# М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.925

## О ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ С ВЫРОЖДЕННОЙ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ. III


***М.В. Долов, С.А. Чистякова***

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

svchistyakova@mail.ru

*Поступила в редакцию 16.09.2010*

Доказывается, что полиномиальное векторное поле четвертой степени с вырожденной бесконечностью имеет не более 9 линейных частных интегралов, в том числе и с комплексными коэффициентами.

*Ключевые слова:* полиномиальные векторные поля, алгебраические дифференциальные уравнения, частные интегралы, инвариантные множества, вырожденная бесконечность.

### Введение

Работа является непосредственным продолжением статей [1] и [2]. Нумерация пунктов и формул сквозная.

Как и в [1], рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),\ \ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \qquad (1.1)$$

где $P$ и $Q$ – взаимно простые полиномы, $\max(\deg P, \deg Q) = n$.

По определению, система (1.1) вырождена на бесконечности, если

$$xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) \equiv 0,$$

где $P_n$ и $Q_n$ – однородные полиномы степени $n$, содержащиеся в $P$ и $Q$, соответственно. $A_n$ – совокупность систем (1.1) с вырожденной бесконечностью.

В настоящей работе (часть III) изучаются системы из $A_4$, такие, что наибольшее число инвариантных множеств

$$\Phi_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j = 0, \qquad (2.1)$$

где $a_j$, $b_j$, $c_j \in \boldsymbol{C}$ и для любых двух множеств $\Phi_s = 0$ и $\Phi_v = 0$ выполнено условие

$$D(\Phi_s, \Phi_v)/D(x, y) = 0, \qquad (2.3)$$

не более двух, и приводится полное доказательство теоремы 1.1 [1].

### 7. Системы из $A_4$ с одним инвариантным множеством, являющимся объединением двух инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3) при отсутствии других инвариантных множеств с условием (2.3)

В этом пункте изучаются системы (1.1), вырожденные на бесконечности при $n = 4$, такие, что среди частных интегралов (2.1) имеются только два полинома, удовлетворяющих условию (2.3).

**Лемма 7.1**. *Пусть система* (*1.1*) *из* $A_4$ *имеет не менее трех инвариантных множеств* (*2.1*), *при этом только два инвариантных множества* (*2.1*) *удовлетворяют условию* (*2.3*). *Тогда линейной невырожденной заменой переменных с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\Big(y(ax^2 + bxy + cy^2) + p_{20}x^2 + p_{11}xy + \\ &\quad + p_{02}y^2 + p_{10}x + p_{01}y + p_{00}\Big) \equiv P, \\ \frac{dy}{dt} &= y(y-\alpha)\Big(ax^2 + bxy + cy^2 + \\ &\quad + q_{10}x + q_{01}y + q_{00}\Big) \equiv Q, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

*где* $|a| + |b| + |c| > 0$, $\alpha \neq 0$, $P$ *и* $Q$ *– взаимно просты и такие, что у* (*7.1*) *нет инвариантных множеств* $y = kx + l$, $y = kx + l_1$, $k \neq 0$, $l \neq l_1$, $k \neq \infty$.

Доказательство аналогично лемме 6.1.

**Лемма 7.2**. *Система* (*7.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx + l$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$ , *тогда и только тогда, когда для всех* $x$

$$\begin{gathered} kx\Big((a+bk+ck^2)kx^3 + (p_{20} + p_{11}k + p_{02}k^2 + \\ +(a+2bk+3ck^2)l)x^2 + \\ +(p_{10}+kp_{01}+lp_{11}+2klp_{02}+(3ck+b)l^2)x + \\ +cl^3 + p_{02}l^2 + p_{01}l + p_{00}\Big) \equiv (kx+l)\times \\ \times(kx+l-\alpha)\Big((a+bk+ck^2)x^2 + \\ +(bl+2ckl+q_{10}+q_{01}k)x + cl^2 + q_{01}l + q_{00}\Big), \end{gathered} \tag{7.2}$$

*при этом* $l(l-\alpha)(cl^2 + q_{01}l + q_{00}) = 0$ , *где* $|c| + |q_{01}| + |q_{00}| > 0$.

**Доказательство**. Тождество (7.2) является следствием подстановки решения $y = kx + l$ в дифференциальное уравнение, соответствующие системе (7.1). Лемма доказана.

Заметим, что при $c = q_{01} = q_{00} = 0$ полиномы $P$ и $Q$ имеют общий множитель $x$.

Из леммы 7.2 следует, что $l$ принимает не более четырех различных значений: $l \in \{0, \alpha\}$ либо является корнем уравнения

$$cl^2 + q_{01}l + q_{00} = 0. \tag{7.3}$$

Полагая в тождестве (7.2) $l = 0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях, можно показать, что справедлива

**Лемма 7.3**. *Система* (*7.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$, *тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$\begin{gathered} k^2(p_{02} - q_{01} + \alpha c) + k(p_{11} - q_{10} + \alpha b) + \\ + p_{20} + \alpha a = 0, \\ k(p_{01} - q_{00} + \alpha q_{01}) + p_{10} + \alpha q_{10} = 0, \\ p_{00} = -\alpha q_{00}. \end{gathered} \tag{7.4}$$

**Лемма 7.4**. *Система* (*7.1*) (*с взаимно простыми* $P$ *и* $Q$) *не имеет частных интегралов* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 7.3, выполнены равенства

$$\begin{gathered} p_{02} = q_{01} - \alpha c,\ \ p_{11} = q_{10} - \alpha b, \\ p_{20} = -\alpha a, \\ p_{01} = -\alpha q_{01} + q_{00},\ \ p_{10} = -\alpha q_{10}, \\ p_{00} = -\alpha q_{00}. \end{gathered}$$

Подставляя эти значения $p_{ij}$ в (7.1), будем иметь

$$\begin{gathered} P = x(y-\alpha)\times \\ \times(ax^2 + bxy + cy^2 + q_{10}x + q_{01}y + q_{00}). \end{gathered}$$

Таким образом, $P$ и $Q$ имеют общий делитель, тождественно не равный постоянной. Противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

**Лемма 7.5**. *Система* (*7.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx + \alpha$, $k \neq 0$, *в том и только том случае, если выполнены равенства*

$$\begin{gathered} k^2(p_{02} - q_{01}) + k(p_{11} - q_{10}) + p_{20} = 0, \\ k(p_{01} + 2p_{02}\alpha - 2q_{01}\alpha - q_{00}) + \\ + p_{10} + p_{11}\alpha - \alpha q_{10} = 0, \\ \alpha^2(p_{02} - q_{01}) + \alpha(p_{01} - q_{00}) + p_{00} = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

**Доказательство**. Полагая в (7.2) $l = \alpha$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях, получим равенства (7.5). Лемма доказана.

**Лемма 7.6**. *Система* (*7.1*) *не допускает частных интегралов* $y = k_1x + \alpha$, $y = k_2x + \alpha$, $y = k_3x + \alpha$, $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

**Доказательство**. Пусть это не так. Тогда по лемме 7.5 $p_{02} = q_{01}$, $p_{11} = q_{10}$, $p_{20} = 0$, $p_{01} = q_{00}$, $p_{10} = 0$, $p_{00} = 0$. Отсюда и из (7.1) имеем

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = xy\times \\ \times\Big(ax^2 + bxy + cy^2 + q_{10}x + q_{01}y + q_{00}\Big) \equiv P. \end{gathered}$$

Таким образом, полиномы $P$ и $Q$ в (7.1) не взаимно просты. Лемма доказана.

**Лемма 7.7**. *Система* (*7.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx + l$, *где* $kl \neq 0$, $l \neq \alpha$, *тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (*7.3*) *и*

$$\begin{gathered} k^2(p_{02} - cl + \alpha c - q_{01}) + \\ + k(p_{11} - q_{10} + \alpha b - bl) + \\ + p_{20} + \alpha a - al = 0, \\ k^2(p_{01} + \alpha q_{01} + 2lp_{02} - \\ - 2l^2c + 3\alpha cl - 2lq_{01}) + k(p_{10} + p_{11}l + \alpha bl - \\ - (2l-\alpha)(bl + q_{10})) - al(l-\alpha) = 0, \\ k(-cl^3 + l^2(p_{02} + 2\alpha c - q_{01}) + \\ + l(p_{01} + \alpha q_{01}) + p_{00}) - \\ - l(l-\alpha)(bl + q_{10}) = 0. \end{gathered} \tag{7.6}$$

**Доказательство**. Равенства (7.6) следуют из тождества (7.2), если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях. Лемма доказана.

**Лемма 7.8**. *Система* (*7.1*) *не имеет частных интегралов* $y = k_1x + l$, $y = k_2x + l$, $y = k_3x + l$, *где*

*$l \neq 0$, $l \neq \alpha$, $l$ – решение уравнения (7.3), $k_j \neq 0$ и попарно различны.*

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 7.7, выполнены равенства

$$p_{02} - q_{01} = c(l-\alpha),\ p_{11} - q_{10} = b(l-\alpha),$$
$$p_{20} = a(l-\alpha),\ p_{01} + \alpha q_{01} -$$
$$-2lq_{01} + 2lp_{02} = cl(2l-3\alpha),$$
$$p_{10} + p_{11}l - (2l-\alpha)q_{10} = 2bl(l-\alpha), \quad (7.7)$$
$$l^2(p_{02} - q_{01}) + l(p_{01} + \alpha q_{01}) +$$
$$+ p_{00} = cl^2(l-2\alpha),$$
$$al(l-\alpha) = 0,\ l(l-\alpha)(bl + q_{10}) = 0.$$

Так как $l \neq 0$, $l \neq \alpha$, то $a = 0$, $q_{10} = -bl$. Согласно первому и четвертому равенствам (7.7), имеем $p_{01} + \alpha q_{01} = -\alpha cl$. Из полученных равенств следует, что $p_{10} = p_{20} = p_{00} = 0$. Поэтому полиномы $P$ и $Q$ имеют общий множитель $y$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 7.9**. *Пусть корни $l$ и $l_1$ уравнения*

$$c\tau^2 + q_{01}\tau + q_{00} = 0 \quad (7.8)$$

*такие, что $ll_1 \neq 0$, $l \neq l_1$ и $l$, $l_1$ отличны от $\alpha \neq 0$. Тогда система (7.1) не имеет частных интегралов вида $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x + \alpha$, $y = k_4x + \alpha$, $y = k_5x + l$, $y = k_6x + l$, $y = k_7x + l_1$, $y = k_8x + l_1$, где $k_j \neq 0$, $j = \overline{1, 8}$, и попарно различны.*

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда, в силу лемм 7.3, 7.5, 7.7, выполнены равенства

$$p_{01} - q_{00} + \alpha q_{01} = 0,$$
$$p_{10} + \alpha q_{10} = 0,\ p_{00} = -\alpha q_{00}, \quad (7.9)$$
$$p_{01} + 2\alpha p_{02} - 2\alpha q_{01} - q_{00} = 0,$$
$$p_{10} + \alpha p_{11} - \alpha q_{10} = 0, \quad (7.10)$$
$$\alpha^2(p_{02} - q_{01}) + \alpha(p_{01} - q_{00}) + p_{00} = 0, \quad (7.11)$$
$$l^2(p_{02} - q_{01}) + l(p_{01} + \alpha q_{01}) +$$
$$+ p_{00} = cl^3 - 2\alpha cl^2, \quad (7.12)$$
$$l(l-\alpha)(bl + q_{10}) = 0, \quad (7.13)$$
$$l_1^2(p_{02} - q_{01}) + l_1(p_{01} + \alpha q_{01}) +$$
$$+ p_{00} = cl_1^3 - 2\alpha cl_1^2, \quad (7.14)$$
$$l_1(l_1-\alpha)(bl_1 + q_{10}) = 0. \quad (7.15)$$

Так как $ll_1 \neq 0$, $l \neq l_1$, $l \neq \alpha$, $l_1 \neq \alpha$, то в силу (7.13), (7.15) имеем $b = q_{10} = 0$. Отсюда и из вторых равенств (7.9) и (7.10) следует $p_{10} = p_{11} = 0$. Из первых равенств (7.9) и (7.10) находим, что $2p_{02} = 3q_{01}$. Используя это равенство и первое уравнение (7.9), из (7.11) получим $p_{00} = \alpha^2 q_{01}/2$. Так как в силу (7.9) $p_{00} = -\alpha q_{00}$, то $\alpha q_{01} = -2q_{00}$. Таким образом, $p_{02} - q_{01} = q_{01}/2 = -q_{00}/\alpha$. Отсюда и из (7.12) имеем

$$l^2 q_{00} - \alpha l q_{00} + \alpha^2 q_{00} + \alpha cl^3 - 2\alpha^2 cl^2 = 0. \quad (7.16)$$

Согласно (7.8), $cl^2 = -q_{01}l - q_{00}$. Так как $q_{01} = -2q_{00}/\alpha$, то $cl^2 = (2l-\alpha)q_{00}/\alpha$. Отсюда и из (7.16) получаем $q_{00}(l-\alpha)^2 = 0$. Поскольку $l \neq \alpha$, то $q_{00} = 0$. При $q_{00} = 0$ уравнение (7.8) имеет решение $\tau = l = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

**Лемма 7.10**. *Пусть уравнение (7.8) имеет корни $l$ и $l_1$, такие, что $ll_1 \neq 0$, $l \neq l_1$ и $l$, $l_1$ отличны от $\alpha \neq 0$. Тогда система (7.1) не имеет частных интегралов вида $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x + \alpha$, $y = k_4x + l$, $y = k_5x + l$, $y = k_6x + l_1$, $y = k_7x + l_1$, где $k_j \neq 0$ и попарно различны.*

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда, в силу лемм 7.3, 7.5, 7.7, выполнены все равенства (7.9)–(7.15) кроме, быть может, (7.10). Из равенств (7.9) и (7.11) при $\alpha \neq 0$ имеем $\alpha(p_{02} - 2q_{01}) = q_{00}$. Отсюда и из первого уравнения (7.9), с учетом условия леммы $cl^2 + q_{01}l + q_{00} = 0$, согласно (7.12), будем иметь

$$(l^2 + 2\alpha l - 3\alpha^2)q_{00} + 2\alpha l(l-\alpha)q_{01} = 0. \quad (7.17)$$

Аналогично из (7.14) находим, что

$$(l_1^2 + 2\alpha l_1 - 3\alpha^2)q_{00} + 2\alpha l_1(l_1-\alpha)q_{01} = 0. \quad (7.18)$$

Рассматривая (7.17) и (7.18) как систему относительно $q_{00}$, $q_{01}$, видим, что определитель этой системы

$$\Delta = 3\alpha^2(l_1 - l)(\alpha^2 - (l + l_1)\alpha + ll_1). \quad (7.19)$$

При $\Delta \neq 0$ значения $q_{00} = q_{01} = 0$. Поэтому уравнение (7.8) имеет решение $l = l_1 = 0$. Так как это невозможно, то $\Delta = 0$. Поскольку $\alpha(l - l_1) \neq 0$, то в силу (7.19) $l = l_1 = \alpha$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

**Лемма 7.11**. *Если выполнены условия леммы 7.10, то система (7.1) не имеет частных интегралов вида $y = k_1x$, $y = k_2x + \alpha$, $y = k_3x + \alpha$, $y = k_4x + l$, $y = k_5x + l$, $y = k_6x + l_1$, $y = k_7x + l_1$, где $k_j \neq 0$ и попарно различны.*

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда выполнены все равенства (7.10)–(7.15) и в силу леммы 7.3 $p_{00} = -\alpha q_{00}$. Согласно первому уравнению (7.10) $p_{01} = q_{00} + 2\alpha q_{01} - 2\alpha p_{02}$. Используя эти равенства, а также соотношения

(7.8), (7.11), (7.12) и (7.14), получим систему уравнений

$$\alpha p_{02} - \alpha q_{01} + q_{00} = 0,$$
$$l(l-2\alpha)p_{02} + \alpha q_{01} l + (2l - 3\alpha) q_{00} = 0,$$
$$l_1(l_1 - 2\alpha)p_{02} + \alpha q_{01} l_1 + (2l_1 - 3\alpha) q_{00} = 0.$$

Рассматривая $p_{02}$, $q_{01}$, $q_{00}$ как искомые величины, найдем определитель этой системы

$$-\Delta_1 = 3\alpha(l_1 - l)(\alpha^2 - (l + l_1)\alpha + ll_1).$$

Далее, повторяя рассуждения значительной части доказательства леммы 7.10, получим противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 7.12**. *Если выполнены условия леммы 7.10, то система* (*7.1*) *не имеет частных интегралов вида* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x + \alpha$, $y = k_4x + \alpha$, $y = k_5x + l$, $y = k_6x + l$, $y = k_7x + l_1$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда выполнены равенства (7.8)–(7.13). Из этих равенств следует, что $q_{10} = -bl$, $p_{10} = \alpha bl$, $p_{11} = -2bl$, $2p_{02} = 3q_{01}$. По условию леммы $cl^2 + q_{01}l + q_{00} = 0$. Отсюда и из равенств (7.9), (7.11), (7.12) получим систему

$$p_{01} + \alpha q_{01} - q_{00} = 0,$$
$$2p_{01} + \alpha q_{01} - 4q_{00} = 0,$$
$$2lp_{01} + l(3l - 2\alpha)q_{01} + 2(l - 3\alpha)q_{00} = 0.$$

Определитель $\Delta$ этой системы равен $-6(\alpha - l)^2$. Так как $\Delta \neq 0$, то $q_{00} = q_{01} = p_{01} = 0$. Отсюда следует, что уравнение (7.8) имеет нулевое решение. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Теорема 7.1**. *Система* (*7.1*) *имеет не более 9 линейных частных интегралов*.

**Доказательство**. Линейные частные интегралы системы (7.1), отличные от $x = 0$, $y = 0$, $y = \alpha$, имеют вид $y = k_jx + l$, где $k_j \neq 0$, $k_j \neq \infty$. По лемме 7.2 $l$ является решением уравнения $l(l-\alpha)(cl^2 + q_{01}l + q_{00}) = 0$, где $|c| + |q_{01}| + |q_{00}| > 0$, величины $k_j$ попарно различны. Согласно леммам 7.4, 7.6, 7.8, состояния покоя (0,0), (0,$\alpha$), (0,$l_1$), (0,$l_2$), где $l_1$, $l_2$ – корни уравнения (7.3), могут принадлежать не более чем двум инвариантным множествам $y = kx + l$, отличным от $x = 0$, $y = 0$, $y = \alpha$.

Если корни уравнения (7.3) различны и отличны от нуля и $\alpha \neq 0$, то в силу лемм 7.4, 7.6, 7.8–7.11 число линейных частных интегралов системы (7.1) не более 9. Если уравнение (7.3) имеет кратный корень, то в силу лемм 7.4, 7.6 и 7.8 число линейных частных интегралов не более 9. Теорема доказана.

## 8. Системы из $A_4$, не имеющие инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3)

Здесь, в отличие от предыдущего, рассматриваются системы (1.1), при $n = 4$ вырожденные на бесконечности и не имеющие частных интегралов (2.1), удовлетворяющих условию (2.3).

**Лемма 8.1**. *Пусть система* (*1.1*) *из* $A_4$ *не имеет частных интегралов* (*2.1*), *удовлетворяющих условию* (*2.3*), *и допускает хотя бы два инвариантных множества* (*2.1*). *Тогда линейной невырожденной заменой с точностью до обозначений система* (*1.1*) *приводится к виду*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\big(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + p_{20}x^2 + \\ &\quad + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{10}x + p_{01}y + p_{00}\big) \equiv P,\\ \frac{dy}{dt} &= y\,(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + q_{20}x^2 + \\ &\quad + q_{11}xy + q_{02}y^2 + q_{10}x + q_{01}y + q_{00}\big) \equiv Q,\end{aligned} \qquad (8.1)$$

*где* $|a| + |b| + |c| + |d| > 0$, $P$ *и* $Q$ – *взаимно просты, при этом* (*8.1*) *не допускает частных интегралов* $y = kx + l$, $y = kx + l_1$, $l \neq l_1$, *конечное* $k \neq 0$.

Применяя к системе (8.1) тождество (2.2), можно показать, что справедлива

**Лемма 8.2**. *Система* (*8.1*) *имеет частный интеграл* $y = kx + l$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$, *тогда и только тогда, когда для всех* $x$

$$\begin{aligned} kx\big(&Ax^3 + (B + p_{20} + p_{11}k + p_{02}k^2)x^2 + \\ &+ (lp_{11} + 2klp_{02} + p_{10} + kp_{01} + C)x + \\ &+ dl^3 + p_{02}l^2 + p_{01}l + p_{00}\big) \equiv (kx + l) \times \\ &\times \big(Ax^3 + (B + q_{20} + q_{11}k + q_{02}k^2)x^2 + \\ &+ (lq_{11} + 2klq_{02} + q_{10} + kq_{01} + C)x + \\ &+ dl^3 + q_{02}l^2 + q_{01}l + q_{00}\big), \end{aligned} \qquad (8.2)$$

*где*

$$\begin{aligned} A &= a + bk + ck^2 + dk^3,\\ B &= bl + 2ckl + 3dlk^2,\\ C &= cl^2 + 3kl^2d, \end{aligned} \qquad (8.3)$$

*при этом* $l$ *является решением уравнения*

$$l\,(dl^3 + q_{02}l^2 + q_{01}l + q_{00}) = 0. \qquad (8.4)$$

Полагая в тождестве (8.2) $l = 0$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях полученного тождества, можно показать, что справедлива

**Лемма 8.3**. *Система* (*8.1*) *имеет инвариантное множество* $y = kx$, *где конечное* $k \neq 0$, *тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$k^2(p_{02}-q_{02})+k(p_{11}-q_{11})+p_{20}-q_{20}=0,$$
$$k(p_{01}-q_{01})+p_{10}-q_{10}=0,\ p_{00}=q_{00}. \qquad (8.5)$$

Методом от противного с использованием леммы 8.3 устанавливается

**Лемма 8.4**. *Система* (*8.1*) *не допускает частных интегралов* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, *где конечные* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

Если в правой и левой частях тождества (8.2) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $x$, то можно доказать, что имеет место

**Лемма 8.5**. *Система* (*8.1*) *имеет инвариантное множество* $y = kx + l$, *где конечное* $k \neq 0$, $l$ *– корень уравнения*

$$dl^3+q_{02}l^2+q_{01}l+q_{00}=0, \qquad (8.6)$$

*тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$\begin{gathered} k^3(p_{02}-q_{02}-ld)+k^2(p_{11}-q_{11}-cl)+ \\ +k(p_{20}-q_{20}-bl)-al=0, \\ k^2(3dl^2+3q_{02}l-2p_{02}l+q_{01}-p_{01})+ \\ +k(2cl^2+2q_{11}l-p_{11}l+q_{10}-p_{10})+ \\ +l(bl+q_{20})=0, \\ k\left(p_{02}l^2+(p_{01}+q_{01})l+p_{00}+2q_{00}\right)- \\ -l(cl^2+q_{11}l+q_{10})=0. \end{gathered} \qquad (8.7)$$

**Лемма 8.6**. *Состояние покоя* $(0, l)$, *где* $l \neq 0$ *– корень уравнения* (*8.6*), *не может принадлежать инвариантным множествам* $y = k_1x + l$, $y = k_2x + l$, $y = k_3x + l$, $y = k_4x + l$, *где конечные* $k_j \neq 0$ *попарно различны*.

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда в силу леммы 8.5 с учетом (8.7) имеем

$$p_{02}-q_{02}-ld=0, \qquad (8.8)$$
$$p_{11}-q_{11}-cl=0, \qquad (8.9)$$
$$p_{20}-q_{20}-bl=0, \qquad (8.10)$$
$$a=0,$$
$$2lp_{02}-3lq_{02}-3dl^2+p_{01}-q_{01}=0, \qquad (8.11)$$
$$q_{10}-p_{10}-p_{11}l+2q_{11}l+2cl^2=0, \qquad (8.12)$$
$$q_{20}+bl=0, \qquad (8.13)$$
$$p_{02}l^2+l(p_{01}+q_{01})+p_{00}+2q_{00}=0, \qquad (8.14)$$
$$cl^2+q_{11}l+q_{10}=0. \qquad (8.15)$$

Из уравнений (8.10) и (8.13) находим, что $p_{20} = 0$. Согласно (8.12) и (8.15), получим равенство $p_{10}+q_{10}+p_{11}l=0$. Отсюда и из (8.9), (8.15) следует, что $p_{10} = 0$. Из (8.14) с учетом (8.8) и (8.6) имеем

$$-p_{00}=p_{02}l^2+2q_{00}+l(p_{01}+q_{01})=$$
$$=l^2(q_{02}+ld)+lq_{01}+2q_{00}+lpa=lp_{01}+q_{00}.$$

Из равенств (8.11) и (8.6) следует, что $2l^2p_{02}+p_{01}l+2q_{01}l+3q_{00}=0$. Отсюда и из предыдущего равенства с учетом (8.6) находим

$$p_{00}=2(q_{00}+q_{01}l+l^2(q_{02}+ld))=0.$$

При $a = p_{20} = p_{10} = p_{00} = 0$ полиномы $P$ и $Q$ в (8.1) имеют общий делитель $y$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 8.7**. *Пусть уравнение* (*8.6*) *имеет три различных корня* $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_j \neq 0$, *тогда не существует систем* (*8.1*), *допускающих частные интегралы* $y = k_1x$, $y = k_2x + l_1$, $y = k_3x + l_1$, $y = k_4x + l_2$, $y = k_5x + l_2$, $y = k_6x + l_3$, $y = k_7x + l_3$, *где* $k_j \neq 0$ *и попарно различны*.

**Доказательство**. Пусть это не так. Тогда, в силу леммы 8.3, $q_{00} = p_{00}$ и, согласно лемме 8.5, имеем

$$cl_j^2+q_{11}l_j+q_{10}=0,$$
$$p_{02}l_j^2+l_j(p_{01}+q_{01})+p_{00}+2q_{00}=0 \qquad (8.16)$$

для $j = 1, 2, 3$. Поскольку $l_j$ попарно различны, то

$$c=q_{11}=q_{10}=p_{02}=$$
$$=p_{01}+q_{01}=p_{00}+2q_{00}=0. \qquad (8.17)$$

Из равенств $p_{00}+2q_{00}=0$ и $p_{00} = q_{00}$ вытекает, что $q_{00} = 0$. Поэтому среди величин $l_j$, удовлетворяющих уравнению (8.6), есть хотя бы одна нулевая. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 8.8**. *Система* (*8.1*) *не может иметь частных интегралов* $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_1$, $y = k_3x + l_1$, $y = k_4x + l_2$, $y = k_5x + l_2$, $y = k_6x + l_2$, $y = k_7x + l_3$, $y = k_8x + l_3$, $y = k_9x + l_3$, *где конечные* $k_j \neq 0$ *попарно различны*; $l_1$, $l_2$, $l_3$ *– попарно различны и* $l_j \neq 0$.

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда выполнены соотношения (8.16), (8.17) и (8.11)–(8.13) при $l = l_j$, $j = 1, 2, 3$. Поэтому $d = 0$. При $d = 0$ уравнение (8.6) имеет попарно различные корни только при $q_{02}=q_{01}=q_{00}=0$. При таких значения коэффициентов $P$ и $Q$ в (8.1) имеют общий множитель $x$. Противоречие доказывает лемму.

**Лемма 8.9**. *Пусть* $l_1$, $l_2$, $l_3$ *– попарно различные корни уравнения* (*8.6*), $l_j \neq 0$, *тогда система (8.1) не имеет частных интегралов вида* $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_1$, $y = k_3x + l_1$, $y = k_4x + l_2$, $y = k_5x + l_2$, $y = k_6x + l_2$, $y = k_7x + l_3$, $y = k_8x + l_3$, *где конечные* $k_j \neq 0$ *попарно различны*.

**Доказательство**. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 8.5, имеют место равенства (8.11)–(8.13) для $l = l_1$ и $l = l_2$, а (8.14), (8.15) для $l = l_1$, $l = l_2$ и $l = l_3$. Следовательно, выполнены равенства (8.17). Из уравнения (8.11) с учетом

(8.17) имеем $3l_j q_{02} + 3dl_j^2 + 2q_{01} = 0$. Отсюда и из (8.6) вытекает, что $q_{01}l_j = 3q_{00}$ для $j$ = 1, 2. Поэтому $q_{00} = q_{01} = 0$ и уравнение (8.6) имеет нулевое решение $l_j$, либо $d = q_{02} = q_{01} = q_{00} = 0$, что невозможно, ибо $P$ и $Q$ имеют общий множитель, отличный от тождественной постоянной. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Теорема 8.1**. *Если полиномы $P$ и $Q$ взаимно просты и система* (*8.1*) *не допускает линейных частных интегралов с условием* (*2.3*), *то у этой системы число линейных частных интегралов не более 9*.

**Доказательство**. Так как у системы (8.1) нет частных интегралов, удовлетворяющих условию (2.3), то всякий линейный частный интеграл, отличный от $x = 0$, $y = 0$, имеет вид $y = k_j x + l_s$, где конечные $k_j \neq 0$ и попарно различны. По лемме 8.2 $l_s$ является решением уравнения (8.4), при этом среди коэффициентов в (8.4) есть ненулевые, ибо $P$ и $Q$ взаимно просты. Таким образом, $l_s \in \{0, l_1, l_2, l_3\}$, где $l_1$, $l_2$, $l_3$ – решения уравнения (8.6). Если $l_j \neq 0$ попарно различны, то, в силу лемм 8.4, 8.6–8.9, число линейных частных интегралов системы (8.1) не более 9.

Пусть среди величин $l_j$ есть либо равные, либо хотя бы одно $l_j = 0$. Тогда с точностью до обозначений могут быть случаи: а) $l_3 = 0$, $l_1 \neq l_2$, $l_1 l_2 \neq 0$; б) $l_3 = 0$, $l_1 = l_2 \neq 0$; в) $l_3 = l_2 = 0$, $l_1 \neq 0$; г) $l_1 = l_2 = l_3 = 0$; д) $l_j \neq 0$, $l_1 = l_2 \neq 0$, $l_3 \neq l_1$; е) $l_1 = l_2 = l_3 \neq 0$.

Пусть реализуется случай а). Покажем, что система (8.1) не допускает частных интегралов $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_1$, $y = k_3x + l_1$, $y = k_4x + l_2$, $y = k_5x + l_2$, $y = k_6x + l_2$, $y = k_7x$, $y = k_8x$, где конечные $k_j \neq 0$ попарно различны. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 8.3, имеем $p_{01} = q_{01}$, $p_{10} = q_{10}$, $p_{00} = q_{00}$. Согласно лемме 8.5, выполнены равенства (8.11)–(8.15) при $l = l_1$ и $l = l_2$. Отсюда и из условия а) $l_3 = 0$, $l_1 \neq l_2$, $l_1 l_2 \neq 0$, согласно (8.11), следует, что $d = 0$, $q_{00} = 0$. Поэтому уравнение (8.6) имеет вид $q_{02}l^2 + q_{01}l = 0$, где $|q_{02}| + |q_{01}| > 0$, так как $P$ и $Q$ взаимно просты. Таким образом, в случае а) система (8.1) не допускает линейных частных интегралов указанного вида.

В случаях б), в) и е), согласно леммам 8.4 и 8.6, число различных линейных частных интегралов системы (8.1) не более 7.

Если реализуется случай г), то, в силу леммы 8.4, число линейных частных интегралов системы (8.1) не более 4.

Пусть реализуется случай д) $l_j \neq 0$, $j = 1, 3$, $l_1 = l_2 \neq 0$, $l_3 \neq l_1$. Покажем, что система (8.1) не может допускать частных интегралов вида $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_1$, $y = k_3x + l_1$, $y = k_4x + l_3$, $y = k_5x + l_3$, $y = k_6x + l_3$, $y = k_7x$, $y = k_8x$, где конечные $k_j \neq 0$ попарно различны. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 8.3, $p_{01} = q_{01}$, $p_{10} = q_{10}$, $p_{00} = q_{00}$ и, согласно лемме 8.5, имеют место соотношения (8.11)–(8.15) при $l = l_1$ и $l = l_3$, где $l_1 \neq l_3$. Так как $l_1 \neq l_3$, $l_1 l_3 \neq 0$, то с учетом равенств $p_{01} = q_{01}$, $p_{10} = q_{10}$, $p_{00} = q_{00}$, согласно (8.11)–(8.15), имеем

$$
\begin{aligned}
&(2p_{02} - 3q_{02} - 3dl_j)l_j = 0,\\
&(3cl_j + 2q_{11} - p_{11})l_j = 0,\\
&bl_j + q_{20} = 0, \qquad\qquad (8.18)\\
&p_{02}l_j^2 + 2l_j q_{01} + 3q_{00} = 0,\\
&cl_j^2 + q_{11}l_j + q_{10} = 0,\ \ j = 1, 3.
\end{aligned}
$$

При $l_1 \neq l_3$, $l_1 l_3 \neq 0$ из первого уравнения (8.18) находим $d = 0$, $2p_{02} = 3q_{02}$. Отсюда и из четвертого уравнения (8.18) имеем $3q_{02}l_j^2 + 4q_{01}l_j + 6q_{00} = 0$ при $j$ = 1, 3. Отсюда с учетом (8.6) при $d = 0$ следует, что $q_{01}l_j + 3q_{00} = 0$ для $j$ = 1,3. Поэтому $q_{01} = q_{00} = 0$. Для $d = q_{01} = q_{00} = 0$ и взаимно простых $P$ и $Q$ корни уравнения (8.6) не удовлетворяют условиям изучаемого случая д). Таким образом, в случае д) система (8.1) не допускает восьми линейных частных интегралов указанного вида. Теорема доказана.

## 9. Доказательство теоремы 1.1 [1]

Рассмотрим систему (1.1) с взаимно простыми полиномами $P$ и $Q$, $\max(\deg P, \deg Q) = 4$. Заметим, что максимальное число инвариантных множеств, входящих в объединение $L$ инвариантных множеств (2.1), таких, что для любых двух множеств (2.1) из $L$ выполнено условие (2.3), равно 4.

Пусть система (1.1) имеет такое инвариантное множество и вырождена на бесконечности. Тогда по теореме 2.2 [1] у этой системы нет других инвариантных множеств (2.1) с условием (2.3). По теореме 3.1 [1] число линейных частных интегралов такой системы (1.1) из $A_4$ не более 9.

Пусть система (1.1) не имеет четырех инвариантных множеств (2.1), любые два из которых удовлетворяют условию (2.3), но имеет хотя бы одно объединение инвариантных множеств (2.1), содержащих три множества (2.1), любые два из которых удовлетворяют условию (2.3). Тогда, по лемме 4.1 [2], такое объединение одно. Согласно теоремам 4.1 [2] и 5.1 [2] число линейных частных интегралов системы (1.1) в этом случае не более 9.

Пусть система (1.1) из $A_4$ не имеет трех инвариантных множеств (2.1), любые два из которых удовлетворяют условию (2.3), и допускает хотя бы одно объединение инвариантных множеств (2.1), содержащее два инвариантных множества (2.1), удовлетворяющих условию (2.3). Тогда, согласно теоремам 6.1 [2] и 7.1, число линейных частных интегралов системы (1.1) в этом случае не более 9.

Если у системы (1.1) из $A_4$ нет инвариантных множеств (2.1), удовлетворяющих условию (2.3), то, по теореме 8.1, у такой системы число линейных частных интегралов не более 9. Теорема доказана.

***Работа поддержана грантом НК-13П-13.***

*Список литературы*

1. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. I // Вестник ННГУ. 2010. № 6. С. 132–137.

2. Долов М.В., Чистякова С.А. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II // Вестник ННГУ. В печати.

**ON LINEAR PARTICULAR INTEGRALS OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS OF FOURTH DEGREE WITH DEGENERATE INFINITY. III**

***M.V. Dolov, S.A. Chistyakova***

It is proved that a polynomial vector field of fourth degree with degenerate infinity has no more than nine linear particular integrals, including those with complex coefficients.

*Keywords*: polynomial vector fields, algebraic differential equations, particular integrals, invariant sets, degenerate infinity.