ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 658.788

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ ДОСТАВКИ ТОВАРОВ АВТОТРАНСПОРТОМ

Ю.В. Трифонов, В.С. Громницкий, М.Ю. Золотов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

decanat@ef.unn.ru

Поступила в редакцию 01.07.2010

Рассматривается задача определения оптимальных кольцевых маршрутов доставки товаров требуемого объема несколькими транспортными средствами ограниченной грузоподъемности. Приводится математическая модель, предлагается точный метод решения, обсуждаются способы учета геоинформационных факторов.

Ключевые слова: транспортная логистика, оптимальные маршруты, метод ветвей и границ, геоинформационные технологии.

В настоящее время предприятия, осуществляющие доставку товаров и оказывающие выездные услуги, функционируют в условиях рыночной экономики: сформировался рынок транспортных услуг, усилилась конкуренция между предприятиями и различными видами транспорта, ужесточились требования к тарифам и качеству транспортных услуг со стороны потребителей.

Современную миссию транспортировки в системе логистического сервиса можно кратко сформулировать следующим образом: доставлять нужный товар требуемого качества и количества в заданное время с оптимальными затратами. В структуре логистических затрат транспортные расходы составляют значительную долю – 20–40% и более, поэтому оптимизация решений в транспортировке позволит логистическому менеджменту получить значительное снижение затрат, но потребует и специального внимания [1].

В сфере доставки товаров автотранспортом одним из основных способов логистического управления является поиск оптимальных маршрутов движения автотранспорта. Оптимальным считается маршрут, по которому возможно доставить логистический объект в кратчайшие или предусмотренные сроки с минимальными затратами.

Рассмотрим задачу формирования транспортных маршрутов в следующей упрощенной постановке.

Имеется множество пунктов доставки однородного мелкооптового груза от одного источника – базы. Известны потребности каждого пункта. Доставка осуществляется транспортными средствами заданной грузоподъемности. Известны также затраты на перемещение транспортного средства между каждой парой пунктов, включая затраты на перемещение между базой и каждым пунктом. Затраты могут быть различными в прямом и обратном направлениях и не зависят от загруженности транспортного средства. В качестве затрат может выступать расстояние, время, расход горючего, стоимость. Требуется определить такие замкнутые маршруты доставки товаров, чтобы база входила в каждый маршрут, а каждый из остальных пунктов входил только в один из маршрутов. Суммарные затраты на перемещение по всем маршрутам должны быть минимальными. Требуемое количество транспортных средств не фиксируется и также подлежит определению.

В такой формулировке поставленная задача является одним из вариантов задачи нескольких коммивояжеров. Для классической задачи одного коммивояжера известно несколько точных и приближенных методов решения [2–4]. Для задачи нескольких коммивояжеров обычно рассматриваются эвристические методы решений с учетом различного рода дополнительных условий [5, 6]. В настоящей статье приводится математическая модель поставленной задачи и предлагается точный метод её решения, являющийся адаптацией метода ветвей и границ к условиям математической модели. Рассматриваются усложненные постановки задачи и обсуждаются эвристические методы решений.

Математическая модель задачи

Исходные параметры:

n – число пунктов доставки, источник (база) имеет нулевой номер;

c_{ij}, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$ – затраты на перемещение из i-го пункта в j-й;

a_j, $j=\overline{1,n}$ – потребности в товарах в пунктах доставки;

v – грузоподъемность каждого транспортного средства.

Управляемые параметры

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если из } i\text{-го пункта осуществляется} \\ \text{переход в } j\text{-й пункт,} \\ 0, \text{ иначе,} \qquad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n}.\end{cases}$$

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, \text{ если из } i\text{-го пункта осуществляется} \\ \text{переход в } j\text{-й пункт на } k\text{-ом маршруте,} \\ 0, \text{ иначе,} \qquad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n},\ k=\overline{1,n}.\end{cases}$$

u_i, $i=\overline{0,n}$, – параметр отсутствия подциклов.

Ограничения

Перемещение из i-го пункта в j-й может реализоваться только на одном маршруте:

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ijk},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{0,n}. \tag{1}$$

Из каждого пункта, кроме базы, нужно выйти только один раз:

$$\sum_{j=0}^{n}x_{ij}=1,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

В каждый пункт, кроме базы, нужно войти только один раз:

$$\sum_{i=0}^{n}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Выйти и войти в пункт p необходимо на одном и том же маршруте:

$$\sum_{j=0}^{n}x_{pjk}=\sum_{i=0}^{n}x_{ipk},\quad p=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,n}. \tag{4}$$

В каждом k-ом слое матрицы переходов не более одного маршрута. Это цикл, проходящий через пункт 0, или маршрут пустой:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{0jk}\le 1,\quad k=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Объем груза, перевезенного по маршруту, не должен превышать грузоподъемности транспортного средства:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{i=0}^{n}x_{ijk}\le v,\quad k=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Условия отсутствия подциклов, не проходящих через нулевой пункт:

$$u_i-u_j+(n+1)x_{ij}\le n,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Условие целочисленности:

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ x_{ijk}\in\{0,1\},\ u_i\in N,$$
$$i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,n},\quad k=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Критерий оптимальности

Суммарные затраты на транспортировку должны быть минимальными:

$$F(\bar{x})=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \tag{9}$$

Метод решения

Для решения задачи используем модификацию алгоритма Литла [2] метода ветвей и границ. Метод включает следующие этапы:

1. Определение минимально возможного количества коммивояжеров (циклических маршрутов) q с учетом потребностей пунктов потребления a_j и вместимости транспортного средства v; q – это ближайшее целое, не меньшее величины $\frac{1}{v}\sum_{j=1}^{n}a_j$.

2. Модификация матрицы затрат. Элементы всех строк, кроме нулевой, уменьшаются на минимальные элементы этих строк, затем элементы всех столбцов, кроме нулевого, уменьшаются на минимальные элементы этих столбцов. Тогда нижней оценкой H оптимального значения критерия будет сумма вычитаемых минимальных элементов. Эта оценка увеличивается на сумму q минимальных элементов нулевой строки и q минимальных элементов нулевого столбца. Полученная оценка является оптимальным значением критерия релаксированной задачи, получаемой из задачи (1)–(9) отказом от ограничений (4)–(7) и сначала (2), затем (3).

3. Расчет характеристик δ_{ij} нулевых элементов матрицы затрат, а также характеристик q минимальных элементов нулевой строки и q минимальных элементов нулевого столбца. Характеристика δ_{ij} элемента c_{ij} представляет из себя штраф за неназначение перехода из i-го

пункта в j-й и вычисляется как сумма минимальных элементов в строке i и столбце j, исключая элемент c_{ij}. Для нулевой строки (столбца) это сумма q минимальных элементов строки (столбца).

4. Вычисление верхней оценки W оптимального значения критерия. Для этого ищется допустимое решение эвристическим методом: в совокупность переходов последовательно включаются те коммуникации (i, j), у которых наибольшие характеристики и доставка груза a_j к которым возможна с учетом грузоподъемности транспортных средств.

5. Ветвление. Множество решений разбивается на 2 подмножества. Для этого выбирается коммуникация (i_0, j_0) с наибольшей характеристикой. В одно подмножество включаются все решения, содержащие переход (i_0, j_0), в другое – решение, не содержащее этого перехода. Для каждого подмножества корректируются матрицы затрат согласно алгоритму Литла [2] и находятся оценки сверху и снизу оптимального значения критерия.

6. Отсев неперспективных подмножеств реализуется в соответствии с принципом метода ветвей и границ – если прогноз H оптимального значения критерия на подмножестве хуже (больше) достигнутого значения W на каком-либо другом подмножестве.

7. Порождение и отсев подмножеств повторяется с пункта 2 до тех пор, пока не останется одно не исключенное множество, на котором достигнуто прогнозное значение $W = H$.

Рассмотрим решение задачи поиска оптимальных маршрутов на конкретном примере.

Требуется определить маршруты доставки груза с базы к 6 пунктам, грузоподъемность транспортных средств составляет 50 единиц. Потребности пунктов в грузе соответственно 25, 11, 10, 23, 12, 16 единиц.

Матрица затрат c_{ij} имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & - & 9 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & - & 4 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & - & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & - & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 5 & - & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 7 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

Этапы решения:

1. Определим минимальное количество маршрутов:

$$q = [(25 + 11 + 10 + 23 + 12 + 16) / 50] + 1 = 2.$$

2. Приведем матрицу по строкам и по столбцам, вычитая сначала минимальные элементы всех строк, кроме нулевой, а затем минимальные элементы столбцов, кроме нулевого

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} - & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & - & 9 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & - & 4 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & - & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & - & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 5 & - & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 7 & 4 & 5 & - \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} - & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & - & 7 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & - & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & - & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & - & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & - & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 2 & 3 & - \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} & 1 & & & & 1 & \end{matrix} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} - & 0^4 & 4 & 3 & 3 & 0^4 & 3 \\ 0^1 & - & 7 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & - & 1 & 3 & 1 & 0^0 \\ 2 & 5 & 4 & - & 0^1 & 1 & 0^0 \\ 0^1 & 1 & 2 & 3 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0^2 & 0^1 & 2 & - & 3 \\ 0^2 & 3 & 3 & 5 & 2 & 2 & - \end{pmatrix}$$

3. По приведенной матрице найдем нижнюю оценку H_0:

$$H_0 = (0 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2) + \\ + (0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0) + 0 = 16.$$

4. Найдем верхнюю оценку W_0 путем поиска допустимого решения. Верхними индексами в приведенной матрице указаны характеристики нулевых элементов и двух минимальных элементов ($q = 2$) нулевой строки и нулевого столбца. В качестве первого отрезка маршрута выбирается переход между пунктами (0, 1), так как его характеристика $\delta_{01} = 4$ максимальна. Второй наиболее приоритетный отрезок (0, 5), следующие возможные отрезки последовательно (5, 2), (6, 0), (1, 0), (3, 4), (4, 0) (2, 6). Из этих отрезков формируются 3 маршрута: (0, 1, 0), (0, 5, 2, 6, 0), (0, 3, 4, 0) с объемами перевозки 25, 39, 33 и суммарными затратами $W_0 = 16 + 3 = 19$.

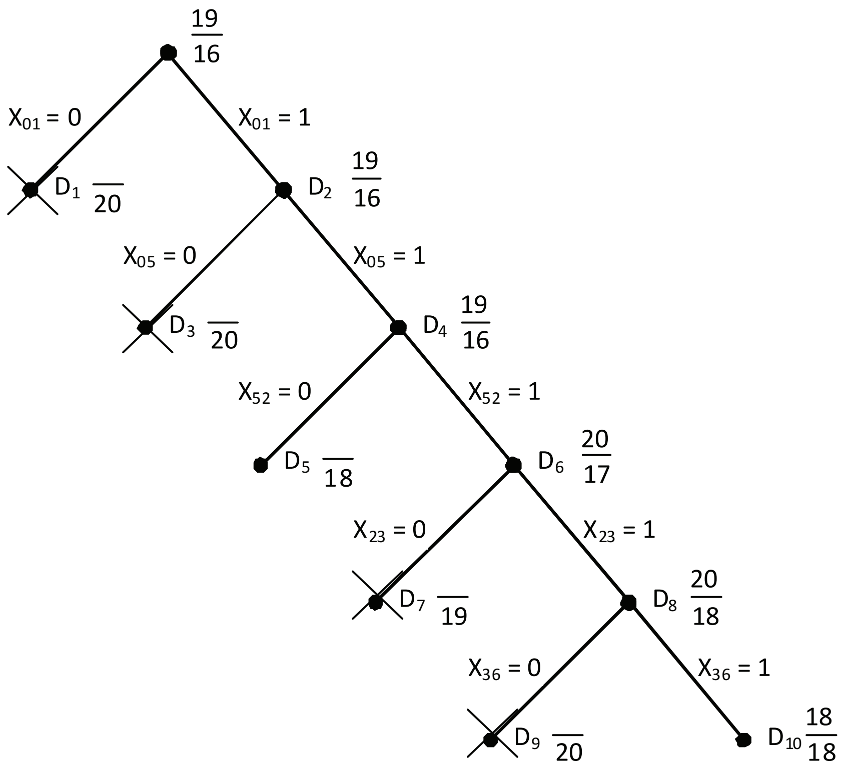

Рис. Дерево решений

5. Ветвление. Разобьем множество D_0 на два подмножества $D_0 = D_1 \cup D_2$, фиксируя на каждом из них значение переменной x_{01} равным 0 или 1.

6. Далее выполняется анализ множеств D_1 и D_2 аналогично пункту 2. Будут получены оценки $H_1 = 20$, $W_2 = 19$, $H_2 = 16$. Множество D_1 отсекается, так как на нем не существует решений с затратами меньше 20, а на множестве D_2 найдено решение с затратами 19.

Дальнейший ход решения представлен на рисунке.

Каждая вершина дерева соответствует анализируемому подмножеству решений. В знаменателе дроби указан прогноз оптимального значения критерия, в числителе – достигнутое на множестве значение критерия. Перечеркнуты вершины для удаленных множеств, то есть таких, на которых прогноз превышает уже достигнутое на каком-либо множестве значение критерия.

На множестве D_{10} верхняя граница совпала с нижней, и вершин с более предпочтительным прогнозом нет, следовательно, на множестве D_{10} найдено оптимальное решение. Оптимальный план перевозок потребует двух транспортных средств. Минимальные суммарные затраты на перемещение транспортных средств составят 18 единиц. По первому маршруту, проходящему через пункты (0, 1, 4, 0) будет перевезено 37 единиц груза, по второму маршруту (0, 5, 2, 3, 6, 0) – 49 единиц груза.

Предложенный алгоритм апробировался в компании, которая занимается доставкой бутилированной питьевой воды. Местоположение пунктов доставки (геокодирование) определялось по карте города с помощью геоинформационной системы API Google maps и визуально отображалось на электронной карте города. В первом приближении матрица затрат определялась как совокупность расстояний по прямой между пунктами доставки. Для более точного учета географических факторов («пробочной» информации, маршрута движения между двумя пунктами) можно использовать геоинформационную систему SDK City Guide. Полученное решение представлялось для анализа эксперту-менеджеру для учета дополнительных факторов времени доставки груза каждому клиенту и фактора загруженности транспортных маршрутов.

Для учета времени пункты доставки разбиваются на кластеры с совпадающими возможными интервалами доставки и решается задача формирования маршрутов внутри каждого кластера. Для учета загруженности транспортных коммуникаций требуется динамическая корректировка матрицы затрат с учетом текущей дорожной ситуации и пересчет формируемых маршрутов.

Список литературы

1. Бауэрсокс Д.Д., Клосс Д.Д. Логистика. Интегрированная цепь поставок. М.: Олимп-Бизнес, 2009. 640 с.

2. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.

3. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.

4. Коган Д.И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. Н. Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2004. 150 с.

5. Костюк Ю.Л., Пожидаев М.С. Приближенные алгоритмы решения сбалансированной задачи k коммивояжеров // Вестник Томского государственного университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика», 2008. № 1 (2). С. 106–112.

6. http://www.neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/ (дата обращения: 22.06.2010).

DETERMINATION OF OPTIMUM ROUTES FOR GOODS DELIVERY BY ROAD TRANSPORT

Yu.V. Trifonov, V.S. Gromnitsky, M.Yu. Zolotov

The paper considers the problem of determination of optimal circular routes for delivery of the necessary volumes of goods by several motor vehicles with a limited load capacity. A mathematical model is presented. An exact method for solving the problem is given. Some ways for taking into account the geoinformation factors are discussed.

Keywords: transport logistics, optimal routes, branches and boundaries method, geoinformation technologies.