

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСТЯГИВАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2011 г.

Н.В. Баничук¹, Е.В. Макеев¹, А.А. Барсук²¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва²Молдавский госуниверситет, Кишинев

makeev@rambler.ru

Поступила в редакцию 03.02.2011

Рассматривается задача оптимального проектирования консоли переменной жесткости по критерию устойчивости. К свободному концу консоли приложена растягивающая сила, передаваемая через прикрепленный к нему абсолютно жесткий стержень. Решение задачи строится в замкнутой аналитической форме. Показывается, что при определенном значении отношения длин жесткого стержня и консоли происходит бифуркация формы равновесия оптимального стержня. Формулируются условия возникновения бифуркации, определяются значения оптимальных характеристик, приводится асимптотический анализ оптимальных решений.

Ключевые слова: оптимизация, потеря устойчивости, растяжение и изгиб стержней, бифуркации.

Введение

Исследуется поведение консоли переменной жесткости $EI(x) = A_p S^p(x)$ ($p = 1, 2, 3$, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения, I – момент инерции поперечного сечения) длины l , к свободному концу которой жестко прикреплен абсолютно жесткий стержень длины a , так что при деформировании консоли стержень всегда направлен по касательной к осевой линии консоли (см. рис. 1). К свободному концу стержня приложена растягивающая сила P , направленная вдоль оси недеформированной консоли и сохраняющая свое направление в процессе её деформирования. Значения констант A_p для различных типов поперечных сечений содержатся в [1]. Так, для балок прямоугольного поперечного сечения постоянной высоты h_1 и переменной ширины $h_2(x)$ эта зависимость имеет вид: $EI(x) = Eh_1^2 S(x)$. В случае же постоянной ширины ($h_2 = \text{const}$) и переменной высоты $h_1(x)$ имеем $EI(x) = (Eh_2^2/12)S^3(x)$. Для круглых балок $EI(x) = (E/4\pi)S^2(x)$.

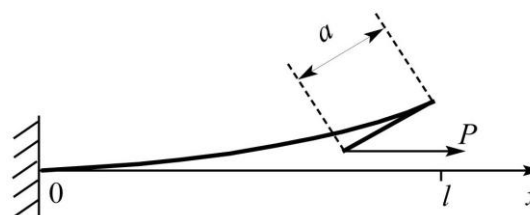


Рис. 1

Особенности поведения упругих стержней обсуждались для стержней постоянного сечения и различных способов закрепления концов стержней [2]. Было показано, что, несмотря на приложение растягивающих усилий, при определенных их значениях происходит потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия. Дальнейшее обсуждение этого класса задач может быть найдено в монографии [3], где отмечается консервативный характер обсуждаемого класса нагружений. Задача оптимального проектирования растягиваемых стержней обсуждалась в [4], где с использованием как численных, так и аналитических процедур получены оптимальные распределения толщин для подобных сечений для ряда значений параметра задачи – отношения длины жесткого стержня к длине консоли. В частности, в результате численных

расчетов в [4] обнаружено существование двух оптимальных решений для ряда значений растягивающей силы.

В данной работе с использованием развитого в [1, 5] способа в замкнутой аналитической форме строятся решения задачи оптимизации устойчивости растягиваемой консоли переменной жесткости $EI(x) = A_p S^p(x)$ для значений $p = 1, 2, 3$. В аналитической форме рассматриваются условия возникновения бифуркаций оптимальных решений и приводится асимптотический анализ этих решений.

1. Формулировка задачи оптимизации

Рассматривается растяжение стержня длины l переменной изгибающей жесткости и заданного объема $V = \int_0^l S(x) dx$. Один конец стержня ($x = 0$) жестко зашпелен, а другой ($x = l$) – свободен. К свободному концу рассматриваемого стержня ($x = l$) жестко прикреплен второй абсолютно жесткий стержень длины a , направленный вдоль первого стержня в сторону его закрепленного конца ($x = 0$). К свободному концу жесткого стержня приложена растягивающая сила P , действующая параллельно оси x и сохраняющая направление в процессе деформирования стержня.

Введем обозначение $w(x)$ для поперечных прогибов стержня и запишем условия равновесия для нагруженного таким образом стержня

$$\begin{aligned} (EJ(x)w_{xx})_{xx} - Pw_{xx} &= 0 \quad (0 < x < l), \\ w(0) = w_x(0) = 0, \quad EJ(l)w_{xx}(l) &= Pa w_x(l). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевая задача (1.1) является однородной относительно функции прогибов $w(x)$, и таким образом нулевое решение $w(x) = 0$ удовлетворяет условиям равновесия (1.1). Ненулевые решения существуют для определенных значений нагрузки P_i , называемых критическими. При фиксированном объеме V и значениях l , a , A_p величина критической нагрузки P будет зависеть от распределения толщин $S(x)$, т.е. $P = P(S)$.

Задача оптимизации заключается в нахождении $S(x)$ из условия

$$S^*(x): P(S) \rightarrow \max_S, \int_0^l S(x) dx = V. \quad (1.2)$$

Для удобства последующих выкладок и анализа введем безразмерные переменные и параметры (штрихи ниже опускаются)

$$\begin{aligned} x &= lx', \quad S(x) = VS'(x)/l, \\ \lambda &= Pl^{p+2} / A_p EV^p, \quad \gamma = a/l \end{aligned} \quad (1.3)$$

и представим рассматриваемую задачу оптимизации (1.2) и краевую задачу (1.1) в виде

$$\begin{aligned} (S^p(x)w_{xx})_{xx} - \lambda w_{xx} &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ w(0) = w_x(0) = 0, \quad S^p(1)w_{xx}(1) &= \lambda \gamma w_x(1), \quad (1.4) \\ (p = 1, 2, 3), \lambda(S) &\rightarrow \max_S, \int_0^1 S(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение обозначение $m(x) = S^p(x)w_{xx}(x)$ для изгибающего момента и $\theta(x) \equiv w_x(x)$ для угла наклона осевой линии деформированного стержня к оси x . С учетом зависимости $m(x) = \lambda \theta(x)$ и граничного условия $\theta(0) = w_x(0) = 0$ приходим к граничным условиям для изгибающего момента $m_x(0) = 0$ при $x = 0$ и $m(1) = \lambda \gamma \theta(1) = \gamma m_x(1)$ при $x = 1$ и в результате – к формулировке задачи оптимизации в виде

$$\begin{aligned} m_{xx}(x) - \lambda \frac{m(x)}{S^p(x)} &= 0, \quad m_x(0) = 0, \\ m(1) &= \gamma m_x(1), \quad (p = 1, 2, 3), \quad (1.5) \\ \lambda(S) &\rightarrow \max_S, \int_0^1 S(x) dx = 1. \end{aligned}$$

В частности, при $S(x) \equiv 1$ решение спектральной краевой задачи (1.5) приводит к уравнению для определения зависимости критических сил от параметра γ

$$\sqrt{\lambda} \operatorname{th} \sqrt{\lambda} = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.6)$$

Для асимптотических значений параметра $0 < \gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$ решение уравнения (1.6) представляется в виде (приводятся только главные члены асимптотических представлений решения)

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} \quad (0 < \gamma \ll 1), \quad \lambda(\gamma) \approx \frac{1}{\gamma} \quad (\gamma \gg 1). \quad (1.7)$$

2. Построение решений задачи оптимизации

Спектральная краевая задача (1.5) является самосопряженной, и вследствие этого потеря устойчивости происходит по типу разветвления статических форм равновесия, а критическая сила потери устойчивости для заданного рас-

предела площади поперечных сечений $S(x)$ определяется вариационным принципом

$$\lambda(S) = \min_{m(x)} \frac{-\int_0^1 m_x^2(x) dx + \frac{1}{\gamma} m^2(1)}{\int_0^1 \frac{m^2(x)}{S^p(x)} dx}. \quad (2.1)$$

С целью исключения интегрального ограничения введем функционал Лагранжа

$$L = \lambda(S) - \mu \left(\int_0^1 S(x) dx - 1 \right) \quad (2.2)$$

(μ – множитель Лагранжа) и с использованием стандартных вычислений приходим к необходимому условию экстремума $\lambda(S)$ в форме

$$m^2(x) = S^{p+1}(x), \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Дифференцируя обе части (2.3) (в предположении дифференцируемости распределения толщин $S(x)$) находим

$$2m(x)m'(x) = (p+1)S^p(x)S'(x). \quad (2.4)$$

Получим первый интеграл дифференциального уравнения в (1.5). С этой целью умножим обе части этого уравнения на $m'(x)$ и с учетом необходимых условий оптимальности (2.3), соотношения (2.4) и граничного условия $m'(0) = 0$ приходим к представлению для первого интеграла в форме

$$m_x^2(x) = (p+1)\lambda(S(x) - S_0), \quad (2.5)$$

где введено обозначение $S_0 = S(0)$ для площади корневого сечения консоли.

Из выражения (2.5) сразу следует, что $S(x) \geq S_0$. С учетом этого и соотношения $m'(x) = \lambda\theta(x) > 0$ перепишем (2.5) в форме

$$m'(x) = \sqrt{(p+1)\lambda} \sqrt{S(x) - S_0}. \quad (2.6)$$

В результате с использованием условия оптимальности (2.3), зависимостей (2.4) и (2.6) приходим к дифференциальному уравнению для определения оптимальных распределений толщин:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}} \frac{\sqrt{S(x) - S_0}}{S^{\frac{p-1}{2}}}, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Представление решения этого уравнения в квадратурах имеет вид:

$$\int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}} x. \quad (2.8)$$

В частности, при $x = 1$ имеем

$$\int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}}, \quad (2.9)$$

где $S_1 = S(1)$ – площадь торцевого поперечного сечения. Отметим, что в соответствии с (2.7) $S'(x) > 0$ при $0 < x < 1$, и, следовательно, оптимальное распределение толщин монотонно возрастает от заземления к свободному концу и, таким образом, $S_0 \leq S(x) \leq S_1$. Сами значения S_0 и S_1 определяются в процессе решения задачи. Условиями для их определения служат изопериметрическое условие $V = 1$ и граничное условие $m(1) = \gamma m'(1)$. Имеем

$$V = 1: \int_0^1 S(x) dx = \int_{S_0}^{S_1} \frac{S dS}{S'} = \sqrt{\frac{p+1}{4\lambda}} \int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = 1,$$

$$m(1) = \gamma m'(1): S_1^{\frac{p+1}{2}} = \gamma \sqrt{(p+1)\lambda} \sqrt{S_1 - S_0}.$$

В результате приходим к системе соотношений для определения значений λ , S_0 , S_1 и оптимального распределения толщин $S(x)$

$$\int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}}, \quad \int_{S_0}^{S_1} \frac{\tau^{\frac{p+1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}}, \quad (2.10)$$

$$S_1^{\frac{p+1}{2}} = \gamma \sqrt{(p+1)\lambda} \sqrt{S_1 - S_0},$$

$$\int_0^x \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - S_0}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.11)$$

$$p = 1, 2, 3.$$

С целью удобства последующего анализа введем обозначения

$$\delta = \frac{S_0}{S_1} \leq 1, \quad S(x) = S_1 s(x) \quad (\delta \leq s(x) \leq 1),$$

$$I_1(p, \delta, s) = \int_{\delta}^s \frac{\tau^{\frac{p-1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - \delta}}, \quad (2.12)$$

$$I_2(p, \delta) = \int_{\delta}^1 \frac{\tau^{\frac{p+1}{2}} d\tau}{\sqrt{\tau - \delta}}$$

и запишем решение задачи оптимизации (2.10), (2.11) в форме

$$\begin{aligned}
S_1^{\frac{p}{2}} I_1(p, \delta, 1) &= \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}}, \\
S_1^{\frac{p+2}{2}} I_2(p, \delta) &= \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}}, \\
S_1^{\frac{p}{2}} &= \gamma \sqrt{(p+1)\lambda} \sqrt{1-\delta}, \\
S_1^{\frac{p}{2}} I_1(p, \delta, s) &= \sqrt{\frac{4\lambda}{p+1}} x, \\
0 \leq x \leq 1, \quad p &= 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Разрешая соотношения (2.13) относительно характеристик оптимального сечения, приходим к параметрическому представлению для оптимального решения

$$\begin{aligned}
I_1(p, \delta, s) &= I_1(p, \delta, 1)x \quad (0 \leq x \leq 1), \\
S_1 &= \frac{I_1(p, \delta, 1)}{I_2(p, \delta)}, \quad S(x) = S_1 s(x), \quad 0 \leq \delta \leq 1
\end{aligned} \tag{2.14}$$

и параметрическому представлению $\gamma = \gamma(\delta)$, $\lambda = \lambda(\delta)$ для зависимости $\lambda(\gamma)$ критической силы λ от параметра задачи γ

$$\begin{aligned}
\gamma(\delta) &= \frac{2}{p+1} \frac{1}{I_1(p, \delta, 1) \sqrt{1-\delta}}, \\
\lambda(\delta) &= \frac{p+1}{4} \frac{I_1^{p+2}(p, \delta, 1)}{I_2^p(p, \delta)}, \\
p &= 1, 2, 3, \quad 0 \leq \delta \leq 1.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Таким образом, задаваясь значениями $\delta \in [0, 1]$, по формулам (2.14) вычисляем оптимальное распределение толщин $S(x)$, а с использованием выражений (2.15) – отвечающие этим значениям параметра величины критической силы λ и параметра задачи γ .

Отметим, что, как это следует из вариационного представления (2.1), для критической силы $\lambda: \lambda'(\gamma) < 0$ и, таким образом, с увеличением параметра γ критическая сила уменьшается.

3. Анализ условий бифуркаций оптимальных решений

Обратимся к анализу зависимости $\lambda(\gamma)$ критической силы λ от параметра задачи γ для оптимальных стержней, представленной в (2.15) в параметрической форме

$$\gamma = \gamma(\delta), \quad \lambda = \lambda(\delta), \quad 0 \leq \delta \leq 1. \tag{3.1}$$

Для получения этой зависимости в форме $\lambda(\gamma)$ необходимо исключить из соотношений (3.1) параметр δ . В соответствии с известной

теоремой анализа о существовании обратной функции для монотонных на интервале $0 \leq \delta \leq 1$ зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ существует однозначная обратная функция $\delta = \delta(\gamma)$, подстановка которой в выражение $\lambda = \lambda(\delta)$ приводит к однозначной зависимости $\lambda(\gamma)$ и соответственно единственному оптимальному решению для значений параметра $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ ($\gamma_0 = \gamma(\delta = 0)$, $\gamma_1 = \gamma(\delta = 1)$). Для дифференцируемых зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ условие монотонности означает, что производная от этой функции не обращается в ноль на рассматриваемом интервале изменения аргумента, т.е.

$$\frac{d\gamma(\delta)}{d\delta} \neq 0, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \tag{3.2}$$

Таким образом, значения параметра $\gamma = \gamma_*$ и отвечающие им критические силы $\lambda_* = \lambda(\delta_*)$, при которых возможно появление нескольких оптимальных решений (бифуркация решений), для дифференцируемых зависимостей $\gamma = \gamma(\delta)$ определяются из условий

$$\begin{aligned}
\delta_* : \frac{d\gamma(\delta)}{d\delta} &= 0 \quad (0 \leq \delta \leq 1), \\
\gamma_* &= \gamma(\delta_*), \quad \lambda_* = \lambda(\delta_*).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Определение числа возникающих при этом решений производится в общем случае с использованием теории ветвления решений нелинейных уравнений [6]. В рассматриваемом случае условий в форме (3.3) анализ бифуркации решений существенно упрощается. Так, если корень δ_* уравнения в (3.3) простой, то в малой окрестности отвечающего δ_* значения параметра γ_* существуют только два решения $\delta = \delta_1(\gamma)$ и $\delta = \delta_2(\gamma)$ ($|\gamma - \gamma_*| \ll 1$), подстановка которых в выражение $\lambda = \lambda(\delta)$ приводит к двум зависимостям $\lambda_1(\gamma) = \lambda(\delta_1(\gamma))$ и $\lambda_2(\gamma) = \lambda(\delta_2(\gamma))$. Аналогичным образом вычисляются и все другие характеристики оптимальных решений.

4. Построение оптимальных решений для $p = 1, 2, 3$

Для конкретных значений $p = 1, 2, 3$ фигурирующие в (2.13)–(2.15) интегралы вычисляются в элементарных функциях, что позволяет провести исчерпывающий анализ оптимальных решений, проанализировать условия бифуркации этих решений, а также получить асимптотические представления для них. Ниже приво-

дятся результаты вычислений отдельно для каждого из значений $p = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
 p = 1: \\
 I_1(1, \delta, s) &= 2\sqrt{s - \delta} \quad (\delta \leq s \leq 1), \\
 I_2(1, \delta) &= \frac{2}{3}(1 + 2\delta)\sqrt{1 - \delta}, \\
 S_1 &= \frac{3}{1 + 2\delta}, S_0 = \frac{3\delta}{1 + 2\delta}, \\
 \gamma(\delta) &= \frac{1}{2(1 - \delta)}, \lambda(\delta) = \frac{6(1 - \delta)}{1 + 2\delta}, \\
 S(x) &= \frac{3}{1 + 2\delta}(\delta + (1 - \delta)x^2), 0 \leq \delta \leq 1.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае зависимость $\gamma(\delta)$ монотонная и соответственно этому существует однозначная обратная зависимость $\delta(\gamma) = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma}$, при этом значению $\delta = 0$ отвечает значение $\gamma_* = 0.5$, а значению $\delta = 1$ соответственно $\gamma = \infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае потеря устойчивости для оптимальных стержней происходит при значениях параметра $\gamma \in [0.5, \infty)$, в то время как для стержней постоянного сечения – при $\gamma \in [0, \infty)$. Подстановка полученного выражения для $\delta(\gamma)$ в выражения для $\lambda(\delta)$ и $S(x)$ в (4.1) приводит к исключению параметра δ и представлению оптимального решения $S(x)$ и зависимости $\lambda(\gamma)$ в виде функции параметра задачи γ

$$S(x) = 1 + \frac{3x^2 - 1}{2(3\gamma - 1)}, \lambda(\gamma) = \frac{3}{3\gamma - 1}, \quad \gamma \geq 0.5. \tag{4.2}$$

Отметим, что наибольшая критическая сила отвечает значению $\gamma_* = 0.5$ и равна 6, а отвечающее ей оптимальное распределение толщин дается выражением $S(x) = 3x^2$. Для асимптотически больших значений параметра $\gamma \gg 1$ из выражений (4.2) с сохранением главных членов асимптотических разложений получаем представления для $S(x)$ и $\lambda(\gamma)$

$$S(x) \approx 1 + \frac{3x^2 - 1}{6\gamma}, \lambda(\gamma) \approx \frac{1}{\gamma}, \gamma \gg 1. \tag{4.3}$$

Из приведенных выражений следует, что с увеличением параметра γ поперечное сечение оптимального стержня стремится к постоянному, а асимптотическая зависимость для $\lambda(\gamma)$ находится в соответствии с асимптотическим поведением (1.7) для стержней постоянного сечения.

$$\begin{aligned}
 p = 2: \\
 I_1(2, \delta, s) &= \sqrt{s}\sqrt{s - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - \delta}}{\sqrt{\delta}} \\
 & \quad (\delta \leq s \leq 1), 0 \leq \delta \leq 1; \\
 I_2(2, \delta) &= \frac{1}{4}((2 + 3\delta)\sqrt{1 - \delta} + \\
 & \quad + 3\delta^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}}), \\
 S_1 &= \frac{4 \left(\sqrt{1 - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}} \right)}{(2 + 3\delta)\sqrt{1 - \delta} + 3\delta^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}}}, \\
 \sqrt{s}\sqrt{s - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - \delta}}{\sqrt{\delta}} &= \\
 &= \left(\sqrt{1 - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}} \right) x \\
 & \quad (0 \leq x \leq 1), S(x) = S_1 s(x);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma(\delta) &= \frac{2}{3 \left(\sqrt{1 - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}} \right)}, \\
 \lambda(\delta) &= \frac{12 \left(\sqrt{1 - \delta} + \delta \ln \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}} \right)^4}{\left((2 + 3\delta)\sqrt{1 - \delta} + 3\delta^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{\delta}} \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Прежде всего обратимся к анализу зависимости $\gamma(\delta)$. Имеем на концах интервала $0 \leq \delta \leq 1$ $\gamma(0) = \frac{2}{3}$ и $\gamma(1) = \infty$. В то же время

$$\gamma(\delta) \approx \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\delta}{2} \ln \frac{1}{\delta} \right) < \frac{2}{3} \text{ при } 0 \leq \delta \leq 1 \text{ и, таким}$$

образом, функция $\gamma(\delta)$ не является монотонной в интервале $[0; 1]$ и, следовательно, в рассматриваемом случае возможна бифуркация оптимальных решений. Выполнение вычислений в соответствии с общими выражениями (4.3) в рассматриваемом случае приводит к значениям бифуркационных параметров

$$\begin{aligned}
 \delta_* &= 0.12088 \gamma_* = 0.62083 \\
 \lambda_* &= 3.93500.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Приведенное значение δ_* является единственным и не кратным решением уравнения $\gamma'(\delta) = 0$ в интервале $[0; 1]$, и поэтому в малой окрестности γ_* существуют только две зависи-

мости $\delta_1(\gamma)$, $\delta_2(\gamma)$, и соответственно этому приходим к зависимостям $\lambda_1(\gamma) = \lambda(\delta_1(\gamma))$ и $\lambda_2(\gamma) = \lambda(\delta_2(\gamma))$ для двух оптимальных решений. Таким образом, при $\delta \in [0, \delta_*]$ формулами в (4.4) описываются характеристики одного оптимального решения, а при $\delta \in [\delta_*, 1]$ – другого. Проанализируем формирование оптимальных решений при $\delta \in [0, \delta_*]$. В частности, при $\delta = 0$ имеем

$$\gamma(0) = \frac{2}{3}, \lambda_1(0) = 3, S(x) = 2x. \quad (4.6)$$

С учетом этого приходим к заключению, что описываемое оптимальное решение существует только для значений $\gamma \in [\gamma_* = 0.62083 \ 2/3]$.

Пусть теперь $\delta \in [\delta_*, 1]$, $\delta_2(\gamma)$ – обращение зависимости $\gamma(\delta)$ в интервале $[\delta_*, 1]$ и соответственно этому $\lambda_2(\gamma) = \lambda(\delta_2(\gamma))$. Отметим, что при $1 - \delta \ll 1$ $\gamma(\delta) \gg 1$, и, следовательно, при изменении $\delta \in [\delta_*, 1]$ параметр $\gamma \in [\gamma, \infty]$. Отсюда следует, что при $\gamma_* < \gamma \leq 2/3$ существуют два решения задачи оптимизации, а при $\gamma > 2/3$ – единственное.

Получим величину критической силы $\lambda_2(\gamma)$, отвечающей $\gamma = 2/3$. С этой целью решаем трансцендентное уравнение $\gamma(\delta) = 2/3$ в интервале $\delta \in [\delta_*, 1]$ и находим $\delta_2 = 0.305183$ и отвечающее ему значение $\lambda_2(2/3) = 3.25012$. Поскольку $\lambda_2(2/3) = 3.25012 > \lambda_1(2/3) = 3$, то в качестве оптимального решения задачи выбираем решение, описываемое формулами (4.4) при $\delta \in [\delta_*, 1]$. На рис. 2 представлены зависимости $\lambda_1(\gamma)$ и $\lambda_2(\gamma)$, критических сил от параметра γ , отвечающих найденным оптимальным решениям.

Приведем асимптотические представления для характеристик оптимального решения при $\gamma \gg 1$ ($1 - \delta \ll 1$). Имеем с точностью до главных членов асимптотических разложений

$$S(x) \approx 1 + \frac{3x^2 - 1}{9\gamma}, \lambda(\gamma) \approx \frac{1}{\gamma}, \gamma \gg 1. \quad (4.7)$$

Таким образом, с увеличением параметра γ поперечное сечение оптимального стержня стремится к постоянному, а асимптотическая зависимость для $\lambda(\gamma)$ находится в соответствии с асимптотическим поведением (1.7) для стержней постоянного сечения.

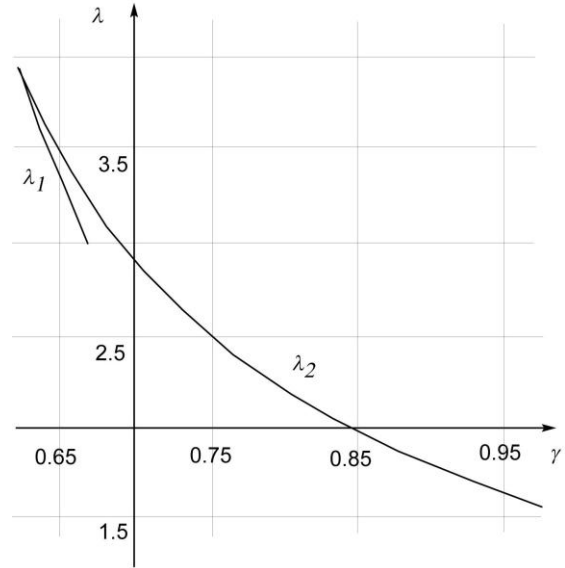


Рис. 2

$$p = 3:$$

$$I_1(3, \delta, s) = \frac{2}{3}(s + 2\delta)\sqrt{s - \delta}$$

$$(\delta \leq s \leq 1), 0 \leq \delta \leq 1;$$

$$I_2(3, \delta) = \frac{2}{15}(3 + 4\delta + 8\delta^2)\sqrt{1 - \delta},$$

$$S_1 = \frac{5(1 + 2\delta)}{3 + 4\delta + 8\delta^2}, \quad (4.8)$$

$$(s + 2\delta)\sqrt{s - \delta} = (1 + 2\delta)\sqrt{1 - \delta}x,$$

$$S(x) = S_1 s(x), \gamma(\delta) = \frac{3}{4(1 + 2\delta)(1 - \delta)},$$

$$\lambda(\delta) = \frac{500(1 + 2\delta)^5(1 - \delta)}{9(3 + 4\delta + 8\delta^2)^3}, 0 \leq \delta \leq 1.$$

Обращение зависимости $\gamma(\delta)$ в рассматриваемом случае приводит к двузначной функции

$$\delta_1(\gamma) = \frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{9 - \frac{6}{\gamma}} \right), \quad (4.9)$$

$$\delta_2(\gamma) = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{9 - \frac{6}{\gamma}} \right).$$

Из (4.9) следует, что допустимые значения параметра γ определяются условием неотрицательности подкоренного выражения, и таким образом приходим к условию $\gamma \geq 2/3$, при этом значение $\gamma_* = 2/3$ бифуркационное, так как оно является точкой ветвления для функции $\delta(\gamma)$. Значению $\gamma_* = 2/3$ отвечает $\delta_* = \delta_1(\gamma_*) = \delta_2(\gamma_*) = 1/4$ и бифуркационное значе-

ние критической силы $\lambda_* = \lambda(\gamma_*) = 3.47222$. Простые вычисления в соответствии с общими выражениями (3.3) приводят, как и должно быть, к этим же значениям бифуркационных параметров. Таким образом, существуют два решения задачи оптимизации, характеристики которых вычисляются в явном виде при подстановке выражений (4.9) в параметрические представления (4.8) для оптимальных решений.

Отметим, что ввиду положительности параметра δ из представления (4.9) для $\delta_1(\gamma)$ следует, что $\gamma \leq 3/4$, а с учетом полученного выше условия $\gamma \geq 2/3$ приходим к заключению, что оптимальное решение, определяемое зависимостью $\delta_1(\gamma)$, существует в интервале

$2/3 \leq \gamma \leq 3/4$. В частности, при $\gamma = \frac{3}{4}$:

$$\delta_1\left(\frac{3}{4}\right) = 0, \lambda_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{500}{243} = 2.0576, S(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}.$$

Характеристики второго оптимального решения получим при вычислениях с использованием зависимости $\delta_2(\gamma)$. При этом отметим, что $\delta_2(\gamma) \geq 0$ для всех значений $\gamma \geq 2/3$, и, таким образом, оптимальное решение, определяемое зависимостью $\delta_2(\gamma)$, существует также для всех $\gamma \in [2/3, \infty)$. Отсюда заключаем, что для значений $2/3 \leq \gamma \leq 3/4$ существуют два оптимальных решения, определяемых зависимостями $\delta_1(\gamma)$ и $\delta_2(\gamma)$, при $\gamma > 3/4$ – одно, определяемое $\delta_2(\gamma)$, а при $0 \leq \gamma \leq 2/3$ оптимальных решений не существует.

Приведем характеристики оптимального решения, определяемого $\delta_2(\gamma)$, при $\gamma = \frac{3}{4}$:

$$\delta_2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}, \lambda_2\left(\frac{3}{4}\right) = 2.59151, S_0 = \frac{5}{7}, S_1 = \frac{10}{7}$$

и отметим, что $\lambda_1(3/4) < \lambda_2(3/4)$. На рис. 3 представлены зависимости $\lambda_1(\gamma)$ и $\lambda_2(\gamma)$ критических сил от параметра γ , отвечающих найденным оптимальным решениям.

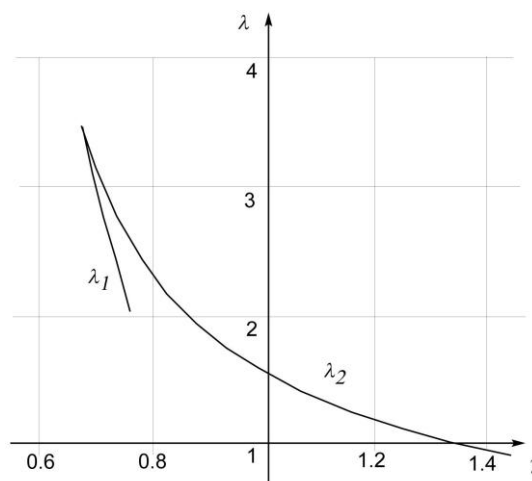


Рис. 3

Приведем также асимптотические представления для оптимальных распределений толщин и отвечающих им критических сил (с сохранением только главных членов асимптотических разложений)

$$S(x) \approx 1 + \frac{3x^2 - 1}{12\gamma}, \lambda(\gamma) \approx \frac{1}{\gamma}, \gamma \gg 1. \quad (4.10)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-08-00030а, Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН № 13 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 169.2008.1).

Список литературы

1. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 301 с.
2. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1950. 900 с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
3. Jelicic Z.D., Atanackovic T.M. On an optimization problem for elastic rods // Struct. Multidisc. Optim. 2006. **32**. P.59–64.
4. 5. Banichuk N.V., Barsuk A.A. Design of an column with elastic clamping // Struct. Multidisc. Optim. 1995. **9**. P. 254–257.
6. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

OPTIMIZATION OF TENSION RODS BY THE CRITERION OF STABILITY*N.V. Banichuk, E.V. Makeev, A.A. Barsuk*

An optimal design problem is considered of a variable-rigidity cantilever beam by the criterion of stability. The free end of the cantilever beam is loaded in tension by a force applied to it through an attached absolutely rigid rod. The problem solution is sought in a closed analytical form. The bifurcation of the equilibrium form of the optimal beam is shown to take place for a certain ratio of the rigid rod and the cantilever beam lengths. The conditions for the bifurcation occurrence are formulated, the values of optimal characteristics are determined, the asymptotic analysis of optimal solutions is presented.

Keywords: optimization, loss of stability, rods under tension and bending, bifurcations.