УДК 517

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОРЕПРОДУКЦИИ

О.А. Кузенков, Г.В. Кузенкова, К.Р. Круподерова

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского

klimentinak@mail.ru

Поступила в редакцию 07.02.2011

Ставится задача управления для системы самовоспроизводящихся объектов. Цель управления заключается в неограниченно долгой поддержке существования системы. Особенность задачи состоит в том, что критерий качества управления формулируется в виде предела некоторой величины при стремлении времени к бесконечности.

Ключевые слова: коэффициент воспроизводства, самовоспроизводство, система авторепродукции, система с наследованием, управление, порядок предпочтительности, среднее временное, оптимизация.

Введение

В задачах управления важнейшую роль играет определение его цели. Цели управления могут быть заданы извне каким угодно образом, а могут определяться самой управляющей системой из своих собственных интересов и предпочтений. В этом последнем случае одной из основных целей является сохранение самой управляющей системы. Действительно, если некоторая управляющая система осуществляет целенаправленное воздействие на объекты управления, то прежде чем достигать с помощью него каких-то целей, она должна обеспечивать свое существование.

Чтобы задать указанный критерий, можно ввести параметр Z, который принимает значения от 0 до 1 и характеризует существование (нормальное функционирование или жизнедеятельность) управляющей системы в каждый момент времени t: $Z = 0$, если система разрушена; $Z = 1$, если система функционирует нормально; причем если $Z = 0$ в некоторый момент времени T, то при $t>T$ также справедливо равенство $Z = 0$ (один раз погибнув, система сама по себе не восстановится). Чем больше показатель Z, тем ближе состояние системы к нормальному. Наиболее удобно задать Z как функцию от фазовых координат системы. Тогда в фазовом пространстве можно выделить область нормального функционирования системы: $Z \geq 1-\varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число, и поставить задачу определения условий, при которых решение системы дифференциальных уравнений в течение некоторого времени не покидает заданное множество в фазовом пространстве. Это классическая задача выживания. Начало исследования такой задачи было положено в работах Нагумо [1].

Но, конечно, управляющая система при выборе управления не может довольствоваться только конечным временем существования. Предельный показатель существования системы на бесконечном времени можно характеризовать величиной $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t)$. При ближайшем рассмотрении оказывается, что такой критерий очень неудобен для системы при выборе ее поведения. При его реализации возникает ряд проблем.

Одна из них состоит в том, что для определения значения функционала необходимо бесконечное время эксперимента, но реально мы имеем дело лишь с конечными отрезками времени. Время существования реальных объектов всегда, как правило, ограничено. Следовательно, значение предельного показателя всегда будет равно нулю при любом выборе поведения.

В настоящей статье показано, как можно обойти эти сложности в частном случае – в системе самовоспроизводящихся (авторепродуцирующихся) объектов. Такие объекты привлекали внимание исследователей еще на заре возникновения кибернетики. Математическое изучение самовоспроизводящихся объектов было начато Дж. фон Нейманом [2]. Самовоспроизводящимися считаются объекты, которые могут создавать свои копии, передавая им свои качественные признаки, определяющие их существование в системе, в частности тот или иной способ управления. Несмотря на то, что время существования каждого отдельного объекта ограничено, время существования всей системы по сравнению с отдельным объектом может быть бесконечным (в рамках адекватности рассматриваемой модели). Одним из примеров этих объектов являются живые существа. Другой пример самовоспроизводящейся системы – капитал, занятый в экономическом производстве. Здесь объектами самовоспроизводства выступают денежные единицы, составляющие данный капитал. Явления самовоспроизводства широко распространены в окружающем мире. Их универсальность утверждается как один из постулатов современной теории информации: «Всякая информационная структура обладает способностью размножаться, то есть копировать свою конструкцию в сравнительно большом количестве экземпляров» [3].

1. Модели систем авторепродукции

Прежде всего необходимо определить, каким образом описать динамику системы самовоспроизводящихся объектов.

Рассмотрим множество однотипных элементов, способных к самовоспроизведению, элементы могут также «гибнуть» [4]. Предположим сначала, что все элементы одинаковы и воспроизводят в точности подобных себе (идеальное «наследование»). Рассмотрим в каждый момент времени t число элементов системы $Z(t)$. Очевидно, $Z \ge 0$. Обычно также предполагается, что функция Z гладкая. При достаточно большом числе элементов, если пренебречь флуктуациями, можно ожидать, что «в среднем» величина $Z(t)$ удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению:

$$\dot{Z} = G(Z,t)Z. \tag{1.1}$$

Коэффициент G, непрерывно зависящий от Z и t, называется коэффициентом воспроизводства. Из смысла модели следует, что решение уравнения (1.1) должно быть неотрицательным при неотрицательных начальных условиях, так как численность $Z(t)$ не принимает отрицательных значений.

Примером системы авторепродукции является модель Ферхюльста роста биомассы

$$\dot{Z} = rZ(1-\frac{Z}{W}).$$

Здесь Z – общее количество особей (биомасса), обитающих на некоторой территории, W – максимальное количество особей, которые могут сосуществовать на этой территории, не мешая друг другу (емкость среды), r – коэффициент размножения в благоприятных условиях.

Уравнение (1.1) описывает простейшую модель авторепродукции. В более сложных случаях в системе авторепродукции могут быть объекты различных видов. Тогда общая система распадается на множество связанных друг с другом подсистем. Пусть в системе есть n видов объектов, z_i – количество объектов i-го вида, g_i – коэффициент воспроизводства i-го вида. Если объекты i-го вида воспроизводят в точности подобных себе, то их динамику можно задать системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}_i = g_i(z,t)z_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Здесь $z = (z_1,\ldots, z_n)$, функции g_i непрерывны по своим аргументам.

Но может иметь место случай сложного воспроизводства: объекты вида A порождают объекты вида B, а объекты вида B порождают объекты вида A и т. п. В общем случае модель сложного воспроизводства описывается следующим уравнением:

$$\dot{z}_i = f_i(z,t), \ i = \overline{1,n}, \tag{1.3}$$

где функции $f_i(z, t)$ непрерывны по t и липшицевы по z. Очевидно, что модель (1.3) будет корректной лишь тогда, когда решение системы при любых неотрицательных начальных условиях будет неотрицательным. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции f_i удовлетворяли условию квазиположительности:

$$f_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \ldots, z_n) \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

при любых неотрицательных переменных z_j, $j \ne i$ [5].

Кроме того, должно выполняться следующее условие: если общее количество объектов всех видов в некоторый момент времени равно нулю, то в последующие моменты времени ни один объект больше не появится. Математически это приводит к требованию: если в момент времени t справедливо равенство

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i = 0, \tag{1.5}$$

то имеют место равенства

$$f_i(z,t) = 0, \ i = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Можно привести следующий пример системы авторепродукции, состоящей из двух связанных подсистем. Рассмотрим простейшую двухвозрастную модель клеточной популяции [6]. Популяция разбита на две группы клеток: молодые и старые. Молодыми будем считать клетки, в которых синтезируется белок, а старыми – все остальные. На поздних стадиях существования клетки выделяют ингибирующие кейлоны, угнетающе действующие на скорость деления. Клетки первой группы интенсивно растут, но не достигают физиологической зрелости и не способны делиться. Клетки второй группы могут делиться, но процесс деления может быть задержан под влиянием ингибиторов. С учетом действия ингибиторов уравнения динамики этой модели принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\dfrac{\sigma y}{1+y^n} - (\delta+1)x, \\ \dot{y} = x - \delta y - \dfrac{\sigma y}{1+y^n}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь x – количество молодых клеток, y – количество старых клеток, δ – смертность в популяции (или скорость протока), $\dfrac{\sigma}{1+y^n}$ – коэффициент скорости деления, зависящий от количества выделяемого ингибитора (и, соответственно, от количества старых клеток y), n – порядок ингибирования, σ – константа ингибирования, σ, δ, n – положительные константы. Коэффициент 2 в первом уравнении показывает, что при делении одной старой клетки возникают две молодые.

Как видно из системы (1.7), здесь выполняются требования, налагаемые на системы самовоспроизводства (1.4), (1.5), (1.6), но данная система не является системой строгого наследования.

Система авторепродукции может взаимодействовать с окружающей средой. При этом она будет подсистемой в общей модели взаимодействия. Если обозначить z – вектор переменных, характеризующих состояние системы авторепродукции, а y – m-мерный вектор переменных, характеризующих состояние окружающей среды, то динамику взаимодействия можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_i = f_i(t,z,y), \quad i=\overline{1,n}, \\ y = R(t,z,y). \end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь R – m-мерная вектор-функция, непрерывная по t и липшицева по z и y.

Рассмотрим модель Моно размножения микроорганизмов в культиваторе. Пусть x – концентрация клеток в культиваторе, y – концентрация питательного субстрата. Модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{yx}{1+y} - Dx, \\ \dot{y} = -\dfrac{yx}{1+y} + D(y_0 - y). \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь y_0 – концентрация субстрата, поступающего в культиватор, D – скорость протока, $\dfrac{y}{1+y}$ – коэффициент усвоения субстрата клетками. Первое уравнение описывает динамику системы авторепродукции, второе – изменения окружающей среды (концентрации субстрата).

Отметим, что в случае когда система авторепродукции распадается на совокупность подсистем авторепродукции (имеет место случай (1.3)), то может быть интересно следить за динамикой отдельной подсистемы, а воздействие остальных рассматривать как внешнее.

2. Задачи управления для систем авторепродукции

Если система авторепродукции может изменять свое поведение, то это приводит к изменению коэффициента воспроизводства. В простейшем случае управляемая система авторепродукции описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{Z} = G(t,Z,u)Z, \tag{2.1}$$

где Z – количество самовоспроизводящихся объектов в системе, t – время, u – управляющие параметры, значения которых зависят от поведения системы. Управление u в общем виде является кусочно-непрерывной функцией от t и от Z. Если управление зависит только от времени t, то оно называется программируемым управлением, если оно зависит только от фазовой переменной Z, то оно называется управлением с обратной связью. Управление осуществляется системой за счет выбора вариантов поведения, режимов функционирования и т. п. Оно может отражать и внешнее воздействие на систему.

В более общих случаях управляемая система авторепродукции задается системой уравнений

$$\dot{z}_i = f_i(t,z,u), \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.2}$$

или

$$\begin{cases} z_i = f_i(t,z,y,u), \quad i=\overline{1,n}, \\ y = R(t,z,y,u). \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь z_i – количество объектов i-го вида, функции f_i непрерывны по t и липшицевы по z и выбираются так, чтобы выполнялись условия (1.6), когда имеет место равенство (1.5), R – m-мерная вектор-функция, непрерывная по t и липшицева по z и y. Управление u является кусочно-непрерывной (или измеримой) функцией от t, определяемой поведением системы. На значения управляющих параметров накладывают стандартное ограничение – требование принадлежности фиксированной области допустимых значений области управления U.

Кусочно-непрерывную функцию времени, принимающую значения в области управления, называют допустимым управлением. Кроме того, могут накладываться ограничения на начальное состояние системы. Можно рассматривать задачу управления при фиксированных начальных условиях или начальных условиях из некоторой допустимой области.

Для системы авторепродукции (самовоспроизводящихся объектов) легко определяется показатель существования в каждый момент времени – количество объектов Z. В случае систем вида (2.2) или (2.3) число объектов Z определяется как сумма числа объектов всех подсистем $Z=z_1+\ldots+z_n$. Тогда предельный показатель существования системы – предел этого количества при стремлении времени к бесконечности. Неограниченно долгое существование системы будет обеспечено тогда и только тогда, когда этот предел будет отличен от нуля (в частности, если этот предел не существует).

Задача управления состоит в том, чтобы при данных начальных условиях найти допустимое управление $u(t)$, при котором выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) \neq 0, \tag{2.4}$$

(в частности, неравенство (2.4) имеет место, если $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t)$ не существует). Более сильным является требование найти допустимое управление, для которого при данных начальных условиях выполняется неравенство

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} Z(t) > 0. \tag{2.5}$$

Поскольку по предположению $Z(t)>0$ во все моменты времени, то требование (2.5) отличается от (2.4) лишь тем, что для выполнения (2.5) обязательно существование предела $\lim\limits_{t\to\infty} Z(t)$.

Таким образом, задача состоит в отыскании управления, обеспечивающего выполнение указанного неравенства. Цель управления, задаваемая в виде некоторого предельного неравенства, является особенностью данного класса задач по сравнению с классическими задачами управления. Существенным моментом является также рассмотрение управления на неограниченном интервале времени.

Рассмотрим для примера систему (1.9). Эта система имеет два состояния равновесия с координатами $x_{01}=0$, $y_{01}=y_0$ и $x_{02}=y_0-\dfrac{D}{1-D}$, $y_{02}=\dfrac{D}{1-D}$. Второе состояние равновесия попадает в область неотрицательных значений переменной x лишь в случае, когда $D \le \dfrac{y_0}{1+y_0} = D_0$. Исследуем устойчивость первого состояния равновесия. Корни характеристического уравнения имеют вид $l_1=-D$, $l_2=D_0-D$. При $D<D_0$ состояние равновесия будет седлом. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что ω-сепаратрисы идут по прямой $x = 0$, при этом α-сепаратриса идет внутрь полуплоскости $x>0$. Фазовая траектория, попавшая в малую ε-окрестность прямой $x = 0$ из положительной полуплоскости $x>0$, сначала движется вдоль ω-сепаратрисы к седлу, а затем уходит от седла в положительную полуплоскость $x>0$ вдоль α-сепаратрисы. Таким образом, существует окрестность точки $x = 0$ в подпространстве переменных x, такая, что проекция на это подпространство любой фазовой траектории, соответствующей начальным условиям с положительной координатой x, покидает эту окрестность.

При $D>D_0$ состояние равновесия будет устойчивым узлом, следовательно, при некоторых начальных условиях возможен случай, когда $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Рассмотрим случай параметрического управления. Пусть $D=D_1+u$, где D_1 – некоторая константа, u – управляющий параметр, значения которого принадлежат отрезку $[-c, c]$. Задача состоит в том, чтобы найти допустимое значение управляющего параметра, при котором выполняется неравенство (2.4). Как было показано выше, данное неравенство возможно лишь при выполнении условия $D<D_0$, отсюда $u<D_0-D_1$. Любое значение параметра u, удовлетворяющее этому неравенству, принадлежащее отрезку $[-c, c]$, является решением поставленной задачи управления.

Рассмотрим модель (1.7)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\dfrac{\sigma y}{1+y^n} - (\delta+1)x, \\ \dot{y} = x - \delta y - \dfrac{\sigma y}{1+y^n}. \end{cases}$$

Данная система имеет два состояния равновесия с координатами $x_{01}=0$, $y_{02}=0$ и x_{02}, y_{02}. Матрица линеаризованной системы в окрестности первого состояния равновесия имеет вид

$$\begin{vmatrix} -(\delta+1) & 2\sigma \\ 1 & -(\delta+\sigma) \end{vmatrix}.$$

Так как сумма диагональных элементов $-(2\delta+\sigma+1)$ всегда отрицательна, то при $\Delta=(\delta+1)(\delta+\sigma)-2\sigma>0$ состояние равновесия устойчиво, при $\Delta<0$ – неустойчиво и является седлом, α-сепаратриса которого идет в первую четверть фазовой плоскости. В этом случае $\lim(x+y)\neq 0$. Если $\delta<1$, то неравенство $\Delta<0$ эквивалентно условию $\sigma > \frac{\delta(\delta+1)}{1-\delta}$. Координаты второго состояния равновесия находятся из соотношений $x_{02} = \frac{2\delta y_{02}}{1-\delta}$, $y_{02}^n = \frac{\sigma(1-\delta)}{\delta(\delta+1)} - 1$. Отметим, что данное состояние равновесия попадает в область положительных значений фазовых координат только в случае, когда $\delta<1$ и $\sigma > \frac{\delta(\delta+1)}{1-\delta}$. Это состояние может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Если обозначить

$$\alpha = \sigma\frac{1+y_{02}^n(1-n)}{(1+y_{02}^n)^2} = \delta(\delta+1)\frac{\sigma(1-\delta)-n(\sigma-\delta)}{\sigma^2(1-\delta)^2},$$

то матрица линеаризованной системы в окрестности второго состояния равновесия будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -(\delta+1) & 2\alpha \\ 1 & -(\delta+\alpha) \end{vmatrix}.$$

Второе состояние равновесия будет устойчивым только при отрицательности суммы диагональных элементов этой матрицы и положительности ее определителя, что приводит к следующим неравенствам $\alpha<0$, $\delta<-\alpha$, $\delta^2+\delta+\alpha(\delta-1)>0$. Последнее неравенство при $\delta<1$ выполняется автоматически. Разрешая первые два неравенства, имеем $\sigma > \frac{n\delta}{n-1+\delta}$. Полученное неравенство является условием устойчивости второго состояния равновесия. Анализ изоклин показывает, что в этом случае состояние равновесия будет глобально устойчивым в области положительных значений фазовых координат. Таким образом, значение суммы фазовых координат (общей численности самовоспроизводящихся объектов) стремится к величине $x_{02} + y_{02} = \frac{1+\delta}{1-\delta}\sqrt[n]{\frac{(1-\delta)\sigma}{(1+\delta)\delta} - 1}$.

Пусть константа σ зависит от управляющего параметра u: $\sigma = \sigma_0 + u$; $|u| \le c$. Очевидно, что сумма фазовых координат $\frac{1+\delta}{1-\delta}\sqrt[n]{\frac{(1-\delta)(\sigma_0+u)}{(1+\delta)\delta} - 1}$ в этом случае монотонна по u. Так как $\delta > 0$, то она монотонно возрастает и достигает максимума $\frac{1+\delta}{1-\delta}\sqrt[n]{\frac{(1-\delta)(\sigma_0+c)}{(1+\delta)\delta} - 1}$ на границе области допустимых значений управляющего параметра $u=c$.

3. Задача оптимизации

Как уже отмечалось выше, в общем случае система авторепродукции неоднородна – в ней могут присутствовать элементы разных типов, отличающиеся друг от друга значениями некоторых параметров или способами поведения. При этом из единой системы можно выделить набор n взаимодействующих подсистем авторепродукции, z_i – численность i-й подсистемы. С течением времени элементы одних подсистем могут вытесняться другими, одни подсистемы могут постепенно вырождаться, а другие могут поддерживать свое существование неограниченно долго. В этом случае можно говорить о том, что одни подсистемы лучше решают задачу своего сохранения, чем другие. Если элементы этих подсистем отличаются только значениями определенных параметров, то это позволяет сравнивать друг с другом такие значения с точки зрения достижения цели выживания.

Будем говорить, что объекты первой группы лучше объектов второй группы, если предел отношения количества вторых объектов к количеству первых в общей системе воспроизводства стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности: j-й вид лучше i-го, если $\lim_{t\to\infty}\frac{z_i}{z_j} = 0$. Если при данных начальных условиях справедлива оценка $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} z_i(t) \le W$, где W – некоторая константа, и j-й вид лучше i-го, тогда $\lim_{t\to\infty} z_i = 0$. Действительно, так как $z_i = \frac{z_j z_i}{z_j} < W\frac{z_i}{z_j}$, то $\lim_{t\to\infty} z_i = 0$. Следовательно, система воспроизводства для i-го вида постепенно исчезает. Неограниченно долго может существовать только система воспроизводства того вида, которому подчинены все остальные виды относительно введенного порядка (наилучший в смысле введенного порядка вид).

Рассмотрим случай, когда разные виды отличаются друг от друга только значениями некоторых параметров, влияющих на коэффициент размножения, или способами поведения, приводящими к разным законам изменения этих параметров во времени. Пусть при этом динамика численности удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\dot z_i = a(z_i, u_i, g(z,u))z_i. \qquad (3.1)$$

Здесь u_i – значение параметра для i-го вида из некоторого общего множества допустимых значений, $u_i \in U \subset R^1, i=\overline{1,n}; u=(u_1,\ldots,u_n)$. В общем случае значение u_i зависит от времени, при этом $u_i(t)$ – кусочно-непрерывная функция времени, принимающая значения в множестве U. Обозначив $D[U]$ – множество кусочно-непрерывных функций со значениями в U, можно записать $u_i \in D[U], i=\overline{1,n}$. Функция a – коэффициент воспроизводства. Функция g отражает совокупное влияние всех видов на коэффициент размножения, это влияние одинаково для всех видов, поскольку виды отличаются только значениями параметров u_i.

Пусть, кроме того, зафиксировано начальное состояние системы. Тогда можно сравнивать значения параметров u_i или функции $u_i(t)$ с точки зрения задачи выживания, а именно считать u_i лучше u_j, если i-й вид лучше j-го.

Введенный порядок предпочтительности можно выразить посредством сравнения временных средних от коэффициента воспроизводства. Если при данных начальных условиях существуют временные средние коэффициентов воспроизводства $\langle g_i\rangle = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_i(t)dt, i=\overline{1,n}$, разные для разных индексов, то неравенство $\langle g_i\rangle < \langle g_j\rangle$ справедливо тогда и только тогда, когда j-й вид лучше i-го, т.е. наилучшим будет тот вид, у которого временное среднее от коэффициента воспроизводства наибольшее.

Не уменьшая общности, можно считать, что наилучшее значение будет соответствовать первому виду. Тогда можно сформулировать задачу оптимизации: найти функцию $u_1 \in D[U]$ (или значение $u_1 \in U$), при которой величина $\langle a(z_1,u_1,g(z,u))\rangle$ достигает абсолютного максимума при любом выборе $u_j \in D[U], j\neq 1$.

Иногда эту задачу оптимизации можно свести к классической задаче оптимального управления или вариационного исчисления. Если внешние условия периодически изменяются и поведение системы изменяется вместе с ними, то будет периодически изменяться и коэффициент воспроизводства. В этом случае среднее временное значение коэффициента размножения совпадает со средним значением на периоде, и задача оптимизации состоит в поиске максимума последней величины.

Для примера рассмотрим задачу определения оптимального режима суточных колебаний зоопланктона. Известно, что условия существования зоопланктона зависят от вертикальной координаты слоя воды и периодически изменяются в течение каждого дня. Объясняется это тем, что в поверхностных слоях воды есть пища и хищники, а в глубоководных слоях нет ни пищи, ни хищников, но хищники активны либо только днем, либо только ночью. Осуществление вертикальных перемещений в слоях воды требует метаболических затрат, которые снижают репродуктивную активность. Пусть x – вертикальная координата положения зоопланктона. В зависимости от x определяются условия размножения. Обозначим R – максимально возможное значение коэффициента размножения – удельную скорость размножения в самых благоприятных условиях. Будем считать, что уровень, наиболее благоприятный для размножения зоопланктона, с течением времени изменяется по закону $x_0(t)=\sin(2\pi t)$ (здесь время t измеряется в сутках); коэффициент размножения для слоя x уменьшается по мере удаления этого слоя от наиболее благоприятного и выражается следующим образом $R-(x-x_0(t))^2$.

Предположим далее, что метаболические затраты пропорциональны модулю скорости $|\dot{x}|$ изменения вертикальной координаты: чем выше скорость, тем больше затраты на осуществление колебаний; расход на перемещение вверх или вниз при одинаковой скорости одинаков [7]. Тогда суммарное значение коэффициента размножения имеет вид

$$G = R-(x-x_0(t))^2-\beta|\dot{x}|,$$

где $\beta>0$. Средний коэффициент размножения за период будет выражаться следующим образом

$$\int\limits_0^1 (R-(x-x_0(t))^2-\beta|\dot{x}|)dt. \tag{3.1}$$

В начальный момент времени координата $x(0)$ может иметь любое значение, но в конечный момент времени координата $x(1)$ должна совпасть с $x(0)$, иначе функцию $x(t)$ невозможно непрерывно периодически продолжить. Это приводит к равенству

$$x(0)=x(1). \tag{3.2}$$

Задача состоит в том, чтобы найти кусочно-гладкую функцию $x(t)$, удовлетворяющую равенству (3.2), на которой функционал (3.1) принимает наибольшее значение. Данная задача эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\int\limits_0^1 ((x-x_0(t))^2+\beta|\dot{x}|)dt.$$

Обозначим

$$\dot{x}=u, \tag{3.3}$$

введем сопряженную функцию $\psi(t)$, удовлетворяющую сопряженному уравнению

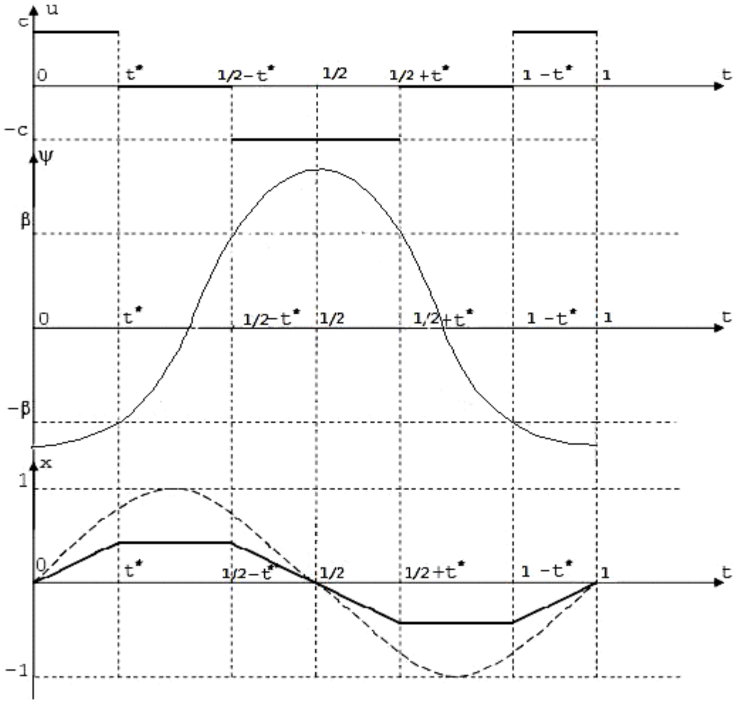

Рис.

$$\dot{\psi} = -2(x - x_0(t))$$

и краевым условиям

$$\psi(0) = \psi(1); \qquad (3.4)$$

а также функцию Гамильтона $H=\psi u+\beta|u|$. Минимум функции Гамильтона достигается на следующих значениях u:

$$u = \begin{cases} -c, & \psi > \beta \\ 0, & |\psi| < \beta \\ c, & \psi < -\beta \end{cases},$$

с учетом уравнения (3.4) имеем: $\dot{x} = c$, если $0 \le t \le t^*$ или $1 - t^* \le t \le 1$; $\dot{x} = 0$, если $t^* \le t \le \frac{1}{2} - t^*$ или $\frac{1}{2} + t^* \le t \le 1 - t^*$; $\dot{x} = -c$, если $\frac{1}{2} - t^* \le t \le \frac{1}{2} + t^*$.

Учитывая краевые условия (3.2) и (3.4) и непрерывность функции x, получаем

$$x = \begin{cases} ct, & 0 \le t \le t^* \\ ct^*, & t^* \le t \le \frac{1}{2} - t^* \\ -c(t - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} - t^* \le t \le \frac{1}{2} + t^*, \\ -ct^*, & \frac{1}{2} + t^* \le t \le 1 - t^* \\ c(t-1), & 1 - t^* \le t \le 1 \end{cases}$$

где t^* определяется из уравнения

$$4c(t^*)^2 - ct^* + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi t^*) = 2\beta.$$

Графики функций u, ψ и x представлены на рис.

Рассмотрим предыдущую задачу при условии, что $x_0(t)=\mathrm{sgn}\sin(2\pi t)$.

Данная задача решается аналогично предыдущей. В результате получаем:

$$x = \begin{cases} ct, & 0 \le t \le t_* \\ ct_*, & t_* \le t \le \frac{1}{2} - t_* \\ -c(t - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} - t_* \le t \le \frac{1}{2} + t_*, \\ -ct_*, & \frac{1}{2} + t_* \le t \le 1 - t_* \\ c(t-1), & 1 - t_* \le t \le 1 \end{cases}$$

где t_* определяется из уравнения

$$t_*^2 - t_*\left(\frac{c+4}{4c}\right) + \frac{1-2\beta}{4c} = 0.$$

Периодические перемещения в слоях воды, повторяющиеся каждый день, действительно зафиксированы в поведении ветвистоусого рачка, обитающего в озере Бабин (Британская Колумбия) [7].

Заключение

Таким образом, на множестве вариантов поведения введен порядок предпочтительности, и установлена его связь с временным средним коэффициента воспроизводства; критерий неограниченно долгого существования системы авторепродукции формализован в виде предела ее численности в бесконечности; управление рассматривается на неограниченном интервале времени. Задача оптимального управления сведена к задаче отбора подсистемы, реализующей наилучший вариант, а задача отбора, в свою очередь, сведена к задаче оптимизации временного среднего коэффициента воспроизводства.

Такой подход позволяет в системах самовоспроизводства обойти сложности, возникающие в классической теории управления. Единая система распадается на множество подсистем, отвечающих различным вариантам поведения, которые действуют независимо. Те подсистемы, поведение (или качественные характеристики) которых наиболее быстро приводят к собственному разрушению, исчезают из системы в первую очередь, и постепенно в системе остаются только те объекты, чье поведение может бесконечно долго поддерживать ее существование. Отдельные объекты могут изучать опыт других (даже избравших неправильный вариант поведения и погибших при этом) и использовать его при выборе своего поведения – так создается возможность для изучения системой ценности всех вариантов поведения и накопления информации о них. В результате система в целом находит оптимальный способ поведения.

Список литературы

1. Nagumo M. Uber die Lage der Intergralkurven gewohnlicer Differentilgleichungen// Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. V. 24. P. 551–559.
2. Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971. 326 с.
3. Новая теория информации [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.eme.ru/statii/nov\underline_toor.htm, свободный.
4. Розоноэр Л.И., Седых Е.И. О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем // Автоматика и телемеханика. 1979. № 2. С. 110–119.
5. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора: Учеб. пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2007. 324 с.
6. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
7. Менджел М., Кларк К. Динамические модели в экологии поведения. М.: Мир, 1992. 300 с.

CONTROL PROBLEM FOR AUTOREPRODUCTIVE SYSTEMS

O.A. Kuzenkov, G.V. Kuzenkova, K.R. Krupoderova

A control problem is set for a system of self-reproductive objects. The purpose of control is to maintain indefinitely the system existence. The peculiarity of the problem lies in the fact that the criterion of quality control is formulated as the limit of some value when time tends to infinity.

Keywords: reproduction rate, self-reproduction, autoreproductive system, system with inheritance, control, order of preference, time average, optimization.