УДК 517.9:514.7

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С АЛГЕБРОЙ so(3,R)

© 2011 г.

А.В. Баландин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

balandin@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 27.08.2010

Получены новые необходимые условия существования представления Лакса со значениями в алгебре so(3) для двух и трехкомпонентных систем кирального типа.

Ключевые слова: интегрируемые системы, системы кирального типа, нелинейные сигма-модели, представление Лакса.

Рассматриваются представления Лакса так называемых систем кирального типа, т.е. систем *n* дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными следующего вида:

$$U^i_{xy} + \tilde{A}^i_{jk} U^j_x U^k_y + Q^i = 0, \qquad (1)$$

где индексы *i, j, k* принимают значения от 1 до *n*; функции $\tilde{A}^i_{jk}, Q^i$ являются гладкими функциями переменных U^i. Системы вида (1), имеющие вариационное происхождение, называются общими нелинейными сигма-моделями.

В настоящей статье представление Лакса системы в частных производных вида (1) со значениями в алгебре Ли g будем понимать следующим образом.

Определение 1. Пусть *G* – полупростая *r*-мерная группа Ли с алгеброй Ли *g* и базисом левоинвариантных форм $\hat{O}^a$. Далее индексы *a, b, c* принимают значения от 1 до *r*. Тогда, как известно, справедливы структурные уравнения Маурера – Картана:

$$d\hat{O}^a = C^a_{bc} \hat{O}^c \wedge \hat{O}^b, \qquad (2)$$

где $C^a_{bc} = -\frac{1}{2}\overline{C}^a_{bc}$ и $\overline{C}^a_{bc}$ – структурные константы алгебры Ли *g* относительно базиса, двойственного к базису форм $\hat{O}^a$. Будем говорить, что система (1) допускает представление Лакса со значениями в алгебре Ли g, если существует набор гладких функций

$$A^a = A^a_j(U^i, \lambda) U^j_x + M^a(U^i, \lambda),$$

$$B^a = B^a_j(U^i, \lambda) U^j_x + N^a(U^i, \lambda)$$

(здесь λ – произвольный параметр) таких, что подстановка форм $\hat{O}^a = A^a dx + B^a dy$ в уравнения (2) при каждом значении параметра λ приводит к системе, эквивалентной системе (1).

Для дальнейшего будут полезны следующие обозначения:

$$S^a_i = \tfrac{1}{2}(A^a_i - B^a_i),$$

$$P^a_i = \tfrac{1}{2}(A^a_i + B^a_i).$$

Замечание 1. Из определения 1 непосредственно следует, что размерность системы не может превосходить размерность алгебры Ли. Другими словами, это означает, что ранг матрицы S^a_i равен *n*.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 (см. [1]). *Пусть система* (*1*) *допускает представление Лакса со значениями в алгебре Ли g. Тогда справедливы соотношения:*

$$S^a_i \tilde{A}^i_{jk} = S^a_{(j,k)} + P^a_{[j,k]} +$$

$$+ C^a_{bc}(-S^c_j S^b_k + P^c_j P^b_k + 2S^c_j P^b_k),$$

$$S^a_i Q^i = C^a_{bc} M^c N^b, \qquad (3)$$

$$M,^a_i = 2C^a_{bc}(P^c_i - S^c_i) M^b, \qquad (4)$$

$$N,^a_i = 2C^a_{bc}(P^c_i + S^c_i) N^b. \qquad (5)$$

Замечание 2. Далее для обозначения умножения в алгебре *g* будем использовать обозначение [,]. Таким образом, например, $[V,W]^a = \overline{C}^a_{bc} V^b W^c$. С учетом этих обозначений уравнения (3)–(5) принимают, соответственно, вид:

$$S_i^a Q^i = C_{bc}^a M^c N^b = -\frac{1}{2}\overline{C}_{bc}^a M^b N^c = \\ = -\frac{1}{2}[M,N]^a, \quad (6)$$

$$M,_i^a = [(P_i - S_i),M]^a, \quad (7)$$

$$N,_i^a = [(P_i + S_i),N]^a. \quad (8)$$

Определение 2. Связность, определенную коэффициентами $\tilde{A}_{jk}^i$, будем называть связностью, ассоциированной с системой (1).

В статье [1] показано, что из существования для системы (1) представления Лакса со значениями в компактной алгебре Ли следует существование относительно ассоциированной связности знакоопределенного тензорного поля Киллинга ранга 2, которое определяется следующим образом:

$$F_{ij} = (S_i^a, S_j^b), \quad (9)$$

круглые скобки здесь и далее обозначают скалярное произведение в метрике Киллинга на алгебре Ли.

Лемма 2. *Пусть система (1) допускает представление Лакса со значениями в алгебре g. Пусть также f – произвольный Ad-инвариантный симметричный полином порядка r = = p + q ($p \geq 1, q \geq 1$) на этой алгебре и H – функция, полученная подстановкой в f вместо первых p аргументов вектор-функций $M = (M^a)$ и вектор-функций $N = (N^a)$ вместо остальных аргументов. Тогда*

$$\frac{d}{dU^i} H = \frac{d}{dU^i} f(M,...M,N,...,N) = \\ = 2pqf(S_i, \underbrace{M,M,...,M}_{p-1}, [M,N], \underbrace{N,N,...,N}_{q-1}), \quad (10)$$

здесь правая часть равенства получена подстановкой M и N соответственно вместо p – 1 и q – 1 аргументов.

Если $p = 0$ или $q = 0$, то $\frac{d}{dU^i} H = 0.$

Доказательство получается непосредственными вычислениями с использованием равенств (7), (8) и условия Ad-инвариантности полинома *f*.

Следствие 1. Пусть *H* – функция, определенная в лемме 1, и $\vec{Q}$ – векторное поле, заданное коэффициентами Q^i системы (1). Тогда

$$\vec{Q}(H) = \\ -pqf([M,N], \underbrace{M,M,...,M}_{p-1}, [M,N], \underbrace{N,N,...,N}_{q-1}). \quad (11)$$

Доказательство непосредственно следует из равенств (6) и (10).

Лемма 3. *Пусть система (1) допускает представление Лакса со значениями в компактной алгебре g и*

$$H = (M,N), \quad (12)$$

т.е. H – функция, построенная с помощью Ad-инвариантного полинома, совпадающего с метрикой Киллинга на алгебре Ли. Тогда $\vec{Q}(H) = 0$ в том и только в том случае, когда $\vec{Q} = 0$.

Доказательство. Для функции *H* с учетом (11) имеем равенство:

$$\vec{Q}(H) = -([M,N],[M,N]). \quad (13)$$

Отсюда с помощью (6) приходим к соотношениям:

$$\vec{Q}(H) = -4(S_i^a Q^i, S_j^b Q^j) = \\ = -4\,(S_i^a, S_j^b) Q^i Q^j = -4F_{ij} Q^i Q^j. \quad (14)$$

Теперь, учитывая знакоопределенность тензора F_{ij}, получаем искомое утверждение.

Замечание 3. Непосредственные вычисления показывают, что для функции H, определенной условием (12), справедливо равенство:

$$\vec{Q}^2(H) = -2([M,[N[M,N]]],[M,N]).$$

Далее подробнее изучается случай, когда $g = so(3)$. Оказывается, что в этом случае можно сформулировать некоторые необходимые условия существования Лакса для системы в терминах самой системы, т.е. в терминах ассоциированной связности и векторного поля $\vec{Q}$.

Теорема 1. *Пусть система (1), для которой n < 4 и $\vec{Q} \neq 0$ допускает представление Лакса со значениями в алгебре so(3). Тогда существуют отрицательно определенное тензорное поле Киллинга P_{ij} и некоторая положительная константа C, удовлетворяющие условию*:

$$\pm \frac{\partial}{\partial U^k}\left(\sqrt{P_{ij} Q^i Q^j + C}\right) = P_{ik} Q^i. \quad (15)$$

Доказательство. Рассуждая в соответствии с замечанием 3, будет достаточно выбрать функцию *H*, определенную условием (12). Далее отождествим алгебру so(3) с евклидовым векторным пространством R^3 и определим положительно определенное тензорное поле F_{ij} равенством (9), где скобки обозначают скалярное произведение в R^3. Заметим, что из соотношений (7), (8) следует, что (*M*, *M*) = const, (*N*, *N*) = const. Обозначим $m^2 = (M,M)$,

$n^2 = (N,N)$. Из леммы 3 следует, что $mn \neq 0$. Отметим следующий факт, что на алгебре so(3) все Ad-инвариантные многочлены можно выразить через один, например через скалярное произведение *H*. Теперь, записывая соответствующее очевидное равенство $(M, N)^2 + ([M, N])^2 = m^2 n^2$, из соотношений (13) и (14) получим

$$(M,N)^2 = m^2 n^2 - 4F_{ik}Q^i Q^k . \qquad (16)$$

В свою очередь из леммы 2 имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial U^k}(M, N) = 2(S_k, [M, N]) = -4F_{ik}Q^i . \qquad (17)$$

Теперь, обозначая $P_{ik} = -4F_{ik}$ и $m^2 n^2 = C$, приходим к (15).

Следствие 1. Пусть $g_{ij} = g_{ij}(U^k)$ – метрика *n*-мерного (*n* = 2, 3) риманова многообразия в локальной системе координат (U^k). Пусть, кроме того, метрика не допускает нетривиальных знакоопределенных тензорных полей Киллинга ранга 2. Для того чтобы система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = g_{ij}U_x^i U_y^j + Q$ допускала представление Лакса со значениями в so(3), необходимо выполнение условия

$$Q^2 + g^{ij}\frac{\partial Q}{\partial U^j}\frac{\partial Q}{\partial U^i} = \text{const}. \qquad (18)$$

Доказательство. Сначала заметим, что, составляя уравнения Эйлера для лагранжиана *L*, получим систему (1), для которой выполнено условие $g_{ij}Q^i = \dfrac{\partial Q}{\partial U^j}$. Опять обозначая $H = (M, N)$, перепишем равенства (17) в виде $\dfrac{\partial H}{\partial U^j} = P_{ij}Q^i$. По условию найдется константа *A* такая, что $P_{ij} = Ag_{ij}$. Далее, учитывая, что функция *Q* определена с точностью до константы, приходим к равенству $H = AQ$. Теперь с использованием соотношения (16) будем иметь (18).

Следующий ниже результат, по-видимому, можно получить из классификации интегрируемых однокомпонентных уравнений. Однако новым является предлагаемый здесь способ доказательства.

Утверждение 1. Уравнение

$$U_{xy} + \tilde{A}(U)U_x U_y + Q\ (U) = 0,\ Q \neq 0, \qquad (19)$$

допускает представление Лакса со значениями в алгебре so(3) тогда и только тогда, когда заменой переменной уравнение (19) можно привести к уравнению Sin-Гордона.

Доказательство. Пусть уравнение (19) допускает представление Лакса. Тогда, в силу леммы 3, в качестве новой переменной можно выбрать функцию *H* = (*M*, *N*). Однако удобнее будет выбрать в качестве переменной функцию *z*, определенную равенством $H = mn\cos z$, где $m^2 = (M,M)$, $n^2 = (N,N)$. В этих координатах векторное поле $\vec{Q}$ имеет единственную координату $Q^1(z)$.

Теперь имеем равенство $Q(H) = Q^1(z)\dfrac{\partial H}{\partial z} = -Q^1(z)mn\sin z$. В то же время из равенства (13) получим $Q(H) = -m^2 n^2 \sin^2 z$. Отсюда находим, что $Q^1(z) = mn\sin z$. Таким образом, в данных координатах уравнение принимает вид: $z_{xy} + G(z)z_x z_y + Q^1(z) = 0$. Осталось показать, что $G(z) = 0$. Действительно, соотношения (17) в данном случае приводят к равенству $\dfrac{\partial H}{\partial z} = F_{11}Q^1(z)$, которое показывает, что $F_{11} = -1$. По теореме 1 тензорное поле F_{11} является полем Киллинга, т.е. удовлетворяет условию $\nabla_{(1}F_{11)} = \nabla_1 F_{11} = 0$. Записывая последнее условие подробно, получим равенство $\dfrac{\partial F_{11}}{\partial z} + 2GF_{11} = 0$, которое в свою очередь приводит к условию $G(z) = 0$.

Автор выражает благодарность Ю.В. Тузову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2011 годы, контракт № П945.

Список литературы

1. Баландин А.В., Кащеева О.Н. // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3. С. 1–23.

NECESSARY CONDITIONS FOR INTEGRABILITY OF SYSTEMS ASSOCIATED WITH so(3,R) ALGEBRA

A.V. Balandin

New necessary conditions have been obtained for the existence of the Lax representation with values in algebra so(3,R) for two and three-component chiral-type systems.

Keywords: integrable systems, chiral-type systems, nonlinear sigma-models, Lax representation.