УДК 517.58

ОБОБЩЁННОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙРИ

Т.М. Митрякова, М.А. Солдатов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

tatiana.mitryakova@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.10.2010

Для обобщённого уравнения Эйри отыскиваются фундаментальные системы решений в форме интегралов Лапласа и в форме степенных рядов, находятся характеристики роста решений.

Ключевые слова: фундаментальные системы, определители Вронского и Вандермонда, интеграл Лапласа, степенные ряды, целые функции, порядок и тип роста.

1. Решения в форме интегралов Лапласа

Обобщённым уравнением Эйри называем дифференциальное уравнение

$$w^{(n)}(z) - zw(z) = 0, \qquad (1.1)$$

где z – комплексное переменное, $n \geq 2$. Всякое его нетривиальное решение $w(z)$ является целой трансцендентной функцией. При $n = 2$ это есть уравнение Эйри.

Используя интеграл Лапласа по произвольным путям интегрирования S, обычным образом (см., например, [1]) найдём, что уравнение (1.1) имеет решения

$$A_{k,n}(z) \equiv A_k(z) = \int_{L_k} \exp\left(-t^{n+1}/(n+1)\right) e^{zt}\, dt$$

$$\left(k = 1,2,\ldots,n\right), \qquad (1.2)$$

где $L_k = l_k^- + l_{k-1}$ и $l_\nu = \left\{ t : t = |t| e^{i\varphi_\nu}, \ \varphi_\nu = \dfrac{2\pi\nu}{n+1}, 0 \leq |t| < \infty \right\}$ – луч $\arg t = \varphi_\nu$, исходящий из начала $\left(\nu = 0, 1,\ldots,n\right)$; l_ν^- – тот же луч, но идущий из бесконечности в точку $t = 0$. При $t \in L_k$ функция $\gamma(t) = \exp\left(-\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right)$ будет: $\gamma(t) = \exp\left(-\dfrac{|t|^{n+1}}{n+1}\right)$, так что интегралы (1.2) сходятся для любых z (равномерно на любом компакте) и определяют целые функции. Произведём замену переменной интегрирования: $t = \xi e^{i\varphi_{k-1}}$. Поскольку $t \in L_k$, то $\xi \in L_1$. Получим

$$A_k(z) = e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n+1}} A_1\left(z e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n+1}} \right). \qquad (1.3)$$

Числа $\lambda_\nu = \exp\{i2\pi\nu/(n+1)\}$ $(\nu = 0,1,\ldots,n)$ суть все значения $\sqrt[n+1]{1}$. Каждая из функций (1.2) отлична от тождественного нуля и, более того, растёт при $z \to \infty$ быстрее любой целой функции экспоненциального типа (э.т.). Это следует из общих свойств интегралов Лапласа (см. [1]): раствор угла с границей L_k меньше π и внутри его существует направление, по которому функция $\gamma(t)$ растёт быстрее любой целой функции э.т., именно, при $\arg t = \left(\varphi_{k-1} + \varphi_k\right)/2$ будет

$$\gamma(t) = \exp\left(|t|^{n+1} / (n+1)\right).$$

Решением уравнения (1.1) является также функция $A_{n+1}(z)$, получаемая из интегралов (1.2) при $k = n+1$. Однако она просто выражается через решения (1.2): $A_1(z) + \ldots + A_n(z) + A_{n+1}(z) \equiv 0$.

Докажем, что n решений (1.2) линейно независимы. Для этого покажем, что их определитель Вронского $\Delta(z)$ (он постоянен), вычисленный в точке $z = 0$, отличен от нуля. Непосредственное дифференцирование интегралов (1.2) с учётом (1.3) приводит при $z = 0$ к результату

$$A_k^{(s)}(0) = \left(\exp\left(i\lambda_{k-1}\right)\right)^{s+1} A_1^{(s)}(0), \qquad (1.4)$$

$$A_1^{(s)}(0) = \int_{L_1} \exp\left(-t^{n+1}/(n+1)\right) t^s\, dt \ (s = 0,1,\ldots,n-1).$$

Поэтому

$$\Delta(0) = A_1(0)A_1'(0)\dots A_1^{(n-1)}(0)D(\lambda_1,\dots,\lambda_n),$$

где $D(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – определитель Вандермонда с элементами $\lambda_\nu = \lambda_1^\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, n; \lambda_1 = = \exp(2\pi i/(n+1)))$, он отличен от нуля, поскольку все элементы $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ различны. Интеграл $A_1(z)$ представим в виде суммы двух интегралов: по лучам l_1^- и l_0; для $t \in l_1$ имеем $t = \xi\lambda_1$, где $\xi \in l_0$, именно $0 \le \xi < +\infty$. После этого найдём

$$A_1^{(s)}(0) = \left(1+\lambda_1^{s+1}\right)\int_0^{+\infty}\exp\left(-\xi^{n+1}/(n+1)\right)\xi^s\,d\xi, \quad (1.5)$$

откуда $A_1^{(s)}(0) \ne 0$, так как $1+\lambda_1^{s+1} \ne 0$ $(s = 0, 1, \dots, n-1)$. Итак, $\Delta(0) \ne 0$, что и доказывает фундаментальность системы решений (1.2).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Решения* (*1.2*) *уравнения* (*1.1*)

1) *растут при* $z \to \infty$ *быстрее любой целой функции экспоненциального типа;*

2) *образуют фундаментальную систему решений.*

Замечание 1.1. Решением уравнения (1.1) с $n = 2$ является, в частности, функция $Ai(z) = A_{2,2}(z)/2\pi i$ – это функция Эйри (Airy) первого рода.

Функция Эйри первого рода при вещественных значениях $z = x$ имеет представления

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\exp\left(-\frac{t^3}{3}+zt\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\left(\frac{u^3}{3}+zu\right)\right)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3}+zu\right)du. \quad (1.6)$$

Первое из них получается формально, если путь интегрирования L_2 заменить мнимой осью. Чтобы убедиться в законности этого, достаточно доказать равенство

$$J_1 \equiv \int_{N_1}\exp\left(-\frac{t^3}{3}+xt\right)dt =$$

$$= \int_{N_2}\exp\left(-\frac{t^3}{3}+xt\right)dt \equiv J_2, \quad (1.7)$$

где $N_1 = \{t = re^{i2\pi/3}\}, N_2 = \{t = re^{i\pi/2}\}$, $0 \le r < \infty$. Для этого рассматривается равный нулю интеграл от подынтегральной в (1.7) функции по замкнутому контуру Γ_R, состоящему из отрезков $N_{1,R} = [0, \mathrm{R}e^{i2\pi/3}]$, $N_{2,R} = [0, \mathrm{R}e^{i\pi/2}]$ и дуги окружности $C_R = \left\{t = \mathrm{R}e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}\right\}$. Отсюда при $R \to \infty$ и получим равенство (1.7), предварительно убедившись, что интеграл по дуге C_R ведёт себя как $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ – для этого используется неравенство Жордана $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (см., например, [2, с.75]). Укажем другой способ, не требующий при оценке интеграла по C_R применения этого неравенства. Именно, в интегралах (1.7) заменим x на $x+iy$; полученные интегралы обозначим $J_1(y)$ и $J_2(y)$. Они равномерно сходятся при $y \ge 0$ по признаку Абеля и тогда определяют непрерывные функции, так что $J_1 = \lim_{y\to+0} J_1(y)$, $J_2 = \lim_{y\to+0} J_2(y)$. А равенство $J_1(y) = J_2(y)$ при $y > 0$ будет следовать из того, что

$$\left|\int_{C_R} e^{-\frac{t^3}{3}+(x+iy)t}dt\right| \le \mathrm{R}e^{-Ry\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\pi}{6} \to 0, \quad R \to \infty.$$

2. Решения в форме степенных рядов. Рост решений

Сначала рассмотрим уравнение Эйри: $n = 2$ в (1.1). Отыскивая решения в форме степенных рядов с неопределёнными коэффициентами c_n:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (2.1)$$

можно найти следующие решения ([3, с. 205])

$$w_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{3n}\left(\prod_{k=1}^{n}(3k-1)3k\right)^{-1},$$

$$w_2(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} z^{3n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}3k(3k+1)\right)^{-1} \quad (2.2)$$

с начальными условиями $w_1(0) = 1, w_1'(0) = 0$ и $w_2(0) = 0, w_2'(0) = 1$.

Найдём их характеристики роста: порядок ρ и тип σ – по формулам

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\ln n \Big/ \ln\frac{1}{|c_n|},$$

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}\,. \tag{2.3}$$

При отыскании этих пределов применим правила

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}, \tag{2.4}$$

справедливые при выполнении соответствующих условий (первое из этих равенств выражает теорему Штольца).

Непосредственные вычисления приводят к результату: функции (2.2) имеют порядок роста $\rho = 3/2$ и тип $\sigma = 2/3$. Учитывая структуру рядов (2.2) (в них нет членов с одинаковыми степенями z), заключаем, что любая функция Эйри

$$w(z) = C_1 w_1(z) + C_2 w_2(z),$$
$$|C_1| + |C_2| \ne 0, \tag{2.5}$$

имеет порядок $\rho = 3/2$ и тип $\sigma = 2/3$. Это согласуется с асимптотикой функций Эйри первого и второго рода (см. [4, с. 175])

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), |\arg z| < \pi,$$

$$Bi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{z}}\exp\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), |\arg z| < \frac{\pi}{3};\ z\to\infty.$$

Замечание 2.1. Укажем связь функции $Ai(z)$ с решениями (2.2). Записав $Ai(z) = w(z)$ в виде (2.5) и сравнив начальные условия Коши в точке $z = 0$, найдём $C_1 = Ai(0),\ C_2 = Ai'(0)$ – эти значения можно найти, например, из (1.4), (1.5) с $n = 2$ – и получим ([3, с. 205])

$$Ai(z) = \left(3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)^{-1} w_1(z) - \left(3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-1} w_2(z),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим уравнение (1.1) ещё при $n = 3$. Отыскивая его решения в форме (2.1), для определения коэффициентов c_n получим систему рекуррентных уравнений

$$(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} - c_{n-1} = 0,$$
$$n = 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

а $c_3 = 0$ – отсюда следует, что $c_{3+4k} = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Из (2.6) найдём

$$c_{4n+\lambda} = c_\lambda\left(\prod_{k=1}^{n}(4k-2+\lambda)(4k-1+\lambda)(4k+\lambda)\right)^{-1},$$
$$\lambda = 0,\ 1,\ 2. \tag{2.7}$$

Коэффициенты c_0, c_1, c_2 играют роль произвольных постоянных. Полагая поочерёдно один из них равным 1, а двух других – нулю, получим три решения

$$w_\nu(z) = \frac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} z^{4n+\nu-1}\left(\prod_{k=1}^{n}(4k+\nu-3)(4k+\nu-2)(4k+\nu-1)\right)^{-1},$$
$$\nu = 1, 2, 3, \tag{2.8}$$

с начальными данными $w_\nu^{(s-1)}(0) = \delta_{\nu,s}$; $\delta_{\nu,\nu} = 1$, $\delta_{\nu,s} = 0$ при $\nu \ne s$; $s = 1, 2, 3$. По тем же формулам (2.3), используя правила (2.4), найдём порядок и тип функций (2.8): $\rho = 4/3$, $\sigma = 3/4$. В силу структуры коэффициентов рядов (2.8) ясно, что и любое ненулевое решение $w(z) = C_1 w_1(z) + C_2 w_2(z) + C_3 w_3(z)$ уравнения (1.1) с $n = 3$ имеет порядок $4/3$ и тип $3/4$.

Произведя аналогичные выкладки (они весьма громоздкие), найдём, что уравнение (1.1) при произвольном $n \ge 2$ имеет следующую фундаментальную систему

$$w_\nu(z) = \frac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{(n+1)s+\nu-1}\, z^{(n+1)s+\nu-1}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{c_{(n+1)s+\nu-1}} = \prod_{k=1}^{s}\big[(n+1)k+\nu-n\big]\big[(n+1)k+\nu-n+1\big]\ldots$$
$$\ldots\big[(n+1)k+\nu-2\big]\big[(n+1)k+\nu-1\big].$$

Линейная независимость решений (2.9) следует из того, что их определитель Вронского в точке $z = 0$ отличен от нуля (он равен единице), или прямо из асимптотики этих решений при $z \to 0$, именно: $w_\nu(z) \sim \dfrac{z^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$.

Обычным образом, с помощью (2.4), можно найти, что все решения (2.9) (и тогда всякое ненулевое решение уравнения (1.1)) имеют порядок роста $\rho = (n+1)/n$ и тип $\sigma = n/(n+1)$.

Полученный результат можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. 1) *Уравнение* (*1.1*) *при произвольном* $n \ge 2$ *имеет фундаментальную систему решений в форме степенных рядов* (*2.9*).

2) *Функции* (*2.9*) *и любое нетривиальное решение уравнения* (*1.1*) *имеют порядок роста* $\rho = (n+1)/n$ *и тип* $\sigma = n/(n+1)$.

Отметим, что решения (1.2) рассматривались в [5, с.70]. Представляет интерес найти их асимптотическое поведение при $z \to \infty$ по разным направлениям и связь с решениями (2.9).

Работа подготовлена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13 П-13).

Список литературы

1. Солдатов М.А. О свойствах решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Сибир. матем. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 669–679.
2. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 478 с.
4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.-Л.: Физматгиз, 1963. 359 с.
5. Солдатов М.А., Митрякова Т.М. Обобщение функций Эйри // Тезисы докладов Международ. конф. по компл. анализу и смеж. вопр., посв. памяти А.Ф. Леонтьева. Н. Новгород, 1997. С. 70.

GENERALIZED AIRY EQUATION

T.M. Mitryakova, M.A. Soldatov

For the «generalized Airy equation» (1.1), the fundamental systems of solutions are obtained in the form of Laplace’s integrals and in the form of power series. The characteristics of solution growth are found.

Keywords: fundamental systems, Wronskian and Vandermonde determinants, Laplace's integral, power series, entire functions, order and type of growth.