\right), \quad (1)$$

где плотность ρ, теплоемкость c и компоненты тензора теплопроводности k_{ij} являются в общем случае функциями температуры T и координат $x = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Уравнение (1) дополняется граничными и начальными условиями, которые могут быть записаны в виде

$$T(x,t)\big|_S = T_1(t),\ n_i\left[k_{ij}(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j}\right]\Bigg|_S = 0, \quad (2)$$

$$\left[T(x,t)\right]\big|_\Sigma = 0, \quad (3)$$

$$m_i\left[k_{ij}(x,T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j}\right]\Bigg|_\Sigma = 0, \quad (4)$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = T_0(x), \quad (5)$$

где S – свободная поверхность среды, на которой заданы граничные условия; Σ – границы разделов различных компонентов материала; n_i – компоненты нормали к свободной поверхности; m_i – компоненты нормали к поверхности раздела различных компонентов материала. При постановке задачи (1)–(5) было сделано предположение о том, что объемные источники тепла отсутствуют, равно как и поток тепла через поверхность S.

Непосредственное численное решение задачи (1)–(5) для среды, содержащей большое число включений, весьма трудоемко в связи с необходимостью использовать разбиение тела сетками, размеры которых малы по сравнению с размерами включений и расстояниями между ними. Однако именно большое число включений позволяет применять процедуру усреднения по ячейке периодичности, основная идея которой сводится к замене реальной неоднородной среды некой однородной средой с эффективными характеристиками, в результате чего исходная задача с быстро осциллирующими коэффициентами заменяется аналогичной задачей для однородной среды с постоянными эффективными коэффициентами. Периодичность структуры рассматриваемого гетерогенного материала при условии $l << L$ обусловливает применение метода асимптотического усреднения [3], основанного на том, что решение ищется в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = l/L$ с коэффициентами, зависящими как от медленных переменных $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, соответствующих глобальной структуре процессов, так и от быстрых переменных $\xi = x/\varepsilon$, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, соответствующих их локальной структуре и изменяющихся от 0 до l в пределах каждой ячейки периодичности.

Асимптотическое решение задачи (1)–(5) будем искать в виде ряда [3, 4]:

$$T(x,\xi,t) = T^{(0)}(x,\xi,t) + \varepsilon T^{(1)}(x,\xi,t) + \varepsilon^2 T^{(2)}(x,\xi,t) + \ldots + \varepsilon^n T^{(n)}(x,\xi,t). \quad (6)$$

Подстановка разложения (6) в уравнение (1) и каждое из условий (2)–(5) после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε дает нам рекуррентную цепочку задач для определения поправок к температуре в разложении (6). Переменные x и ξ при этом рассматриваются как независимые. Задачи о нахождении поправок к температуре $T^{(n)}$ ре-

шаются с применением процедуры усреднения по ячейке периодичности, в общем случае определяемой как [3, 4]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l f(\xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 . \quad (7)$$

В работах [3, 4] была доказана нечувствительность первого члена в разложении (6) от локальной структуры материала, т.е. независимость функций $T^{(0)}$ от быстрой переменной ξ:

$$T^{(0)}(x,\xi,t) = v_0(x,t) . \quad (8)$$

Там же было показано, что второй член в разложении (6) имеет вид:

$$T^{(1)}(x,\xi,t) = N_i^{(1)}(\xi) \frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} , \quad (9)$$

где периодические по быстрой переменной ξ функции $N_i^{(1)}$ определяются решением задачи на ячейке периодичности:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l}\left(k_{lj}(\xi) \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_l} k_{li}(\xi) = 0 ,$$
$$\left[N_i^{(1)} \right]\Big|_\Sigma = 0 , \quad (10)$$
$$\left[k_{lj} \frac{\partial \left(N_i^{(1)} + \xi_i \right)}{\partial \xi_j} m_l \right]\Bigg|_\Sigma = 0 .$$

Определение функций $N_i^{(1)}$ необходимо для нахождения эффективных характеристик среды, таких как эффективные коэффициенты теплопроводности и температуропроводности.

Рассмотрим полубесконечную среду, поверхность которой параллельна осям цилиндрических включений (рис. 1). Пусть на свободной поверхности поддерживается постоянная температура T_1, а начальная температура в среде равна T_0. Будем рассматривать температурный диапазон 250–900 К, имея в виду, что коэффициенты теплопроводности большинства материалов при таких температурах можно считать константами [2]. Выбираем систему координат так, чтобы ось OX_1 была направлена от свободной поверхности вглубь материала, а плоскость X_2OX_1 была перпендикулярна осям цилиндрических включений. В силу симметрии распределение температуры при заданных граничных условиях будет являться функцией двух координат $T = T(x_1, x_2, t)$.

В работе [4] было показано, что для данной геометрии задачи и при заданных начальных и граничных условиях первый член $v_0(x, t)$ в разложении температуры (6) будет иметь вид

$$v_0(x_1,x_2,t) = T_1 - (T_1 - T_0)\operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{\chi t}} \right) \quad (11)$$

и описывать распределение температуры в однородной среде с эффективным коэффициентом температуропроводности $\chi = \dfrac{k_{eff}}{\langle \rho c \rangle}$. Эффективный коэффициент теплопроводности k_{eff} определяется как

$$k_{eff} = \left\langle k(\xi) \left(\frac{\partial N^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial N^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_2} \right) + k(\xi) \right\rangle , \quad (12)$$

и усреднение ведется по ячейке периодичности. Тогда с учетом соотношений (8), (9) распределение температуры в рассматриваемой неоднородной периодической среде с учетом двух первых членов в ряде (6) может быть записано в виде:

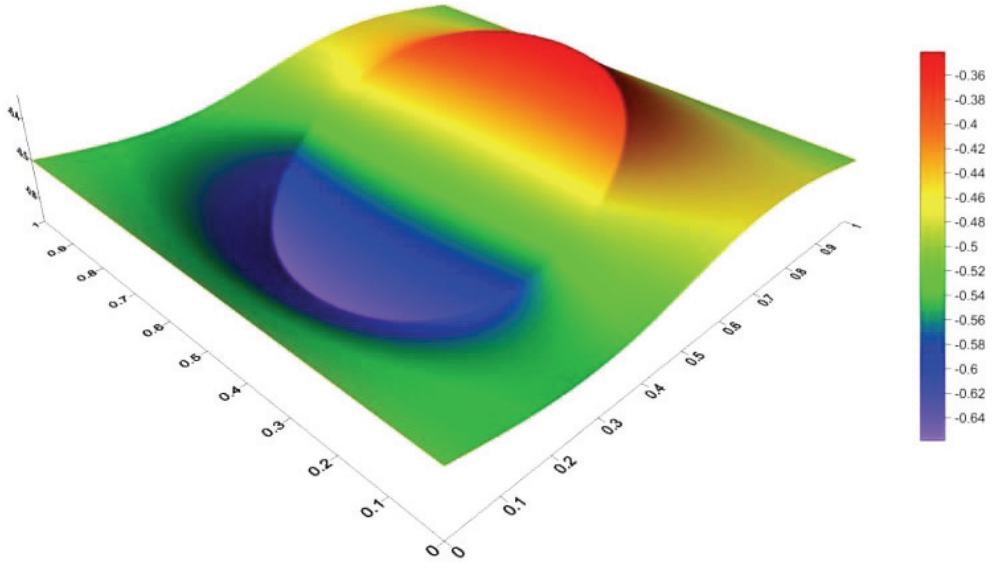
$$T(x_1,x_2,t) = T_1 - (T_1 - T_0)\operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{\chi t}} \right) -$$
$$- (T_1 - T_0) \frac{\exp\left(-x_1^2 / 4\chi t \right)}{\pi \chi t} N^{(1)}(x_1,x_2) . \quad (13)$$

Формулы (11)–(13) в дальнейшем будут использованы при расчете распределения температуры в гетерогенных средах различных конфигураций, представляющих собой матрицу, содержащую цилиндрические включения, покрытые поверхностными слоями.

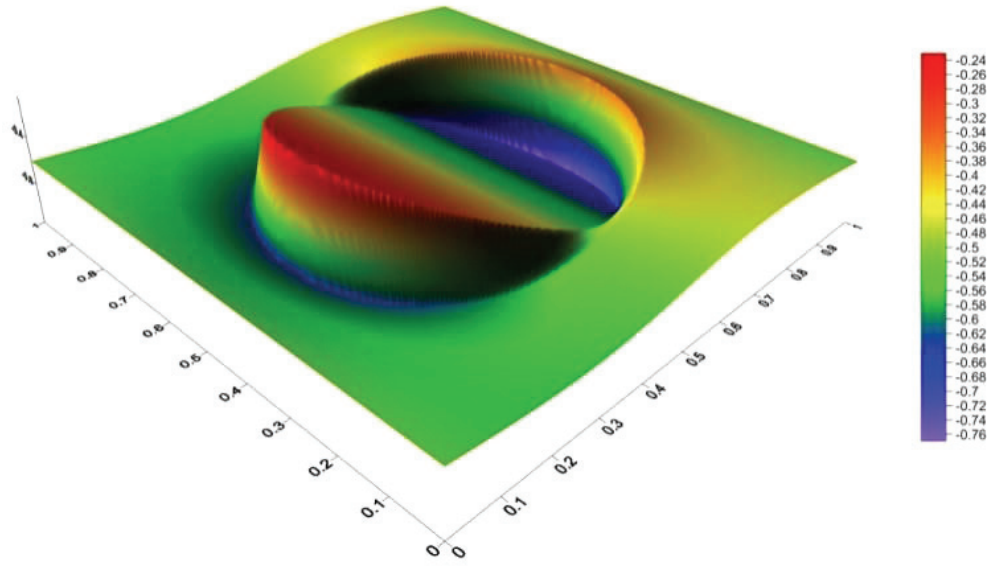
Результаты решения задачи на ячейке периодичности

Для решения краевой задачи (10) была написана программа, реализующая алгоритм блочного аналитико-численного метода [5, 6] для стационарного уравнения теплопроводности. Метод заключается в разбиении области на более простые перекрывающиеся подобласти-блоки, построении локальных решений в каждом из блоков на основе специальной системы функций, аналитически удовлетворяющей исходному уравнению, и в объединении всех локальных решений в глобальное решение исходной задачи. В структуре аппроксимирующих функций учитываются аналитические особенности геометрии области, что обусловливает эффективность аппроксимации.

Для конфигураций композитов с включением из материала с коэффициентом теплопроводности, на два порядка меньшим, чем коэффициент теплопроводности контактного



а)



б)

Рис. 3. а) График $N_i^{(1)}$ для конфигурации 1.1; б) график $N_i^{(1)}$ для конфигурации 2.3 (см. табл. 1)

слоя и матрицы, типичная картина для $N_i^{(1)}$ представлена на рис. 3а. Для конфигураций, в которых слой выполнен из материала с низким коэффициентом теплопроводности, аналогичная картинка представлена на рис. 3б.

Температурные распределения. Результаты и их обсуждение

При расчете распределения температуры в гетерогенных материалах, содержащих цилиндрические включения, покрытые поверхностными слоями, рассматривалось несколько различных конфигураций (см. табл. 1).

Физические характеристики отдельных компонентов материалов, составляющих композит, представлены в табл. 2.

Приведем результаты расчета распределения температуры в первых десяти ячейках периодичности размером $l = 0.2$ м каждая через время $t = 0.5$ ч после того, как среда с начальной температурой $T_0 = 300$ K начала нагреваться. При этом на границе $x = 0$ поддерживалась температура $T_1 = 900$ K.

На рис. 4 приведены графики, построенные для конфигурации 1.1. Можно видеть, что первый член (11) в ряду разложения температуры (6) плавно и монотонно меняется с изменением координаты x, постепенно выходя на стацио-

Таблица 1

Конфигурация	Включение	Слой	Матрица	R_1, м	R_2, м	k_{eff}, Вт/(м · град)
1.1	Ti-6Al-4V	SiC	Al	0.06	0.06002	132.066
1.2	Ti-6Al-4V	SiC	Al	0.05	0.08	142.764
2.1	SiC	Ti-6Al-4V	Al	0.06	0.06002	216.292
2.2	SiC	Ti-6Al-4V	Al	0.06	0.066	123.712
2.3	SiC	Ti-6Al-4V	Al	0.05	0.08	78.205

Таблица 2

	Вещество	ρ, кг/м^3	c, Дж/(кг·град)	k, Вт/(м · град)
Включение	Ti-6Al-4V	4429	625.30	1.2095
Контактный слой	SiC	3210	750	183.8
Матрица	Al	2700	900	235

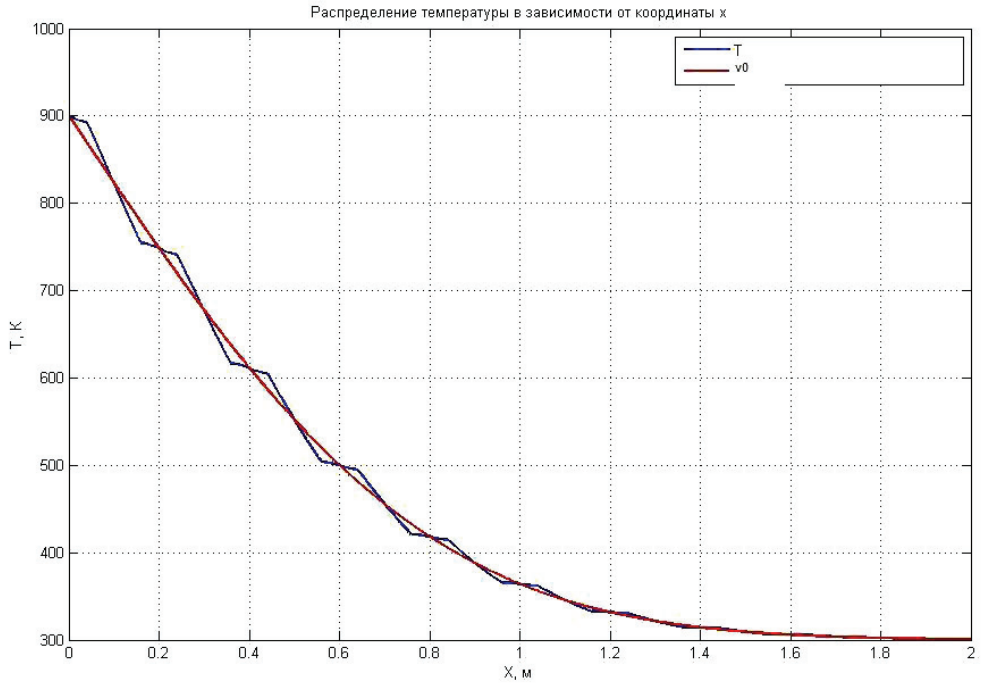


Рис. 4. Сравнение температурного распределения, полученного с учетом первого (плавная кривая v_0) и первых двух (линия с изломами T) членов асимптотического разложения температуры для конфигурации 1.1

нарную температуру, равную T_0 = 300 K. Эта кривая «не чувствует» включений в отличие от графика распределения температуры с учетом двух первых членов в разложении температуры (13), также приведенного на рис. 4. Можно видеть, что малый коэффициент теплопроводности волокон замедляет процесс передачи тепла, выражающийся в большом градиенте температуры в местах включений. Из-за малой толщины контактного слоя в данной конфигурации его наличие не оказывает заметного влияния на температурный профиль.

Из выражения для температурного поля в зависимости от координат (13) следует, что, как это видно на рис. 5, температура T является периодической функцией координаты $x_2 = y$ с периодом, равным размеру ячейки периодичности l, что позволяет в дальнейшем рассматривать только одну ячейку периодичности по оси y.

В конфигурации 1.2 по сравнению с конфигурацией 1.1 уменьшен диаметр включения и увеличена толщина контактного слоя при условии рассмотрения тех же материалов. Качественно зависимость температуры от толщины композита не изменилась. Однако сократились области с большими градиентами температур на включениях и увеличились области с меньшим градиентом температур в контактном слое и матрице. Можно видеть также, что эффективный коэффициент теплопроводности с уменьшением диаметра включения увеличивается.

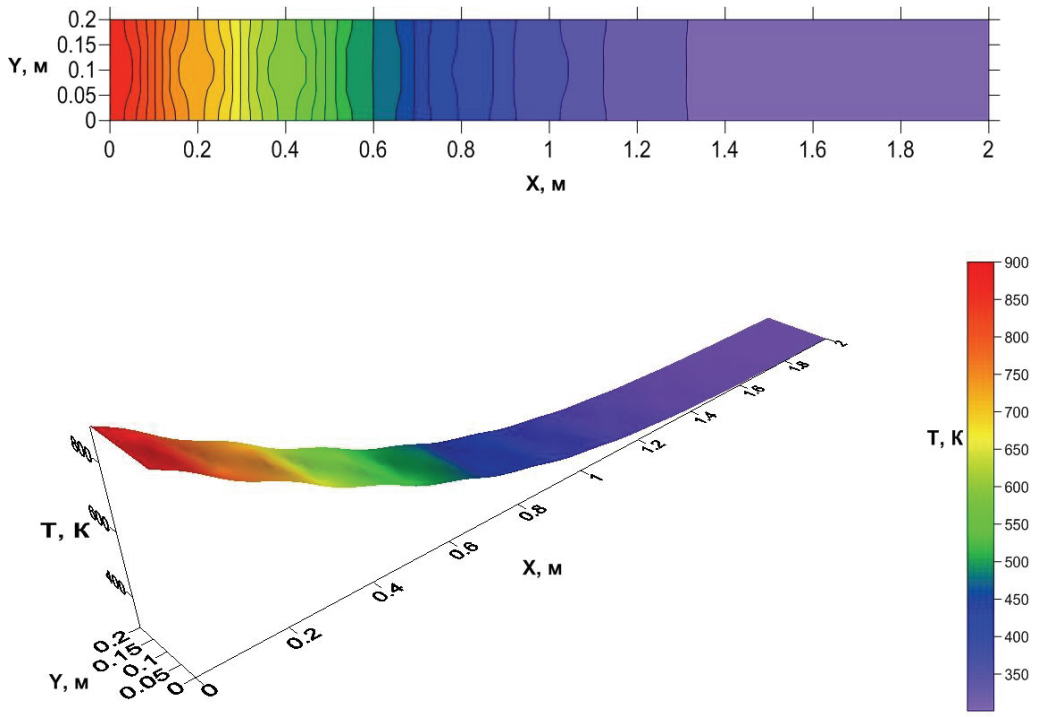


Рис. 5. Температурное распределение, полученное с учетом двух первых членов асимптотического разложения температуры для конфигурации 1.1

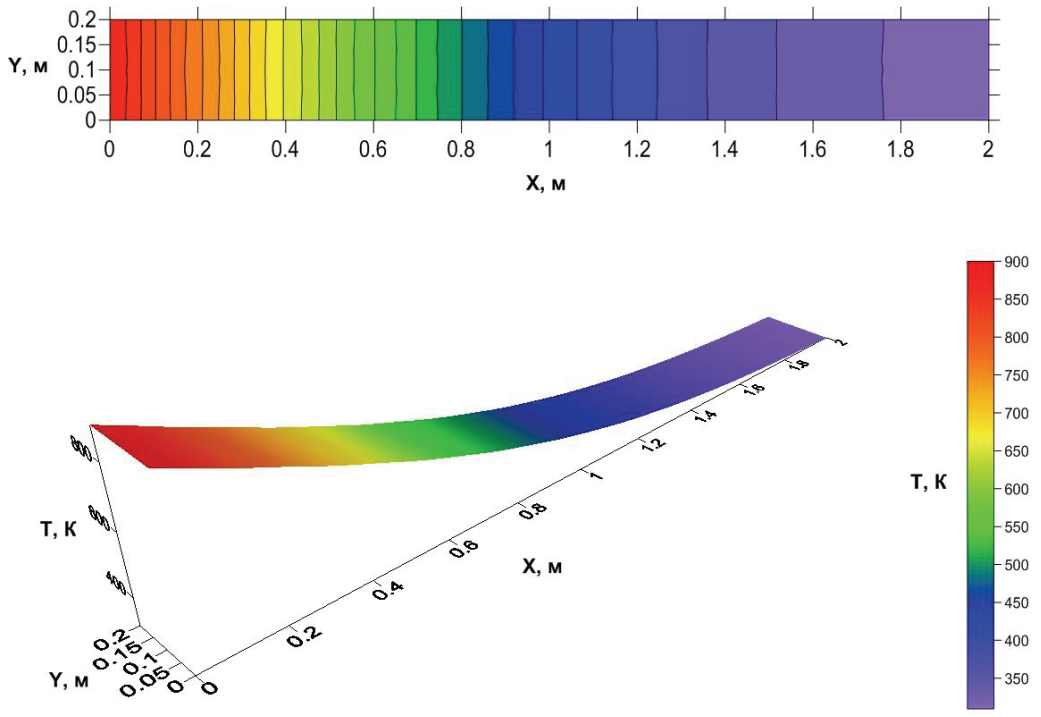


Рис. 6. Температурное распределение, полученное с учетом двух первых членов асимптотического разложения температуры для конфигурации 2.1

В конфигурациях 2.1–2.3 материал матрицы остался тем же, а материалы включения и контактного слоя поменялись местами. Диаметр включения изменялся мало, а толщина контактного слоя увеличивалась от $2\cdot10^{-5}$ м до $3\cdot10^{-2}$ м. В силу того, что коэффициент теплопроводности

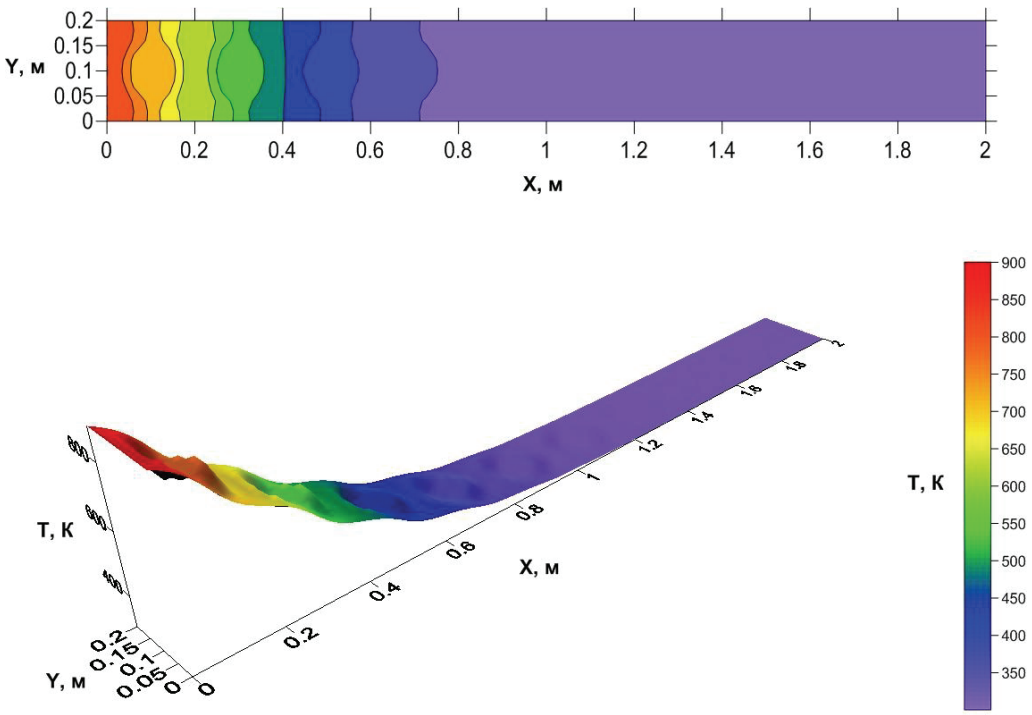


Рис. 7. Температурное распределение, полученное с учетом двух первых членов асимптотического разложения температуры для конфигурации 2.3

контактного слоя стал теперь на два порядка меньше коэффициента теплопроводности включения и матрицы, изменения в распределении температуры в ряду конфигураций 2.1–2.3 значительнее, чем это было для конфигураций 1.1 и 1.2. Эффективный коэффициент теплопроводности уменьшается с 216.292 Вт/(м · град) при толщине контактного слоя $2 \cdot 10^{-5}$ м до 78.205 Вт/(м · град) при толщине слоя $3 \cdot 10^{-2}$ м.

Первый член асимптотического разложения температуры с увеличением толщины контактного слоя спадает круче и на меньшей глубине выходит на стационарную температуру. Эта тенденция ещё более отчетливо проявляется на втором члене разложения. Поэтому температурное распределение, полученное с учетом двух первых членов разложения температуры для конфигурации 2.1, практически совпадает с графиком первого члена температурного ряда для данной конфигурации, в силу того, что только тонкий контактный слой в ячейке занят материалом с резко отличающимся коэффициентом теплопроводности (рис. 6). Аналогичные распределения для конфигураций 2.2 и 2.3 носят ступенчатый характер с резкими падениями температуры на контактном слое (рис. 7).

Заключение

В настоящей работе производилось математическое моделирование процесса теплопереноса в периодической среде с цилиндрическими включениями, отделенными от матрицы тонким слоем. Было построено асимптотическое решение линейной задачи теплопроводности и получены температурные профили для конфигураций с различной концентрацией включений и поверхностного слоя, а также для различных коэффициентов теплопроводности компонентов. Температурные профили, учитывающие один лишь первый член в разложении по температуре, оказались нечувствительными к наличию включений. Температурные же профили, полученные с учетом первых двух членов разложения, имели различные градиенты температур на включениях и матрице.

Проведенный анализ показал, что для композитов, в которых используются в качестве покрытия на волокнах материалы с коэффициентом теплопроводности, много меньшим по сравнению с коэффициентом теплопроводности матрицы и волокна, толщина покрытия сильно влияет на эффективный коэффициент теплопроводности. Толщина же поверхностного слоя из материала с коэффициентом теплопроводности, близким к коэффициенту теплопроводности матрицы, не оказывает заметного влияния на распределение температуры.

Список литературы

1. Фридлендер И.Н. Современные тенденции в развитии композиционных материалов // В сб. науч-

ных трудов АН СССР: Композиционные материалы. Киев: Наукова думка, 1991. 237 с.

2. Карпинос Д.М., Кониленко В.С. Теплопроводность армированных конструкционных композиционных материалов. Киев: Машиностроение, 1980. 27 с.

3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

4. Власов А.Н., Саваторова В.Л., Талонов А.В. Описание физических процессов в структурно неоднородных средах. М.: РУДН, 2009. 258 с.

5. Волков-Богородский Д.Б. О вычислении эффективных характеристик композиционных материалов с помощью блочного аналитико-численного метода // Материалы XII Междун. симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Избр. докл. М.: МАИ, 2006. С. 41–47.

6. Волков-Богородский Д.Б. Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связных задачах механики сплошных сред // Труды Всеросс. науч.-практ. конф. «Инженерные системы-2008. Прикладные исследования в механике», Москва, 7–11 апреля 2008 г. М.: РУДН, 2008. С. 123–138.

MATHEMATICAL SIMULATION OF HEAT TRANSFER IN A PERIODIC MEDIUM WITH CYLINDRICAL INCLUSIONS SEPARATED FROM THE MATRIX BY A THIN LAYER

V.L. Savatorova, A.V. Talonov, D.B. Volkov-Bogorodsky, A.N. Vlasov

Mathematical simulation of heat transfer has been carried out in an inhomogeneous medium in the form of a homogeneous matrix with cylindrical inclusions separated from it by a contact layer. The influence of the layer thickness and material on the effective properties of matrix-layer-inclusion system has been studied. Using the asymptotic homogenization procedure, numerical simulations of temperature distribution have been made for the medium containing a large number of periodical isolated inclusions with different geometrical and physical characteristics of inclusions, layers and matrices.

Keywords: mathematical simulation, structurally inhomogeneous media, homogenization, heat conduction equation, heat conductivity coefficient.