УДК 517.93

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТОКОВ ТИПА ЧЕРРИ НА НЕОРИЕНТИРУЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА ТРИ

Т.В. Медведев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

mtv@unn.ru

Поступила в редакцию 28.12.2010

Дается топологическая классификация потоков с конечным числом грубых состояний равновесия, одним нигде не плотным квазиминимальным множеством, без замкнутых траекторий и сепаратрис, идущих из седла в седло, на замкнутой неориентируемой поверхности рода 3 – так называемых потоков типа Черри.

Ключевые слова: потоки на поверхностях, квазиминимальное множество, топологическая классификация.

Введение

Изучение потоков с нетривиально рекуррентными траекториями на замкнутых поверхностях восходит к Пуанкаре [1–4], который рассматривал потоки на торе без состояний равновесия и периодических траекторий. Напомним, что траектория называется нетривиально рекуррентной, если она непериодическая и принадлежит собственному предельному множеству. Потоки с такими траекториями существуют на ориентируемых поверхностях, начиная с рода 1 (тор), и на неориентируемых поверхностях, начиная с рода 3 [5, 6]. Следуя [7], топологическое замыкание нетривиально рекуррентной траектории мы будем называть квазиминимальным множеством, которое единственно в случае тора и неориентируемой поверхности M_3^2 рода 3 [8, 9]. Рассмотрим арациональный поток, то есть поток без периодических траекторий и сепаратрисных связей. Динамика таких потоков наиболее тесно связана с топологией несущей поверхности. Известно [1–4, 8, 10], что на торе существуют арациональные потоки как с нигде не плотным, так и со всюду плотным квазиминимальным множеством. Мы показываем, что квазиминимальное множество арационального потока на M_3^2 всегда нигде не плотно (теорема 1).

В настоящей статье мы даем топологическую классификацию арациональных потоков с грубыми состояниями равновесия на неориентируемой поверхности M_3^2 рода три, у которых в каждой компоненте дополнения к (единственному) квазиминимальному множеству лежит минимально возможное число состояний равновесия. Подобные потоки в последнее время стали называть потоками типа Черри [7, 13] (см. точные определения ниже). Задача топологической классификации потоков Черри на различных ориентируемых поверхностях решалась в [11–14] и др. Топологическая классификация таких потоков на M_3^2 до настоящего времени не рассматривалась.

Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы дадим определения преобразования типа Черри прямой и окружности с одним флипом и приведем некоторые факты, необходимые для построения топологической классификации потоков типа Черри на замкнутых неориентируемых поверхностях рода 3.

Определение 1. Функция $\bar{f}(x), x \in \mathbf{R}$, называется преобразованием типа Черри прямой $\mathbf{R}$ с одним флипом, если: 1) $\bar{f}(x+1) = \bar{f}(x)+1$; 2) на каждом конечном интервале изменения x $\bar{f}(x)$ имеет не более чем конечное число интервалов постоянства (т.е. интервалов, на каждом из которых $\bar{f}$ принимает постоянное значение) и не более чем конечное число точек разрыва; 3) в концевых точках интервалов постоянства преобразование $\bar{f}$ непрерывно; 4) если $[c;d]$ – интервал постоянства преобразования $\bar{f}$, то для любого $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ полный прообраз $\bar{f}^{-n}([c;d])$ является замкнутым интервалом, в некоторой окрестности которого преобразование $\bar{f}$ является гомеоморфизмом; 5) если x_0 – точка, в некоторой окрестности которой $\bar{f}$ непрерывна и строго монотонно возрастает, то на $(x_0;x_0+1)$ существует единственная пара точек разрыва a и b, такая, что на интервале $(a;b)$ функция $\bar{f}$ нестрого монотонно убывает. В окрестностях точек $x\in(x_0;x_0+1)\setminus[a;b]$ $\bar{f}(x)$ нестрого монотонно возрастает, причем в левой полуокрестности точки a и в правой полуокрестности точки b $\bar{f}$ строго монотонно возрастает и непрерывна в a (b) слева (справа). Каждый такой интервал $(a;b)$ мы назовем флипом; 6) если $(a;b)$ – флип, то $\lim\limits_{x\to a+0}\overline{f}(x)=\overline{f}(b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0}\overline{f}(x)=\overline{f}(a)$, а в остальных точках разрыва $\bar{f}$ непрерывна слева; 7) если x_0 – точка разрыва преобразования $\bar{f}$, не являющаяся граничной точкой флипа, и $[c;d]=[\bar{f}(x_0);\lim\limits_{x\to x_0+0}\bar{f}(x)]$, то для любого $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ образ $\bar{f}^n([c;d])$ есть замкнутый интервал, в некоторой окрестности которого $\bar{f}$ является гомеоморфизмом; 8) $\bar{f}$ не имеет периодических точек (т.е. $\bar{f}^k(x)\neq x+m$ для любых $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}, m\in\mathbf{Z}$). Множество преобразований типа Черри прямой с одним флипом обозначим через $\mathrm{Tch}_1(\mathbf{R}^1)$.

Отметим, что под интервалом постоянства $(c;d)$ мы понимаем «максимальный», т.е. такой, что для любого $\varepsilon>0$ интервалы $(c-\varepsilon;d)$ и $(c;d+\varepsilon)$ интервалами постоянства уже не являются. Заметим, что из условий 5 и 6 следует, что если точка y_0 не является образом интервала постоянства отображения $\bar{f}$ и существует x_0, что $\bar{f}(x_0)=y_0$, то такое x_0 единственно.

Пусть $\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{S}^1$ – универсальное накрытие окружности $\mathbf{S}^1, \pi(x)=x(\mathrm{mod}1)$. Тогда $\overline{f}\in\mathrm{Tch}_1(\mathbf{R}^1)$ является накрывающим для некоторого преобразования $f:\mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$, т.е. $f\circ\pi=\pi\circ\bar{f}$. Проекции флипов при отображении π мы также будем называть флипами. Ограничение $f|_{(a;b)}$, где $(a;b)$ – флип, меняет ориентацию.

Универсальное накрытие окружности $\pi:\mathbf{R}\to\mathbf{S}^1$ задает на ней ориентацию, которую мы в дальнейшем будем считать фиксированной.

Определение 2. Преобразование $f:\mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$ называется преобразованием типа Черри окружности $\mathbf{S}^1$ с одним флипом, если существует накрывающее для f преобразование типа Черри прямой с одним флипом. Множество преобразований типа Черри окружности с одним флипом обозначим через $\mathrm{Tch}_1(\mathbf{S}^1)$.

Лемма 1. *Пусть* $f\in\mathrm{Tch}_1(\mathbf{S}^1)$ *и* $(a;b)$ *– флип. Тогда* $f^n((a;b))\cap(a;b)=\varnothing, n\in\mathbf{N}$, *и* $(a;b)$ *состоит из блуждающих точек преобразования* f.

Доказательство можно получить аналогично доказательству леммы 1 работы [15] с учетом условия 7) определения 1.

Потоки типа Данжуа и Черри на замкнутой неориентируемой поверхности рода 3

В настоящем параграфе мы даем определение потоков типа Черри на замкнутой неориентируемой поверхности M_3^2 рода 3 и решаем задачу их топологической классификации. В заключение мы строим пример такого потока.

Напомним, что арациональным называется поток без периодических траекторий и сепаратрисных связей, т.е. сепаратрис, идущих из седла в седло.

Теорема 1. Пусть f^t – арациональный C^1 поток с грубыми состояниями равновесия на замкнутой неориентируемой поверхности M_3^2 рода 3, имеющий нетривиальную рекуррентную траекторию. Тогда единственное квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$ нигде не плотно.

Доказательство. Согласно [9] квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$ единственно. Из [16] следует, что если нетривиальная рекуррентная траектория потока f^t на M_3^2 всюду плотна, f^t имеет петлю сепаратрис седла и, таким образом, не является арациональным. Ввиду отсутствия у f^t замкнутых траекторий и сепаратрисных связей $\Omega(f^t)$ нигде не плотно. □

Определение 3. Арациональный C^r-поток f^t $(r\geq1)$ с грубыми состояниями равновесия на замкнутой неориентируемой поверхности M_3^2 рода 3 назовем потоком типа Черри и скажем, что он принадлежит классу $\mathrm{Ch}(M_3^2)$, если выполняются следующие условия: 1) f^t имеет одно квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$; 2) в каждый узел потока f^t идет ровно по одной сепаратрисе седла; 3) если седло имеет сепаратрису, идущую в узел, оно лежит в $\Omega(f^t)$.

Топологическая классификация потоков такого класса на двумерном торе осуществлена в [11, 13], а на замкнутых гиперболических поверхностях – в [14] с использованием техники, разработанной в [17] для транзитивных потоков на таких поверхностях.

Обозначим через $O, O_1, \ldots, O_k$ седла и через $U_1, \ldots, U_k$, $k \geq 0$, – узлы потока $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$. Поскольку эйлерова характеристика M_3^2 равна -1, число седел $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$ на единицу превышает число узлов. В соответствии с условием 2) в каждый узел $U_i, i = 1, \ldots k$, идет ровно по одной сепаратрисе седла. Покажем, что седло может иметь только одну сепаратрису, идущую в узел. В самом деле, если седло O_i имеет хотя бы одну сепаратрису, идущую в узел, по условию 3), оно лежит в $\Omega(f^t)$, и, следовательно, по крайней мере две его сепаратрисы противоположной устойчивости (мы будем считать, что это L_3^i и L_4^i) лежат в $\Omega(f^t)$. Пусть L_1^i – сепаратриса седла O_i, идущая в неустойчивый узел U_i, а L_2^i – сепаратриса седла O_i, идущая в устойчивый узел U_j. Тогда L_2^i является одним односторонним продолжением по Бендиксону L_1^i и пусть L_3^i – другое ее одностороннее продолжение по Бендиксону. Тогда ω-предельное множество некоторой части траекторий, выходящих из неустойчивого узла U_i, будет совпадать с ω-предельным множеством L_2^i, т.е. U_j, а ω-предельное множество другой части траекторий, выходящих из неустойчивого узла U_i, будет совпадать с ω-предельным множеством L_3^i, т.е. $\Omega(f^t)$. Однако в силу условия 2) это невозможно.

Таким образом, седла $O_i, i = 1, \ldots, k$ (при $k > 0$) имеют ровно по одной сепаратрисе, идущей в узел (мы будем считать, что это узел U_i), и лежат в $\Omega(f^t)$, а седло O может лежать или не лежать в $\Omega(f^t)$. Как мы уже заметили, $O_i, i = 1, \ldots, k$, имеют по крайней мере по две сепаратрисы, лежащие в $\Omega(f^t)$ и являющиеся нетривиальными рекуррентными полутраекториями, причем одна из них является продолжением по Бендиксону другой. Пусть $L_1^i, L_2^i, L_3^i, L_4^i$ – сепаратрисы седла O_i $(i = 1, \ldots, k)$, пронумерованные при обходе вокруг седла O_i, и пусть L_3^i такова, что $\Omega(f^t) \cap [\omega(L_3^i) \cup \alpha(L_3^i)] = O_i$, т.е. ω- (α-)предельным множеством L_3^i является узел U_i. Тогда сепаратрису L_3^i седла O_i будем называть черной.

Отметим, что по три сепаратрисы седел $O_1, \ldots, O_k$ и все четыре сепаратрисы седла O имеют $\Omega(f^t)$ в качестве ω- (α-)предельного множества.

В силу теоремы 1 множество $\Omega(f^t)$ нигде не плотно. В силу [8, 9] $\Omega(f^t) \setminus \{O_1, \ldots, O_k\}$ локально гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок. Компоненту связности множества $D(f^t) = M_3^2 \setminus [\Omega(f^t) \bigcup_{i=1}^{k} (L_1^i \cup L_2^i \cup L_4^i]$, содержащую черную сепаратрису L_3^i, назовем черной ячейкой. Остальные компоненты связности множества $D(f^t)$ назовем серыми ячейками (такие компоненты, как мы покажем ниже, всегда имеются). Черную ячейку будем называть положительной (отрицательной), если черная сепаратриса, которую она содержит, является α- (соответственно ω-) сепаратрисой седла из $\Omega(f^t)$.

Пусть $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$, и $\Omega(f^t)$ – квазиминимальное множество. Точка $m \in \Omega(f^t)$ называется достижимой изнутри граничной точкой, если существует такая дуга λ с концевой точкой m, что $\lambda \setminus m \subset M_3^2 \setminus \Omega(f^t)$ (например, все седла $O_1, \ldots, O_k$ являются достижимыми изнутри граничными точками).

Напомним, что иррациональной обмоткой на двумерном торе $\mathbf{T}^2$ называется поток, накрывающий для которого на $\mathbf{R}^2$ задается системой $\dot{x} = 1, \dot{y} = \mu, \mu \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, при этом μ является числом вращения этой иррациональной обмотки.

Напомним также, что два потока f^t, g^t на замкнутой поверхности M называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi: M \to M$, переводящий траектории одного потока в траектории другого потока с сохранением направления по времени. Если последнее требование сохранения по времени убрать, то получим определение топологической эквивалентности f^t, g^t.

Лемма 2. *Пусть* $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$. *Тогда существует непрерывное* (*не являющееся гомеоморфизмом*) *преобразование* $h: M_3^2 \to \mathbf{T}^2$ (*сдувание*) *со следующими свойствами: 1*) h *переводит траектории потока* f^t *в траектории иррациональной обмотки* f_0^t *(образом траектории не обязательно является целая траектория); 2*) *если* l *– нетривиальная рекуррентная траектория потока* f^t, *то ограничение* $h|_l: l \to L$ *является гомеоморфизмом на свой образ и* L *– траектория иррациональной обмотки* f_0^t; *3*) *для каждой точки* $p \in \mathbf{T}^2$ $h^{-1}(p)$ *компактно и стягиваемо; 4*) *для каждой траектории* L *потока* f_0^t *на* $\mathbf{T}^2$: *a*) $h^{-1}(L)$ *инвариантно по отношению к* f^t *и для каждой не являющейся состоянием равновесия точки* $p \in \mathrm{fr}\, h^{-1}(L) \cap h^{-1}(L)$ (fr *означает границу*) *отображение* h *сохраняет направление потока* f^t; *b*) $h^{-1}(L)$ *содержит не более двух нетривиальных рекуррентных траекторий, которые в этом случае лежат в достижимой изнутри границе* $h^{-1}(L)$; *c*) *если* $h^{-1}(L)$ *содержит ровно одну траекторию потока* f^t, *то эта траектория нетривиальна и рекуррентна; 5*) $h(\Omega(f^t)) = \mathbf{T}^2$; *6*) *отображение* h *определяется единственным образом с точностью до топологической эквивалентности.*

Доказательство. Нетрудно показать, что у потока f^t существует замкнутая трансверсаль N, гомеоморфная окружности, пересекающая $\Omega(f^t)$, на которой f^t индуцирует отображение последования Пуанкаре $p: N \to N$. Сохраним введенные ранее обозначения. Поскольку по три сепаратрисы седел $O_1, \ldots, O_k$ и четыре сепаратрисы седла O имеют $\Omega(f^t)$ ω-(α-) предельным множеством, они пересекают N. Пусть для определенности L_1 и L_3 являются ω-, а L_2 и L_4 – α-сепаратрисами седла O и пусть a, b – последние при возрастании t точки пересечения соответственно L_1 и L_3 с N, а c и d – первые при возрастании t точки пересечения соответственно L_2 и L_4 с N. В силу арациональности f^t точки a и b являются точками разрыва отображения p. Каждая дуга N, ограниченная точками a и b, отобразится в одну из дуг, ограниченных точками c и d, и эти образы не пересекаются. Поэтому отображение p меняет ориентацию на одной из дуг, ограниченных точками a и b, которую мы обозначим через $(a;b)$ и $p \in \mathrm{Tch}_1(\mathbf{S}^1)$. Пусть $(c;d)$ – дуга N, содержащая образ $(a;b)$ при отображении p. Из леммы 1 следует, что дуга $(a;b)$ состоит из блуждающих точек, и поэтому не может содержать точек пересечения N с лежащими в $\Omega(f^t)$ сепаратрисами других седел, что верно и для дуги $(c;d)$. Более того, из условия 2) определения 3 вытекает, что дуги $(a;b)$ и $(c;d)$ не могут содержать также точек пересечения N с сепаратрисами седел $O_1, \ldots, O_k$, не принадлежащими $\Omega(f^t)$. Поэтому ограничение $p|_{(a;b)}\, (a;b) \to (c;d)$ является гомеоморфизмом, а $(a;b)$ – флипом отображения p. Следовательно, либо седло O вместе со своими сепаратрисами лежит внутри серой ячейки Q потока f^t, такой, что $(a;b) \subset Q \cap N$, либо O и одна или две пары его сепаратрис входят в достижимую изнутри границу серой ячейки Q. Напомним, что поток на замкнутой двумерной поверхности называется нередуцируемым, если он пересекает каждую негомотопную нулю замкнутую кривую хотя бы в одной нетривиально α- или ω-рекуррентной точке [18]. Поток $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$ не является нередуцируемым, поскольку существует простая замкнутая кривая C, проходящая через O, $C \setminus \{O\} \subset Q$, окрестность которой гомеоморфна листу Мебиуса. Следуя технике, предложенной в [18], разрежем M_3^2 по C. Получившаяся поверхность будет двумерным тором с удаленным двумерным диском, поскольку при разрезании M_3^2 по такой кривой можно получить тор либо бутылку Клейна, но на бутылке Клейна не существует нетривиальной рекуррентной траектории [9]. Компактифицируем полученную поверхность, заклеив полученную границу точкой. Отображение, переводящее M_3^2 в тор $\mathbf{T}^2$ указанным выше способом, обозначим через h_1. Ясно, что h_1 непрерывно и, поскольку $C\setminus\{O\}$ лежит в ячейке из блуждающих траекторий, переводит нетривиальные рекуррентные полутраектории в нетривиальные рекуррентные полутраектории, а взаимная однозначность нарушается только в точках кривой C. Полученный на $\mathbf{T}^2$ поток будет нередуцируемым, поскольку при разрезании тора по негомотопной нулю замкнутой кривой мы получим кольцо, на котором не может быть нетривиальных рекуррентных траекторий. Тогда в силу [18] существует отображение $h_2 : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$, удовлетворяющее условиям настоящей леммы, и отображение $h = h_2 \circ h_1$ является искомым. □

Замечание. Отображение h «склеивает» ячейки, состоящие из блуждающих траекторий (черные и серые ячейки), и отображает их вместе с границей в траектории или полутраектории иррациональной обмотки f_0^t.

Пусть поток $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$ и поток f_0^t на $\mathbf{T}^2$ удовлетворяют лемме 2. Как и прежде, обозначим через O седло, все четыре сепаратрисы которого имеют $\Omega(f^t)$ своим ω- (α-) предельным множеством. Пусть $X_0(f^t,h) = \cup h(w)$, где объединение берется по всем черным и серым ячейкам w потока f^t, и обозначим через $X(f^t,h)$ семейство соответствующих траекторий иррациональной обмотки f_0^t (т.е. тех траекторий, которые как множества пересекаются с $X_0(f^t,h)$). В ходе доказательства леммы 2 мы показали, что существует простая замкнутая кривая C, такая, что $C\setminus\{O\}$ лежит в серой ячейке и при разрезании M_3^2 по C получается двумерный тор с выброшенным двумерным диском. Используемые ниже понятия «левый» и «правый» понимаются в смысле расположения соответствующих объектов на полученном торе.

Каждой траектории l из $X(f^t,h)$ припишем набор символов (код) из множества {–1; 0; 1; «л»; «п»; «лп»; «пл»; «лс»; «пс»; «вс»; «дс»} следующим образом: число –1 (соответственно +1) приписывается, если l содержит образ отрицательной (положительной) черной ячейки, а цифра 0 приписывается, если l содержит образ серой ячейки. Если мы приписали l два числа, то приписываем также букву «л» или «п» (первую букву слов «левый» или «правый» соответственно) в зависимости от того, с какой стороны серая ячейка примыкает к черной. Если мы приписали l три числа, то приписываем еще две буквы «лп» или «пл» аналогичным образом. Код «дс» приписывается, если l содержит образ серой ячейки Q, достижимая изнутри граница которой составлена из седла O и четырех его сепаратрис; код «лс» («пс») приписывается, если l содержит образ серой ячейки Q, левая (правая) достижимая изнутри граница которой составлена из седла O и двух его сепаратрис, а правая (левая) достижимая изнутри граница не содержит седла O; наконец код «вс» приписывается, если l содержит образ серой ячейки Q, внутри которой содержится седло O.

Семейство $X(f^t,h)$ с приписанными кодами назовем схемой потока f^t, полученной с помощью операции сдувания h (и обозначим снова через $X(f^t,h)$).

Отметим, что число траекторий, в код которых входят числа ± 1, конечно. Семейство траекторий, в код которых входит цифра 0, не более чем счетное. Траектория с кодом из множества {«вс»; «лс»; «пс»; «дс»} единственна, и ее код содержит единственный код из этого множества.

Пусть X – не более чем счетное семейство траекторий иррациональной обмотки f_0^t. Предположим, что каждой траектории приписан набор символов (код) из множества {–1; 0; +1; «л»; «п»; «лп»; «пл»; «лс»; «пс»; «вс»; «дс»}, при этом 1) существует единственная траектория $l_0 \in X$, которой приписан код из множества {«вс»; «лс»; «пс»; «дс»}; в этом случае l_0 не приписано других кодов из этого множества и приписан код 0; 2) код каждой траектории из X содержит от одной до трех различных цифр; траектория из X с кодом из множества «лс» или «пс» содержит не более двух цифр; траектория с кодом «дс» содержит единственную цифру 0; 3) число траекторий, в код которых входят числа ± 1, конечно; 4) если код некоторой траектории содержит числа +1, –1, то он содержит также цифру 0; 5) код содержит две цифры тогда и только тогда, когда он содержит одну из букв «л» или «п» и не содержит кодов «лп» и «пл»; 6) код содержит три цифры тогда и только тогда, когда он содержит буквы «лп» или «пл» и не содержит кодов «л» и «п»; 7) если код содержит «лс» («пс»), он не содержит «л» («п»); если код содержит «дс», он не содержит других буквенных кодов.

Такой набор траекторий с приписанными кодами назовем абстрактной допустимой схемой. Из определения потока типа Черри вытекает, что его схема является допустимой для любой операции сдувания.

Две абстрактные допустимые схемы X_1, X_2 называются соизмеримыми, если существует такой диффеоморфизм $F:\mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$, что: 1) $F(X_1) = X_2$; 2) накрывающий $\overline{F}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ для F имеет вид $\overline{x} = ax + by,\ \overline{y} = cx + dy + \xi$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – целочисленная унимодулярная матрица, $\xi \in \mathbf{R}$; 3) коды траекторий $l \in X_1, F(l) \in X_2$ равны для всех траекторий $l \in X_1$; 4) F осуществляет топологическую орбитальную эквивалентность соответствующих иррациональных обмоток.

Теорема 2. Два потока $f_1^t,\ f_2^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$ топологически орбитально эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $X(f_1^t, h_1), X(f_2^t, h_2)$ соизмеримы, где h_i – некоторая операция сдувания потока f_i^t $(i = 1, 2)$.

Из теоремы 2, в частности, вытекает, что с точностью до соизмеримости схема потока $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$ не зависит от операции сдувания.

Теорема 3. Пусть X – абстрактная допустимая схема и f_0^t – соответствующая иррациональная обмотка. Тогда на M_3^2 существует C^1-поток $f^t \in \mathrm{Ch}(M_3^2)$, схема которого равна X.

Доказательство можно получить используя конструкцию надстройки над отображением окружности либо аналогично приводимому ниже построению примера потока типа Черри.□

В заключение построим пример потока типа Черри на M_3^2. Для этого рассмотрим арациональный поток на торе g^t без состояний равновесия с одной компонентой связности $D(g^t)$ дополнения к минимальному множеству $\Omega(g^t)$. Подберем гладкую диффеоморфную окружности кривую q, ограничивающую область $d \subset D(g^t)$, диффеоморфную двумерному диску, так, чтобы q касалась траекторий потока только двух точках s_1 и s_2, принадлежащих множеству достижимых точек $A(g^t)$ квазиминимального множества $\Omega(g^t)$. Поскольку $q \cup d$ диффеоморфно замкнутому двумерному диску $\overline{d}$, диффеоморфизм $\varphi : q \cup d \to \overline{d}$ можно подобрать так, чтобы $\varphi(s_1)$ и $\varphi(s_2)$ были диаметрально противоположны. Поместим в точках s_1 и s_2 по непроходимой крошке и выбросим из тора область d. Отождествим по две точки кривой q, соответствующие диаметрально противоположным точкам на $\overline{d}$. Тогда будет образовано замкнутое неориентируемое двумерное многообразие рода 3, в котором образ q после отождествления будет средней линией листа Мебиуса. Получим (вообще говоря, не гладкий) поток $\overline{g}^t$ на замкнутой неориентируемой поверхности M_3^2 без замкнутых траекторий и с одним седлом $O = s_1 = s_2$, сепаратрисы которого нетривиальны и рекуррентны. Согласно [18] можно подобрать топологически экви-

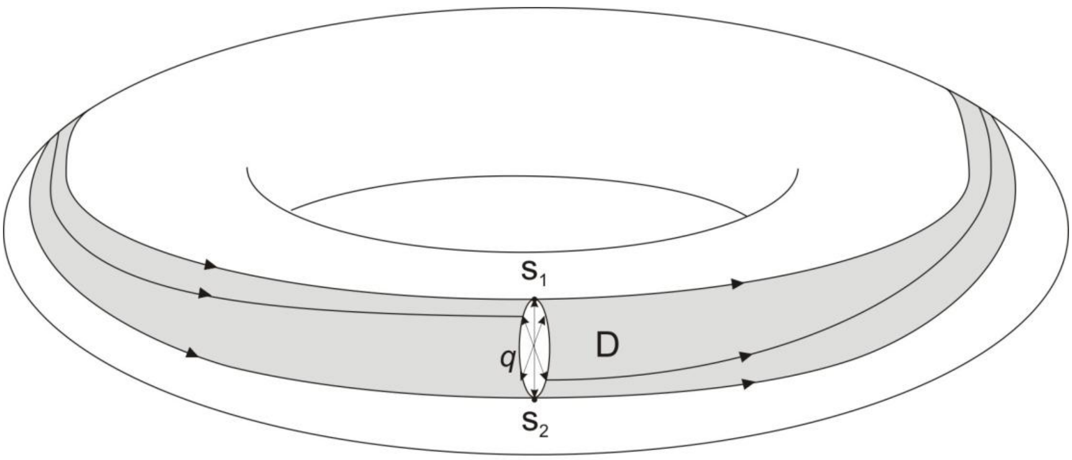

Рис.

валентный $\bar{g}^t$ поток гладкости C^1. Полученный поток является потоком типа Черри на M_3^2 (см. рис.).

Автор благодарит Е.В. Жужому за постановку задачи и полезные замечания.

Список литературы

1. Poincare H. // Math. Pures Appl. 1881. V. 1. № 7. P. 375–422.
2. Poincare H. // Math. Pures Appl. 1882. V. 2. № 10. P. 251–286.
3. Poincare H. // Math. Pures Appl. 1885. V. 3. № 1. P. 167–244.
4. Poincare H. // Math. Pures Appl. 1886. V. 4. № 2. P. 151–217.
5. Gutierrez C. // J. Diff. Eq. 1978. V. 29. № 3. P. 388–395.
6. Nogueira A. // J. Diff. Eq. 1987. V. 70. P. 153–166.
7. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Amer. Math. Soc., 1996. V. 153 of Translations of Math. Monographs.
8. Майер А.Г. // Мат. сборник. 1943. Т. 12, № 1. С. 71–84.
9. Арансон С.Х. // Мат. сборник. 1969. Т. 80 (122), № 3 (11). С. 314–333.
10. Denjoy A. // J. Math. Pures Appl. Ser. 1932. V. 9. № II. P. 333–375.
11. Арансон С.Х., Жужома Е.В. // Изв. вузов. Математика. 1976. № 5. С. 104–107.
12. Aranson S., Medvedev T., Zhuzhoma E.// Selecta Math. Sovietica. 1994. V. 13. № 4. P. 283–303.
13. Арансон С.Х., Жужома Е.В., Медведев Т.В. // Известия вузов. Математика. 1996. № 4(407). С. 7–17.
14. Жужома Е.В., Медведев Т.В. // Труды Средневолжского математического общества. 2003. Т. 5. № 1. С. 248–252.
15. Медведев Т. В. // Успехи мат. наук. 1992. № 4. С. 201–202.
16. Блохин А.А. // Труды Моск. мат. общества. 1972. Т. 27. С. 113–128.
17. Арансон С.Х., Гринес В.З. // Мат. сборник. 1973. Т. 90, № 3. С. 372–402.
18. Gardiner C. // J. DM. Equal. 1985. V. 57, № 1. P. 138–158.
19. Gutierrez C. // Ergod. Th. and Dyn. Sys. 1986. V. 6. P. 17–44.

CLASSIFICATION OF CHERRY TYPE FLOWS ON NONORIENTABLE SURFACE OF GENUS 3

T.V. Medvedev

The paper gives a topological classification of Cherry type flows on closed nonorientable surface of genus 3, i.e. the flows with finite number of fixed points, unique nowhere dense quasiminimal set and without closed trajectories and separatrix connections.

Keywords: flows on surfaces, quasiminimal set, topological classification.