УДК 517.95:517.97

О ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С РАЗНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СУММИРУЕМОСТИ ПО РАЗНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В.С. Гаврилов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vladimir.s.gavrilov@gmail.com

Поступила в редакцию 21.10.2010

Доказываются теоремы вложения для функций из пространств Соболева со смешанными показателями суммируемости.

Ключевые слова: теоремы вложения, пространства Соболева.

В настоящей работе доказывается несколько теорем вложения для функций из пространств Соболева специального вида. Необходимость в таких теоремах возникает при изучении вопросов теории оптимального управления начально-краевыми задачами для гиперболических уравнений дивергентного вида со смешанным краевым условием. К подобным начально-краевым задачам относится, например, задача

$$z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)z_{x_j} + a_i(x,t)z) +$$

$$+ a(x,t,z(x,t)) + b_i(x,t)z_{x_i} + c(x,t)z_t = 0,$$

$$(x,t) \in Q_T;$$

$$z(x,0) = \varphi(x),\ z_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \Omega;$$

$$z(s,t) = 0,\ (s,t) \in S_T^0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial N} + \varsigma(s,t)z = f(s,t),\ (s,t) \in S_T^1.$$

Здесь $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $S = S^0 \cup S^1$, $S_T^i \equiv S^i \times (0,T)$, $i = 0, 1$, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, S^0 и S^1 – непересекающиеся измеримые части поверхности S, имеющие положительные поверхностные меры, $\frac{\partial z}{\partial N} \equiv$ $\equiv (a_{ij}(x,t)z_{xi} + a_i(x,t)z)\cos\alpha_i$, $\alpha_i(x,t)$ – угол между внешней нормалью к S_T^1 и осью Ox_i.

При изучении условий существования и единственности решения сформулированной задачи в энергетическом классе требуется исследовать свойства заданных на S_T^1 функций из пространств Соболева, таких, что и сами функции и их производные по переменной t принадлежат пространству Лебега со смешанными показателями суммируемости. Кроме того, оказывается необходимым исследование свойств функций, определённых на Q_T и принадлежащих подобному пространству.

Заметим, что пространствам Соболева посвящено огромное количество работ (см., например, работы [1–6] и библиографии к ним), в том числе и так называемым анизотропным пространствам Соболева, то есть пространствам Соболева, состоящим из функций, обладающих разными свойствами по разным переменным.

Однако слово «анизотропный» в известных автору работах, посвящённых пространствам Соболева, понимается либо как наличие по разным переменным производных разных порядков, либо как принадлежность функции и её производных разным пространствам L_p (например, сама функция принадлежит L_2, а какая-либо её производная – L_3).

При этом случай, когда как функция, так и её производные принадлежат пространству Лебега со смешанной нормой, насколько нам известно, ранее не рассматривался. Однако при получении теорем существования и единственности решений начально-краевых задач для гиперболических уравнений при возможно более слабых условиях на коэффициенты возникает потребность в теоремах вложения для пространств Соболева функций из пространства Лебега со смешанной нормой.

Далее в статье формулируется и доказывается ряд таких теорем.

Под $L_{2,1}(S_T^1)$ понимается банахово пространство измеримых по Лебегу на S_T^1 функций ξ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{2,1,S_T^1} \equiv \int_0^T \left(\int_{S^1} |\xi(s,t)|^2 ds \right)^{1/2} dt;$$

а под $L_{\infty,1}(S_T^1)$ – банахово пространство измеримых по Лебегу на S_T^1 функций ξ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{\infty,1,S_T^1} \equiv \int_0^T vrai\sup_{s\in S^1}|\xi(s,t)|dt.$$

Следуя [7], через $L_{\infty,1}(Q_T)$ обозначим банахово пространство измеримых по Лебегу на Q_T функций ξ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{\infty,1,Q_T} \equiv \int_0^T vrai\sup_{x\in\Omega}|\xi(x,t)|dt.$$

Обозначим через $W_{2,1}^{0,1}(S_T^1)$ банахово пространство измеримых по Лебегу функций $\xi: S_T^1 \to R$, таких, что $\xi, \xi_t \in L_{2,1}(S_T^1)$. Норму в этом пространстве зададим формулой

$$\|\xi\|_{2,1,S_T^1}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{2,1,S_T^1} + \|\xi_t\|_{2,1,S_T^1}.$$

Пусть $W_{\infty,1}^{0,1}(S_T^1)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на S_T^1 функций $\xi\in L_{\infty,1}(S_T^1)$, для которых $\xi_t \in L_{\infty,1}(S_T^1)$. Норму в этом пространстве определим соотношением

$$\|\xi\|_{\infty,1,S_T^1}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{\infty,1,S_T^1} + \|\xi_t\|_{\infty,1,S_T^1}.$$

Через $L_p(\Pi)$, где $\Pi \subset R^m$, обозначено банахово пространство суммируемых с p-й степенью (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций $\xi: \Pi \to R$, с нормой

$$\|\xi\|_{p,\Pi} \equiv \left(\int_\Pi |\xi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|\xi\|_{\infty,\Pi} \equiv vrai\sup_{x\in\Pi}|\xi(x)|, \qquad p = \infty.$$

Через $W_1^1[0,T]$ обозначено банахово пространство измеримых по Лебегу на $[0,T]$ функций ξ, таких, что $\xi, \xi' \in L_1[0,T]$. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|\xi\|_{1,[0,T]}^{(1)} \equiv \|\xi\|_{1,[0,T]} + \|\xi'\|_{1,[0,T]}.$$

Наконец, через $W_{\infty,1}^{0,1}(Q_T)$ обозначим банахово пространство измеримых по Лебегу на Q_T функций $\xi \in L_{\infty,1}(Q_T)$, для которых $\xi_t \in L_{\infty,1}(Q_T)$. Норму в этом пространстве зададим равенством

$$\|\xi\|_{\infty,1,Q_T}^{(0,1)} \equiv \|\xi\|_{\infty,1,Q_T} + \|\xi_t\|_{\infty,1,Q_T}.$$

Прежде чем сформулировать основные результаты статьи, приведём следующую лемму, вытекающую из того, что класс $W_1^1[0,T]$ совпадает с множеством всех абсолютно непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций, (см., например, [8, с. 343–344]).

Лемма 1. *Пусть* $\xi \in W_1^1[0,T]$. *Тогда функция* ξ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[0,T]$ *и производная функции* ξ, *понимаемая в классическом смысле, существует почти всюду на отрезке* $[0,T]$ *и почти всюду совпадает с обобщённой производной в смысле Соболева. Более того, найдётся константа* $A = A(T) > 0$, *зависящая лишь от* $T > 0$, *такая, что*

$$\max_{t\in[0,T]}|\xi(t)| \le A\|\xi\|_{1,[0,T]}^{(1)}.$$

Перейдём теперь к основным результатам.

Теорема 1. *У любой функции* $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(S_T^1)$ *при каждом* $t\in[0,T]$ *существует след* $f(\cdot,t) \in L_\infty(S^1)$, *непрерывно зависящий от* $t\in[0,T]$ *в норме* $L_\infty(S^1)$, *причём*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{\infty,S^1} \le A\|f\|_{\infty,1,S_T^1}^{(0,1)}. \tag{1}$$

Теорема 2. *У каждой функции* $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(Q_T)$ *при всех* $t\in[0,T]$ *существует след* $f(\cdot,t) \in L_\infty(\Omega)$, *непрерывно зависящий от* $t\in[0,T]$ *в норме* $L_\infty(\Omega)$, *и*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le A\|f\|_{\infty,1,Q_T}^{(0,1)}. \tag{2}$$

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in W_{2,1}^{0,1}(S_T^1)$ *при каждом* $t\in[0,T]$ *имеется след* $f(\cdot,t) \in L_2(S^1)$, *непрерывно зависящий от* $t\in[0,T]$ *в норме* $L_2(S^1)$. *Кроме того,*

$$\max_{t\in[0,T]}\|f(\cdot,t)\|_{2,S^1} \le A\|f\|_{2,1,S_T^1}^{(0,1)}. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. Произвольно фиксируем $f \in W_{\infty,1}^{0,1}(S_T^1)$. Для любой функции $\theta \in C(\overline{S}_T^1)$, равной нулю вблизи $S^1\times\{0\}$ и $S^1\times\{T\}$ и имеющей непрерывную на $\overline{S}_T^1$ производную θ_t, справедливо тождество

$$\int\limits_{S_T^1} f(s,t)\theta_t(s,t)dsdt = -\int\limits_{S_T^1} f_t(s,t)\theta(s,t)dsdt.$$

Полагая $\theta(s,t)\equiv p(s)q(t)$, где $p\in C(\overline{S}^1)$, а $q\in C^\infty[0,T]$ — финитная на отрезке $[0,T]$ функция, получим, что для любых таких p и q

$$\int\limits_{S^1}\left[\int\limits_0^T f(s,t)q'(t)dt+\int\limits_0^T f_t(s,t)q(t)dt\right]p(s)ds=0.$$

Следовательно, какова бы ни была функция q из указанного класса, при п.в. $s\in S^1$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^T f(s,t)q'(t)dt=-\int\limits_0^T f_t(s,t)q(t)dt.$$

Это означает, что при почти всех $s\in S^1$ функция $f(s,\cdot)$ является элементом $W_1^1[0,T]$, и, в частности, имеет смысл говорить о следе $f(\cdot,t)$.

Покажем, что $f\in C([0,T],L_\infty(S^1))$. В самом деле,

$$|f(s,t+\Delta t)-f(s,t)|\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}|f_t(s,\tau)|d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{\infty,S^1}d\tau\right|.$$

Таким образом,

$$|f(s,t+\Delta t)-f(s,t)|\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{\infty,S^1}d\tau\right|.$$

Следовательно, при всех $t\in[0,T]$ существует след $f(\cdot,t)\in L_\infty(S^1)$, непрерывно зависящий от $t\in[0,T]$ в норме $L_\infty(S^1)$.

Докажем теперь оценку (1). Поскольку функция $f(s,\cdot)$ при п.в. $s\in S^1$ является элементом пространства $W_1^1[0,T]$, то, на основании леммы 1, для каждого $t\in[0,T]$ при почти всех $s\in S^1$

$$|f(s,t)|\le A\int\limits_0^T\left[|f(s,\tau)|+|f_t(s,\tau)|\right]d\tau.$$

Поэтому $|f(s,t)|\le A\|f\|_{\infty,1,S_T^1}^{(0,1)}$.

Таким образом, $\|f(\cdot,t)\|_{\infty,S^1}\le A\|f\|_{\infty,1,S_T^1}^{(0,1)}$, что совместно с доказанным ранее включением $W_{\infty,1}^{0,1}(S_T^1)\subset C([0,T],L_\infty(S^1))$ даёт оценку (1). Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Выберем произвольно $f\in W_{\infty,1}^{0,1}(Q_T)$. Для любой функции $\lambda\in C(\overline{Q}_T)$, равной нулю вблизи $\Omega\times\{0\}$ и $\Omega\times\{T\}$ и имеющей непрерывную на $\overline{Q}_T$ производную λ_t, справедливо тождество

$$\int\limits_{Q_T} f(x,t)\lambda_t(x,t)dxdt=-\int\limits_{Q_T} f_t(x,t)\lambda(x,t)dxdt.$$

Беря $\lambda(x,t)\equiv p(x)q(t)$, где $p\in C(\overline{\Omega})$, а $q\in C^\infty[0,T]$ — финитная на отрезке $[0,T]$ функция, получим, что для любых таких p и q

$$\int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^T f(x,t)q'(t)dt+\int\limits_0^T f_t(x,t)q(t)dt\right]p(x)dx=0.$$

Как следствие, какова бы ни была функция q из указанного класса, при п.в. $x\in\Omega$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^T f(x,t)q'(t)dt=-\int\limits_0^T f_t(x,t)q(t)dt.$$

В силу этого при почти всех $x\in\Omega$ функция $f(x,\cdot)$ — элемент $W_1^1[0,T]$, и, в частности, имеет смысл говорить о следе $f(\cdot,t)$.

Покажем, что $f\in C([0,T],L_\infty(\Omega))$. Действительно,

$$|f(x,t+\Delta t)-f(x,t)|\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}|f_t(x,\tau)|d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{\infty,\Omega}d\tau\right|,$$

откуда

$$|f(x,t+\Delta t)-f(x,t)|\le\left|\int\limits_t^{t+\Delta t}\|f_t(\cdot,\tau)\|_{\infty,\Omega}d\tau\right|.$$

Ввиду этого при всех $t\in[0,T]$ существует след $f(\cdot,t)\in L_\infty(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t\in[0,T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$.

Докажем оценку (2). Так как функция $f(x,\cdot)$ при п.в. $x\in\Omega$ принадлежит пространству $W_1^1[0,T]$, то, в соответствии с леммой 1, для каждого $t\in[0,T]$ при почти всех $x\in\Omega$

$$\left| f(x,t) \right| \le A \int_0^T \left[\left| f(x,\tau) \right| + \left| f_t(x,\tau) \right| \right] d\tau,$$

в силу чего $\left| f(x,t) \right| \le A \| f \|^{(0,1)}_{\infty,1,Q_T}$.

Следовательно, $\| f(\cdot,t) \|_{\infty,\Omega} \le A \| f \|^{(0,1)}_{\infty,1,Q_T}$, что вместе с доказанным ранее включением $W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T) \subset C([0,T], L_\infty(\Omega))$ даёт оценку (2). Итак, теорема 2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Произвольно зафиксируем $f \in W^{0,1}_{2,1}(S^1_T)$. Для любой функции $\theta \in C(\bar{S}^1_T)$, равной нулю вблизи $S^1 \times \{0\}$ и $S^1 \times \{T\}$ и имеющей непрерывную на $\bar{S}^1_T$ производную θ_t, справедливо тождество

$$\int_{S^1_T} f(s,t)\theta_t(s,t)dsdt = -\int_{S^1_T} f_t(s,t)\theta(s,t)dsdt.$$

Взяв $\theta(s,t) \equiv p(s)q(t)$, где $p \in C(\bar{S}^1)$, а $q \in C^\infty[0,T]$ — финитная на отрезке $[0,T]$ функция, получим, что для любых таких p и q

$$\int_{S^1} \left[\int_0^T f(s,t)q'(t)dt + \int_0^T f_t(s,t)q(t)dt \right] p(s)ds = 0.$$

Следовательно, какой бы ни была функция q из указанного класса, при п.в. $s \in S^1$ имеет место соотношение

$$\int_0^T f(s,t)q'(t)dt = -\int_0^T f_t(s,t)q(t)dt.$$

Это означает, что при почти всех $s \in S^1$ функция $f(s,\cdot)$ является элементом $W^1_1[0,T]$, и, в частности, имеет смысл говорить о следе $f(\cdot,t)$.

Покажем, что $f \in C([0,T], L_2(S^1))$. В самом деле, пусть $\vartheta \in L_2(S^1)$ — произвольна. Тогда

$$\left| \int_{S^1} f(s,t+\Delta t)\vartheta(s)ds - \int_{S^1} f(s,t)\vartheta(s)ds \right| =$$

$$= \left| \int_{S^1} [f(s,t+\Delta t) - f(s,t)]\vartheta(s)ds \right| \le$$

$$\le \int_{S^1} | f(s,t+\Delta t) - f(s,t) \| \vartheta(s) | ds =$$

$$= \int_{S^1} \left| \int_t^{t+\Delta t} f_t(s,\tau)d\tau \right| |\vartheta(s)| ds \le$$

$$\le \left| \int_t^{t+\Delta t} d\tau \int_{S^1} |f_t(s,\tau)| |\vartheta(s)| ds \right| \le$$

$$\le \|\vartheta\|_{2,S^1} \left| \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{S^1} |f_t(s,\tau)|^2 ds \right)^{1/2} d\tau \right|.$$

Таким образом,

$$\left| \int_{S^1} [f(s,t+\Delta t) - f(s,t)]\vartheta(s)ds \right| \le$$

$$\le \|\vartheta\|_{2,S^1} \left| \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{S^1} |f_t(s,\tau)|^2 ds \right)^{1/2} d\tau \right|.$$

Беря от обеих частей последнего неравенства точную верхнюю грань по всем $\vartheta \in L_2(S^1)$, у которых $\|\vartheta\|_{2,S^1} \le 1$, и используя теорему Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством, заключаем, что

$$\| f(\cdot,t+\Delta t) - f(\cdot,t) \|_{2,S^1} \le$$

$$\le \left| \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{S^1} |f_t(s,\tau)|^2 ds \right)^{1/2} d\tau \right|.$$

Как следствие, при всех $t \in [0,T]$ существует след $f(\cdot,t) \in L_2(S^1)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_2(S^1)$.

Докажем теперь оценку (3). Поскольку функция $f(s,\cdot)$ при п.в. $s \in S^1$ является элементом пространства $W^1_1[0,T]$, то, на основании леммы 1, для каждого $t \in [0,T]$ при почти всех $s \in S^1$

$$\left| f(s,t) \right| \le A \int_0^T \left[\left| f(s,\tau) \right| + \left| f_t(s,\tau) \right| \right] d\tau.$$

Предположим, что $\vartheta \in L_2(S^1)$, $t \in [0,T]$ — произвольны. Тогда

$$\left| \int_{S^1} f(s,t)\vartheta(s)ds \right| \le \int_{S^1} |f(s,t)| |\vartheta(s)| ds \le$$

$$\le \int_{S^1} \left\{ A \int_0^T \left[\left| f(s,\tau) \right| + \left| f_t(s,\tau) \right| \right] d\tau \right\} |\vartheta(s)| ds =$$

$$= A[\int_0^T d\tau \int_{S^1} |f(s,\tau)| |\vartheta(s)| ds +$$

$$+\int_0^T d\tau \int_{S^1} |f_t(s,\tau)| |\vartheta(s)| ds] \le$$

$$\le A\|\vartheta\|_{2,S^1} [\int_0^T \left(\int_{S^1} |f(s,\tau)|^2 ds \right)^{1/2} +$$

$$+\int_0^T \left(\int_{S^1} |f_t(s,\tau)|^2 ds \right)^{1/2}] =$$

$$= A\|\vartheta\|_{2,S^1} \|f\|^{(0,1)}_{2,1,S^1_T}.$$

Как следствие, для всех $t \in [0,T]$ при каждом $\vartheta \in L_2(S^1)$

$$\left| \int_{S^1} f(s,t)\vartheta(s) ds \right| \le A\|\vartheta\|_{2,S^1} \|f\|^{(0,1)}_{2,1,S^1_T}.$$

Переходя в обеих частях данного неравенства к точной верхней грани по $\vartheta \in L_2(S^1)$, $\|\vartheta\|_{2,S^1} \le 1$, на основании теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством, будем иметь при каждом $t \in [0,T]$

$$\|f(\cdot,t)\|_{2,S^1} \le c_1 \|f\|^{(0,1)}_{2,1,S^1_T}.$$

Это совместно с доказанным ранее включением $f \in C([0,T], L_2(S^1))$ даёт оценку (3). Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00495), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2010 годы (проект НК-13П(9)).

Список литературы

1. Успенский С.В. О следах функций класса $W_p^{l_1,\dots,l_n}$ Соболева на гладких поверхностях // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 429–451.
2. Перепёлкин В.Г. О граничных свойствах функций, принадлежащих весовым классам $W^{l_1,\dots,l_n}_{p;\sigma_1,\dots,\sigma_n}$ С.Л. Соболева в областях // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Тр. семинара акад. Соболева. Новосибирск: ИМ, 1977. С. 108–148.
3. Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепёлкин В.Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
4. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
5. Аджиев С.С. Характеризации функциональных пространств $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$, $W^s_p(G)$ и некоторых других. Приложения // Тр. Мат. ин-та РАН. 1999. Т. 227. С. 7–42.
6. Бесов О.В. Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости // Тр. Мат. ин-та РАН. 2005. Т. 248. С. 52–63.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.V. М.: ГИФМЛ, 1959.

ON SOBOLEV SPACES WITH VARIOUS SUMMABILITY POWERS FOR VARIOUS VARIABLES

V.S. Gavrilov

Some embedding theorems for functions belonging to Sobolev spaces with mixed summability powers are proved.

Keywords: embedding theorems, Sobolev spaces.