УДК 536

О ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА ДИРАКА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г.Ф. Ефремов, Д.А. Петров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

efremov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 07.02.2011

Исследован характер движения электрона Дирака во внешнем постоянном магнитном поле с учетом эффекта дрожаний (zitterbewegung). Получено уравнение, описывающее изменение во времени оператора скорости электрона. Определены зависимости от времени операторов координаты и скорости электрона. Рассмотрен вопрос о квантовой нелокальности в теории Дирака, вызванной наличием дрожаний.

Ключевые слова: электрон Дирака, эффект дрожания (zitterbewegung), квантовая нелокальность.

1. Практически с самого начала существования квантовой механики возникли два совершенно равноправных представления квантовой динамики, определяющих эволюцию во времени физических систем. В современной литературе за ними закрепились названия: представление Шредингера и представление Гейзенберга. Основное отличие их заключается в том, что в представлении Гейзенберга вся динамика рассматриваемой системы, т.е. зависимость от времени физических величин, переносится с волновой функции на операторы, соответствующие этим величинам. Несмотря на физическую эквивалентность этих подходов, которая выражается в возможности математического перехода от одного представления к другому, первый метод используется в гораздо большем числе работ. Это, в первую очередь, связано со статистическим характером квантовой механики, интересующейся более спектрами собственных значений физических величин и вероятностями их измерения, чем эволюцией во времени их операторов. Но, несмотря на более частое применение представления Шредингера, уже в самом начале развития квантовой механики появились интересные по своему содержанию и выводам работы, основанные на представлении Гейзенберга. Среди них следует особо выделить работу самого Э. Шредингера [1] (также в русском переводе [2]), посвященную исследованию динамики движения свободного электрона в релятивистской квантовой механике.

В этих работах установлено, что движение свободного электрона носит достаточно сложный характер. Это проявляется в том, что, во-первых, скорость электрона приобретает самостоятельное значение наряду с его импульсом, во-вторых, движение свободного электрона не является в общем случае «прямолинейным». Причина этих особенностей, как показал Шредингер в [1], – наличие у электрона внутренней структуры, которая определяется его спиновым моментом.

Прежде чем перейти к основному содержанию этой работы, приведем в этом параграфе, в методических целях, решение Шредингера, проследив тем самым связь между приведенными выше особенностями движения свободного электрона в релятивистской квантовой механике.

Из теории Дирака [3] следует, что гамильтониан релятивистского электрона имеет вид

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta_3 mc^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}$ – вектор импульса электрона, $\boldsymbol{\alpha} = \beta_1\boldsymbol{\sigma}$ и β_i (i=1, 2, 3) – матрицы Дирака, обладающие следующими свойствами

$$\alpha_i^2 = 1,\ \ \alpha_i\cdot\alpha_j = ie_{ijk}\sigma_k,\quad i\neq j,$$
$$\alpha_i\cdot\alpha_j + \alpha_j\cdot\alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (2)$$

$$\beta_i^2 = 1,\ \ \beta_i\cdot\beta_j = ie_{ijk}\beta_k,\ \ i\neq j,$$
$$\beta_i\cdot\beta_j + \beta_j\cdot\beta_i = 2\delta_{ij}, \quad (3)$$
$$\sigma_i\cdot\beta_j - \beta_j\cdot\sigma_i = 0, \quad (4)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – вектор, состоящий из матриц Паули.

Как известно, свободный электрон обладает семью интегралами движения: энергия, три проекции импульса, а также три проекции полного момента импульса.

Согласно представлению Гейзенберга, операторы физических величин подчиняются следующему уравнению

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H], \qquad (5)$$

где $A(t)$ – оператор, соответствующий физической величине A, H – гамильтониан системы.

Используя уравнение (5), гамильтониан (1) и свойства (2) – (4), запишем уравнение движения для оператора координаты и скорости электрона:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) = c\alpha_x(t), \qquad (6)$$

$$\frac{d\alpha_x(t)}{dt} = \frac{1}{ih}\left(\alpha_x(t)H - H\alpha_x(t)\right) = \\ = \frac{2c}{\hbar}[\boldsymbol{\sigma}(t)\times\mathbf{p}]_x - 2\frac{mc^2}{\hbar}\beta_2(t)\cdot\sigma_x(t). \qquad (7)$$

Уравнения (6) и (7) являются удивительными во всех отношениях. Как известно из классической релятивистской механики, скорость электрона связана с его импульсом известным соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E}, \qquad (8)$$

где m – масса движущегося электрона, E – его энергия. Согласно же уравнению (6), в релятивистской квантовой механике связь между скоростью и импульсом (8) нарушается, причем скорость, как и импульс, приобретает самостоятельное значение, поскольку, согласно уравнению (7), уже не является сохраняющейся величиной, а это, в свою очередь, означает, что скорость электрона несет в себе определенную информацию о характере его движения. Подробный анализ физического содержания соотношения (6) произведен Шредингером в работе [1].

В общем случае для решения уравнения (7) необходимо знать зависимость от времени операторов $\sigma_{x,y,z}(t)$ и $\beta_2(t)$, которые также подчиняются определенным уравнениям, содержащим, из-за коммутационных соотношений (2) – (4), неизвестную скорость – $c\alpha_x(t)$. Это говорит о том, что для определения $\alpha_x(t)$ необходимо решить систему дифференциальных уравнений, состоящую, в случае пространственного движения электрона, из девяти уравнений: уравнений для трех проекций $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и $\boldsymbol{\sigma}(t)$, а также трех уравнений для матриц $\beta_{1,2,3}(t)$. Если еще учесть, что эти матрицы обладают коммутационными соотношениями (2) – (4), то решение системы даже в случае свободного движения электрона представляет большие трудности. К счастью, как показано в цитированной работе Шредингера, этих трудностей можно избежать, решив одно дифференциальное уравнение, правда, второго порядка, вместо системы из девяти уравнений. Это можно сделать следующим образом.

Как уже было сказано раньше, у свободного электрона одним из интегралов движения является энергия, причем, учитывая (2), легко показать, что имеет место следующее соотношение

$$\alpha_x(t)H + H\alpha_x(t) = 2cp_x. \qquad (9)$$

Уравнение (7) может быть переписано в виде

$$ih\frac{d\alpha_x(t)}{dt} = 2\alpha_x(t)H - 2cp_x = 2cp_x - 2H\alpha_x(t). \qquad (10)$$

Поскольку $\alpha_x(t)$ и H не коммутируют друг с другом, то в уравнении (10) является принципиальным положение оператора H. Поэтому дальше везде в этой работе будем рассматривать случай, когда оператор H находится справа от $\alpha_x(t)$.

Учитывая, что энергия и импульс электрона являются интегралами движения, возьмем от правой и левой части уравнения (10) производную по времени

$$i\hbar\frac{d^2\alpha_x(t)}{dt^2} = 2\frac{d\alpha_x(t)}{dt}H. \qquad (11)$$

Решая уравнение (11), найдем

$$\dot{\alpha}_x(t) = \dot{\alpha}_x(0)e^{-i\frac{2H}{\hbar}t}. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получим

$$\alpha_x(t) = \frac{cp_x}{H} + \dot{\alpha}_x(0)\frac{i\hbar}{2H}e^{-i\frac{2H}{\hbar}t}. \qquad (13)$$

Умножая (13) на скорость света и интегрируя по времени, окончательно найдем

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2p_x}{H}t - \dot{\alpha}_x(0)\frac{c\hbar^2}{4H^2}e^{-i\frac{2H}{\hbar}t}. \qquad (14)$$

Остановимся подробнее на решении (14). Видно, что движение свободного электрона перестает быть «прямолинейным», при этом следует заметить, что второе слагаемое в (14) линейно растет со временем, причем коэффициент при t является обычной скоростью электрона, соответствующей импульсу p_x.

Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, в квантовой механике электрон вообще не имеет траектории движения. Поэтому понятие «прямолинейное движение» нуждается в уточнении. В данной работе под ним имеется в виду зависимость от времени оператора координаты свободного электрона

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}t,$$

где $\mathbf{V}$ есть оператор его скорости, получающаяся в результате решения уравнения Гейзенберга для этого оператора и совпадающая по форме с решением уравнений классической физики для координаты свободного электрона. Здесь же следует отметить, что, решая задачу в представлении Гейзенберга, все же можно получить некоторое представление о характере движения электрона, т.е. его траектории. Для этого необходимо усреднить оператор координаты этого электрона, явно зависящий от времени, по некоторому состоянию, определяющемуся волновой функцией электрона. При этом, поскольку усреднение производится по пространственным координатам, зависимость от времени среднего значения физической величины, соответствующей данному оператору, будет такой же, как и у самого оператора. Это, в свою очередь, означает, что зная вид функциональной зависимости, например, оператора координаты электрона от времени мы тем самым знаем характер движения данного электрона.

Вернемся к уравнению (14). Последнее слагаемое в этом уравнении быстро осциллирует около среднего значения и представляет, согласно Шредингеру [1], микроскопическое дрожательное (zitterbewegung) движение электрона, наряду с макроскопическим, определяемым скоростью $\bar{V}_x = c^2 p_x / H$. Содержание понятия «микроскопическое движение» можно выяснить, если оценить амплитуду высокочастотных колебаний в (14). Согласно [1], она имеет следующий порядок

$$\xi \sim \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-11} \text{ [см]},$$

т.е. порядок минимального размера электрона как волнового пакета. Поэтому для электрона с макроскопической скоростью $\bar{V}_x = c^2 p_x / H$ отклонение центра тяжести облака заряда от прямолинейной траектории будет много меньше протяженности этого облака заряда. В этом как раз и заключается микроскопичность дрожательного движения электрона.

Несмотря на то, что эффект дрожательного движения был открыт Шредингером в 30-х годах прошлого века, он продолжает привлекать внимание многих физиков [4–19], занимающихся релятивистской квантовой механикой, и даже специалистов из других областей теоретической физики [20].

Установим связь рассмотренных выше эффектов с внутренней структурой электрона, т.е. с его спином.

В классической релятивистской механике у свободного электрона кроме энергии и импульса сохраняется еще и момент импульса. Но в релятивистской квантовой механике момент импульса свободного электрона не является интегралом движения. Это видно уже из следующего соотношения

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}] = c[\boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{p}]. \quad (15)$$

Но, согласно гамильтониану (1), для матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ имеет место следующее уравнение

$$\frac{\hbar}{2}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = c[\mathbf{p} \times \boldsymbol{\alpha}(t)]. \quad (16)$$

Поэтому, складывая (15) и (16) получим новый интеграл движения

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0,$$

или

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = \text{const}, \quad (17)$$

где $\hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ определяет оператор нового момента, получившего название спинового, а $\mathbf{J}$ – полный момент электрона. Таким образом, в релятивистской квантовой механике вместо момента импульса свободного электрона сохраняется его полный момент (17).

Перейдем теперь к основному содержанию данной работы. Согласно вышеизложенным результатам цитированной работы Шредингера, в релятивистской квантовой механике нарушается связь между импульсом электрона и его скоростью вследствие наличия у электрона спинового момента. В результате этого кардинально изменяется движение даже свободного электрона. В связи с этим представляет большой интерес определение характера движения электрона в релятивистской квантовой механике в случае, когда в классическом пределе это движение хорошо изучено и определено. Таким движением является, в частности, движение классического релятивистского электрона в однородном постоянном магнитном поле. Как известно, если электрон имеет в направлении магнитного поля составляющую скорости, то его траекторией движения является винтовая линия с центром вдоль направления поля, если же такой компоненты нет, то он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению поля. Но этот результат справедлив только в случае, когда выполняется соотношение (8) между скоростью и импульсом электрона. В релятивистской квантовой механике этого соотношения не существует, поэтому возникает вопрос о характере движения релятивистского электрона – электрона Дирака – в постоянном магнитном поле. Ответу на этот и некоторые другие вопросы и посвящена оставшаяся часть работы.

2. Рассмотрим систему, состоящую из электрона Дирака и действующего на него однородного постоянного магнитного поля, имеющего, для простоты, одну составляющую

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}_0. \tag{18}$$

Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + \beta_3 mc^2, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$ – кинетический импульс электрона, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал магнитного поля.

Математически задача заключается в определении уравнений для $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$, с учетом магнитного поля, и их решении.

Прежде чем перейти к выводу искомых уравнений, рассмотрим вопрос об интегралах движения для данной системы. Если у свободного электрона существует семь интегралов движения, то в случае его взаимодействия с магнитным полем их количество сокращается до трех. Это энергия, проекция импульса и полного момента в направлении поля. Сокращение числа интегралов движения приводит к увеличению количества уравнений для определения динамики электрона, а именно к девяти уравнениям, перечисленным в предыдущем параграфе для свободного электрона, но уже с учетом магнитного поля, необходимо добавить еще шесть уравнений: три уравнения для проекции кинетического импульса $\boldsymbol{\pi}$ и три уравнения для проекций момента импульса $\mathbf{L}$ или полного момента $\mathbf{J}$ электрона. В итоге получается система из 15 дифференциальных уравнений, решение которой, в общем случае, представляет как большой интерес, так и исключительные трудности. Но в данном случае, т.е. для постоянного магнитного поля, этих трудностей можно избежать, поскольку одним из интегралов движения, как и в случае свободного движения электрона, является его энергия, что дает возможность применить к изучаемой системе метод, использованный в предыдущем параграфе.

Итак, перейдем к выводу уравнений для $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$. Из гамильтониана (19) и уравнения (5) для $\mathbf{r}(t)$ видно, что в случае наличия магнитного поля остается справедливым уравнение (6), т.е.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = c\boldsymbol{\alpha}(t). \tag{20}$$

Вычислим далее следующий антикоммутатор

$$[\boldsymbol{\alpha}, H]_+ = \boldsymbol{\alpha}H + H\boldsymbol{\alpha}. \tag{21}$$

Используя выражение для $\boldsymbol{\alpha}$ через матрицы β_1 и $\boldsymbol{\sigma}$, антикоммутирующие соотношения (3), а также формулы

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{b})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} + i[\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{b}], \quad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{b} + i[\mathbf{b}\times\boldsymbol{\sigma}],$$

где $\mathbf{b}$ – произвольный вектор, найдем

$$\boldsymbol{\alpha}H + H\boldsymbol{\alpha} = 2c\boldsymbol{\pi}(t). \tag{22}$$

Выражая из (22) $H\boldsymbol{\alpha}$ и подставляя в уравнение

$$ih\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}(t)H - H\boldsymbol{\alpha}(t), \tag{23}$$

получим

$$ih\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = 2\boldsymbol{\alpha}(t)H - 2c\boldsymbol{\pi}(t). \tag{24}$$

Определим теперь уравнение для импульса $\boldsymbol{\pi}(t)$. Для этого вычислим коммутатор $[\boldsymbol{\pi}(t), H]$:

$$[\boldsymbol{\pi}(t), H] = \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \left(\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)\right] =$$

$$= -\frac{e}{c}[\mathbf{p}, (\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{A})] - \frac{e}{c}[\mathbf{A}, (\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{p})] =$$

$$= i\hbar\frac{e}{c}\left\{\nabla(\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\nabla)\mathbf{A}\right\} \tag{25}$$

и учитывая, что

$$\nabla(\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{A}) = [\dot{\mathbf{r}}(t)\times \mathrm{rot}\mathbf{A}] + (\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\nabla)\mathbf{A},$$

с учетом (25), найдем

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}(t)\times\mathbf{B}]. \tag{26}$$

Дифференцируя далее (24) по времени и подставляя в получившееся выражение (26), получим следующее уравнение для оператора скорости электрона Дирака

$$ih\frac{d^2\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt^2} - 2\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt}H + 2ec[\boldsymbol{\alpha}(t)\times\mathbf{B}] = 0. \tag{27}$$

Преобразуем (27) к виду

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\frac{ih}{2H} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) + [\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\omega}_L]\frac{mc^2}{H} = 0, \tag{28}$$

где $|\boldsymbol{\omega}_L| = eB_0/mc$ – циклотронная (ларморовская) частота электрона.

Уравнение (28) имеет несколько особенностей. В первую очередь, следует заметить, что в отсутствие магнитного поля оно переходит в уравнение (11). Во-вторых, первое слагаемое в (28) является очень маленькой величиной по сравнению с остальными членами данного уравнения. В-третьих, в нерелятивистском пределе, когда можно считать $H \sim mc^2$, из (28) получается известное из нерелятивистской физики уравнение для скорости электрона в магнитном поле

$$\frac{dc\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = [\mathbf{v}(t)\times\boldsymbol{\omega}_L]. \tag{29}$$

Перейдем теперь к решению уравнения (28). Поскольку магнитное поле имеет одну компоненту вдоль оси oz, то в направлении магнитного поля, с учетом сохранения соответствующей компоненты импульса электрона, для системы уравнений (20) и (28) применимы решения (12) и (14) для свободного электрона, т.е.

$$\dot{\alpha}_z(t) = \dot{\alpha}_z(0) e^{-i\frac{2H}{\hbar}t}, \qquad (30)$$

$$z(t) = z_0 + \frac{c^2 p_z}{H} t - \dot{\alpha}_z(0) \frac{c\hbar^2}{4H^2} e^{-i\frac{2H}{\hbar}t}. \qquad (31)$$

Для компонент же α_x и α_y из (28) получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{\alpha}_x(t) \frac{ih}{2H} - \dot{\alpha}_x(t) + \alpha_y(t) \frac{mc^2}{H} \omega_L = 0, \qquad (32)$$

$$\ddot{\alpha}_y(t) \frac{ih}{2H} - \dot{\alpha}_y(t) - \alpha_x(t) \frac{mc^2}{H} \omega_L = 0. \qquad (33)$$

Умножая (33) на мнимую единицу и складывая с (32), найдем

$$\ddot{\alpha}_+(t) \frac{ih}{2H} - \dot{\alpha}_+(t) - i\alpha_+(t) \frac{mc^2}{H} \omega_L = 0, \qquad (34)$$

где $\alpha_+(t) = \alpha_x(t) + i\alpha_y(t)$.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\alpha_+(t) = A e^{-i\lambda t}. \qquad (35)$$

Подставляя (35) в (34) и решая характеристическое уравнение, найдем

$$\lambda_{1,2} = \frac{H}{\hbar}\left(1 \pm \sqrt{1-p}\right), \quad p = \hbar\omega_L \frac{2mc^2}{H^2}. \qquad (36)$$

Остановимся более подробно на соотношениях (36). Заметим, что раньше нигде не предполагалось, что магнитное поле является слабым. Поэтому, согласно (35), (36), решение для $\alpha_+(t)$ при некоторых значениях магнитного поля становится неустойчивым, возникают экспоненциально спадающие и нарастающие решения.

Оценим нижнюю границу значений магнитного поля, при которых решение становится неустойчивым. Для этого достаточно считать, что $H \sim mc^2$. Тогда из (36) найдем следующее условие

$$\omega_L^* > \Omega = \frac{2mc^2}{\hbar} \sim 10^{21} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right], \qquad (37)$$

что соответствует магнитным полям порядка 10^{17} [Гс]. Согласно [21, 22], даже такие космические объекты, как пульсары и нейтронные звезды, обладают магнитным полем, которое по значению много меньше, чем приведенное выше. Это говорит о том, что решение для $\alpha_+(t)$ при любых встречающихся в природе магнитных полях является устойчивым.

Как известно, состояние электрона в магнитном поле характеризуется определенным энергетическим спектром, уровни энергии которого принято называть уровнями Ландау. Этот спектр имеет вид [23]

$$E_n^2 = m^2c^4 + c^2 p_z^2 + \\ + c^2\hbar\omega_L\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_L}{2}\sigma_z, \qquad (38)$$

где σ_z имеет значения ± 1. Учитывая этот факт, заменим в (36) оператор Гамильтона его собственными значениями (38).

Теперь, поскольку $p << 1$, представим $\lambda_{1,2}$ в виде ряда по этому параметру, ограничившись только линейными членами. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{2E_n}{\hbar}, \quad \lambda_2 = \omega_L \frac{mc^2}{2E_n}, \quad \lambda_2 << \lambda_1. \qquad (39)$$

Соотношение частот $\lambda_2 << \lambda_1$ показывает, что $\alpha_+(t)$ содержит быстрые и медленные колебания.

В итоге решение уравнения (34) имеет следующий вид

$$\alpha_+(t) = A_1 e^{-i\lambda_1 t} + A_2 e^{-i\lambda_2 t}, \qquad (40)$$

где постоянные коэффициенты $A_{1,2}$ определяются из начальных условий.

Вычисление неизвестных коэффициентов $A_{1,2}$ может быть произведено различными способами. В общем случае необходимо решить систему уравнений относительно $A_{1,2}$, образованную из (40) и уравнения для $\dot{\alpha}_+(t)$ при $t = 0$. Но в данном случае используем другой способ. Это связано с одним из свойств уравнения (28), а именно со свойством, заключающимся в том, что при $B_0 = 0$ это уравнение переходит в уравнение для свободного электрона, решение которого имеет вид (13) с уже известными коэффициентами. Но раз это так, то, с необходимостью, искомые коэффициенты $A_{1,2}$ при $B_0 = 0$ должны переходить в известные коэффициенты уравнения (13), и этого достаточно для их определения. Действительно, устремляя в (40) магнитное поле к нулю и сравнивая с (13), легко найти, что

$$A_1 = \dot{\alpha}_+(0) \frac{i\hbar}{2E_n}, \quad A_2 = \frac{c\pi_+(0)}{E_n}, \qquad (41)$$

где $\pi_+(0) = \pi_x(0) + i\pi_y(0)$, а $\pi_x(0)$ и $\pi_y(0)$ – компоненты начального импульса электрона.

В дальнейшем при исследовании характера движения электрона нам потребуются две формы решения (40). Их отличие заключается в том, что в первой форме магнитное поле не предполагается равным нулю, а во второй это значение допустимо, причем при $B_0 = 0$ вторая форма переходит в решение для свободного электрона.

Для определения первой формы подставим (41) в (40). Выделяя теперь действительную и мнимую части, получим

$$\alpha_x(t) = \frac{c\pi_x(0)}{E_n}\cos(\lambda_2 t) + \frac{c\pi_y(0)}{E_n}\sin(\lambda_2 t) + \frac{\dot\alpha_x(0)}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) - \frac{\dot\alpha_y(0)}{\lambda_1}\cos(\lambda_1 t), \tag{42}$$

$$\alpha_y(t) = -\frac{c\pi_x(0)}{E_n}\sin(\lambda_2 t) + \frac{c\pi_y(0)}{E_n}\cos(\lambda_2 t) + \frac{\dot\alpha_x(0)}{\lambda_1}\cos(\lambda_1 t) + \frac{\dot\alpha_y(0)}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t). \tag{43}$$

Далее, умножая (42), (43) на скорость света и интегрируя эти выражения по времени, найдем

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2\pi_x(0)}{E_n}\frac{\sin(\lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{c^2\pi_y(0)}{E_n}\frac{\cos(\lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{c\dot\alpha_x(0)}{\lambda_1^2}\cos(\lambda_1 t) - \frac{c\dot\alpha_y(0)}{\lambda_1^2}\sin(\lambda_1 t), \tag{44}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{c^2\pi_x(0)}{E_n}\frac{\cos(\lambda_2 t)}{\lambda_2} + \frac{c^2\pi_y(0)}{E_n}\frac{\sin(\lambda_2 t)}{\lambda_2} + \frac{c\dot\alpha_x(0)}{\lambda_1^2}\sin(\lambda_1 t) - \frac{c\dot\alpha_y(0)}{\lambda_1^2}\cos(\lambda_1 t), \tag{45}$$

где x_0 и y_0 определяются начальными условиями.

Выпишем здесь для полноты решение для $z(t)$, записанное в первой форме

$$z(t) = z_0 + \frac{c^2\pi_z}{H}t - \frac{c\dot\alpha_z(0)}{\lambda_1^2}\cos(\lambda_1 t). \tag{46}$$

Выражение (46) получается после выделения действительной части из решения (31).

Перейдем теперь к определению второй формы решения (40). Для этого воспользуемся уравнением (24) при $t = 0$

$$\dot\alpha_+(0)\frac{i}{\lambda_1} = \alpha_+(0) - \frac{c\pi_+(0)}{E_n}. \tag{*}$$

Выделим в (40), после подстановки выражения (41), действительную и мнимую части, оставляя $\dot\alpha_+(0)$ и $\pi_+(0)$, т.е.

$$\alpha_+(t) = \dot\alpha_+(0)\frac{i}{\lambda_1}\cos(\lambda_1 t) + \dot\alpha_+(0)\frac{1}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) + \frac{c\pi_+(0)}{E_n}\left(\cos(\lambda_2 t) - i\sin(\lambda_2 t)\right), \tag{47}$$

или с учетом (*) получим

$$\alpha_+(t) = \alpha_+(0)\cos(\lambda_1 t) + \dot\alpha_+(0)\frac{1}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) + \frac{c\pi_+(0)}{E_n}\left(\cos(\lambda_2 t) - \cos(\lambda_1 t) - i\sin(\lambda_2 t)\right). \tag{48}$$

Умножая (48) на скорость света, интегрируя по времени и выделяя действительную и мнимую части, окончательно найдем зависимость компонент оператора координаты электрона Дирака от времени

$$x(t) = \alpha_x(0)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) + \dot\alpha_x(0)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1 t)) + \frac{c^2}{E_n}\left(\pi_x(0)\left(\frac{\sin(\lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{\sin(\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right) - \pi_y(0)\frac{\cos(\lambda_2 t) - 1}{\lambda_2}\right), \tag{49}$$

$$y(t) = \alpha_y(0)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) + \dot\alpha_y(0)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1 t)) + \frac{c^2}{E_n}\left(\pi_y(0)\left(\frac{\sin(\lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{\sin(\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right) + \pi_x(0)\frac{\cos(\lambda_2 t) - 1}{\lambda_2}\right). \tag{50}$$

Выпишем здесь решение для $z(t)$ во второй форме

$$z(t) = \alpha_z(0)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t) + \dot\alpha_z(0)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1 t)) + \frac{c^2\pi_z(0)}{H}\left(t - \frac{\sin(\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right). \tag{51}$$

Выражение (51) получается так же, как и (49), (50).

Проверим получившиеся решения (49), (50), осуществив в них предельный переход, устремляя магнитное поле к нулю. При этом $\lambda_2 \to 0$,

$$\frac{\sin(\lambda_2 t)}{\lambda_2} \to t, \quad \frac{\cos(\lambda_2 t) - 1}{\lambda_2} \to 0,$$

что, в итоге, дает из (49), (50) следующие решения

$$x(t)=\alpha_x(0)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t)+\dot{\alpha}_x(0)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1 t))+$$
$$+\frac{c^2 p_x(0)}{H}\left(t-\frac{\sin(\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right),$$
$$y(t)=\alpha_y(0)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t)+\dot{\alpha}_y(0)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1 t))+$$
$$+\frac{c^2 p_y(0)}{H}\left(t-\frac{\sin(\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right),$$

совпадающие по форме с (51) для свободного электрона.

3. Прежде чем приступить к исследованию полученных решений, вспомним основные свойства движения классического релятивистского электрона в постоянном однородном магнитном поле, имеющем направление (18). Это движение характеризуется тем, что, во-первых, компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю, остается постоянной по модулю, т.е.

$$|\mathbf{v}_\perp|=\sqrt{V_x^2(t)+V_y^2(t)}=\text{const}, \qquad (52)$$

во-вторых, траектории движения представляют собой винтовую линию с осью вдоль магнитного поля, причем в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, они являются окружностями с постоянным радиусом, имеющим вид [24]

$$r_L=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\frac{|\mathbf{v}_\perp|}{\omega_L}=\text{const} \qquad (53)$$

Основные эффекты, следующие из решения (42)–(45), заключаются в том, что для электрона Дирака в магнитном поле соотношения (52), (53) нарушаются, т.е., другими словами, как скорость $|\mathbf{v}_\perp|$, так и радиус орбиты электрона становятся функциями времени.

Перейдем к определению этих функциональных зависимостей. Сначала рассмотрим эффект, связанный со скоростью электрона. Умножая выражения (42) и (43) на скорость света, перепишем их в следующем виде

$$V_x(t)=V_x(0)\cos(\lambda_2 t)+V_y(0)\sin(\lambda_2 t)+$$
$$+v_x(0)\sin(\lambda_1 t)-v_y(0)\cos(\lambda_1 t), \qquad (54)$$

$$V_y(t)=-V_x(0)\sin(\lambda_2 t)+V_y(0)\cos(\lambda_2 t)+$$
$$+v_x(0)\cos(\lambda_1 t)+v_y(0)\sin(\lambda_1 t), \qquad (55)$$

где $V_{x,y}(0)=c^2\pi_{x,y}(0)/E_n$ есть компоненты начальной макроскопической скорости электрона, а $v_{x,y}(0)=c\dot{\alpha}_{x,y}(0)/\lambda_1$ – компоненты начальной скорости электрона, соответствующие его дрожательному движению. Прежде чем подставить (54) и (55) в (52), оценим порядок величин $V_{x,y}(0)$ и $v_{x,y}(0)$, входящих в эти формулы. Поскольку мы рассматриваем релятивистский электрон, то порядок $V_{x,y}(0)$ является достаточно высоким. Рассмотрим теперь $v_{x,y}(0)$:

$$v_{x,y}(0)=\frac{c}{\lambda_1}\frac{d\alpha_{x,y}(0)}{dt}\sim\frac{c}{\lambda_1}\frac{\alpha_{x,y}(0)}{\tau}, \qquad (56)$$

где $\alpha_{x,y}(0)\sim 1$, а τ – некоторое характерное время в данной задаче. Как было выяснено в предыдущем параграфе, согласно формулам (39), (40) решение для скорости (54), (55) содержит быстрые и медленные колебания. Поэтому характерное время τ имеет два значения, соответствующие этим быстрым и медленным колебаниям. Для быстрых колебаний это время имеет порядок

$$\tau\sim\frac{1}{\lambda_1}\sim 10^{-22}\ [\text{c}]. \qquad (57)$$

На таких временах движение электрона можно всегда считать свободным. Это обстоятельство должно определенным образом отразиться на формулах (54) и (55), а именно, они должны перейти в формулы, определяющие скорость свободного электрона, т.е. в (13). Действительно, в формулах (54), (55) можно с большой точностью считать, что

$$\cos(\lambda_2 t)=1,\ \ \sin(\lambda_2 t)=0, \qquad (58)$$

где $t\sim\tau$. Тогда, умножая уравнение (55) на мнимую единицу, складывая с (54) и выделяя действительную и мнимую части, найдем

$$V_{x,y}(t)=V_{x,y}(0)+c\dot{\alpha}_{x,y}(0)\frac{i}{\lambda_1}e^{-i\lambda_1 t}, \qquad (59)$$

что полностью совпадает с решением для свободного электрона. Этот случай здесь не представляет особого интереса.

Рассмотрим теперь второй случай, когда характерное время τ имеет следующий вид

$$\tau\sim\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{\omega_L}\frac{E_n}{mc^2} \qquad (60)$$

и, в зависимости от величины магнитного поля и энергии электрона, может быть как меньше, так и больше единицы. При этом величина начальной скорости электрона, соответствующей дрожательному движению, будет иметь вид

$$v_{x,y}(0)\sim\frac{c}{\lambda_1}\frac{\alpha_{x,y}(0)}{\tau}=c\alpha_{x,y}(0)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\le\lambda_c\omega_L, \qquad (61)$$

где $\lambda_C=\hbar/mc$ – комптоновская длина волны электрона. Формула (61) позволяет оценить значение магнитного поля, при котором макроскопическая скорость электрона по величине будет сравнима со скоростью его дрожательного движения

$$\lambda_c \omega_L \sim V_0,$$

или

$$B_0^* \sim V_0 \frac{(mc)^2}{e\hbar} = 4.42 \cdot 10^3 \cdot V_0 \text{ [Гс]}. \tag{62}$$

Так, например, для электрона со скоростью $V_0 \sim 10^7$ [см/с] это магнитное поле имеет значение $B_0^* \sim 10^{10}$ [Гс], т.е. как для слаборелятивистских, так и для ультрарелятивистских электронов магнитное поле, при котором $v_{x,y}(0)$ и $V_{x,y}(0)$ имеют одинаковый порядок, является достаточно сильным. Такие поля встречаются у некоторых космических объектов, например у нейтронных звезд [22].

Перейдем теперь к вычислению $|\mathbf{v}_\perp|$. Рассмотрим сначала случай слабых магнитных полей. Тогда из формулы (61) следует, что $v_{x,y}(0) << 1 << V_{x,y}(0)$. Поэтому в формулах (54), (55) можно пренебречь слагаемым, пропорциональным $v_{x,y}(0)$, т.е. считать, что

$$V_x(t) = V_x(0)\cos(\lambda_2 t) + V_y(0)\sin(\lambda_2 t), \tag{63}$$

$$V_y(t) = -V_x(0)\sin(\lambda_2 t) + V_y(0)\cos(\lambda_2 t). \tag{64}$$

Подставляя теперь (63) и (64) в (52), найдем

$$|\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{V_x^2(0) + V_y^2(0)} = \text{const} \tag{65}$$

Таким образом, в слабом магнитном поле поперечная составляющая скорости электрона Дирака сохраняет по модулю свое значение, что совпадает с результатом для классического релятивистского электрона.

В случае сильного магнитного поля необходимо учитывать все слагаемые в формулах (54), (55). Подставляя эти формулы в (52), найдем

$$|\mathbf{v}_\perp| = V_\perp(0)\sqrt{1 + f(t)}, \tag{66}$$

где $V_\perp(0) = \sqrt{V_x^2(0) + V_y^2(0)}$,

$$f(t) = \left(\frac{v_\perp(0)}{V_\perp(0)}\right)^2 + 2\frac{V_x v_x + V_y v_y}{V_\perp^2}\sin((\lambda_1 - \lambda_2)t) + \\ + 2\frac{V_y v_x - V_x v_y}{V_\perp^2}\cos((\lambda_1 - \lambda_2)t), \tag{67}$$

$$v_\perp(0) = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}.$$

Из формулы (66) следуют три эффекта. Первый заключается в том, что в сильных магнитных полях поперечная составляющая скорости электрона Дирака не является постоянной величиной даже по модулю. Второй эффект состоит в том, что в сверхсильных магнитных полях происходит увеличение поперечной скорости электрона. Третий эффект связан с периодическим характером зависимости от времени поперечной скорости электрона, причем, поскольку $\lambda_1 >> \lambda_2$, в формуле (67) можно считать, что $\lambda_1 - \lambda_2 \sim \lambda_1$. Но ввиду того, что $\lambda_1 \sim 10^{21}$ [1/c], на временах $t \sim 1/\lambda_2$ физически невозможно определить, что скорость $|\mathbf{v}_\perp|$ изменяется во времени, т.е. это означает, что в эксперименте при измерении будет фигурировать не $|\mathbf{v}_\perp|$, зависящая от времени, а ее некоторое среднее значение.

Рассмотрим теперь простой пример, когда $V_x = V_y = v_x = v_y$. Тогда из (66), (67) найдем

$$|\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{2} \cdot V_x(0)\sqrt{1 + \sin(\lambda_1 t)}, \tag{68}$$

т.е. поперечная скорость электрона осциллирует с частотой λ_1.

Еще одна особенность формулы (68) состоит в том, что модуль поперечной компоненты скорости электрона периодически принимает нулевые значения. В действительности это возможно только в случае, когда $V_x = V_y = v_x = v_y$, что соответствует, как отмечалось выше, сверхсильным магнитным полям, в которых предложенная в данной работе постановка задачи уже неприменима. Это связано с тем, что в таких полях необходимо учитывать действие на электрон как собственного поля излучения, так и флуктуаций электромагнитного и электрон-позитронного вакуумов, что совершенно не учитывается в этой работе. В реальных же случаях всегда $v_x, v_y < V_x, V_y$. Поэтому модуль поперечной компоненты скорости электрона во все промежутки времени существенно отличается от нуля.

Перейдем теперь к исследованию второго эффекта, а именно к определению зависимости от времени радиуса ларморовской орбиты электрона. Выпишем еще раз формулы (44), (45), предполагая для простоты, что $x_0 = y_0 = 0$

$$x(t) = R_x\sin(\lambda_2 t) - R_y\cos(\lambda_2 t) - \\ - r_x\cos(\lambda_1 t) - r_y\sin(\lambda_1 t), \tag{69}$$

$$y(t) = R_x\cos(\lambda_2 t) + R_y\sin(\lambda_2 t) + \\ + r_x\sin(\lambda_1 t) - r_y\cos(\lambda_1 t), \tag{70}$$

где

$$R_{x,y} = \frac{c^2\pi_{x,y}(0)}{\lambda_2 E_n} = \frac{V_{x,y}(0)}{\lambda_2},$$

$$r_{x,y}=\frac{c\dot{\alpha}_{x,y}(0)}{\lambda_1^2}=\frac{v_{x,y}}{\lambda_1}. \quad (71)$$

Прежде чем воспользоваться формулой (53) для определения зависимости ларморовского радиуса от времени, произведем оценки коэффициентов в (69) и (70). Так, если в выражениях для скорости электрона в сверхсильных магнитных полях скорость дрожательного движения может быть сравнима с его макроскопической скоростью, то в случае (69), (70) ситуация совершенно другая. Действительно, для того чтобы $r_{x,y}$ были порядка $R_{x,y}$, необходимо, чтобы λ_2 было порядка λ_1. Но как было выяснено выше, для любых магнитных полей, встречающихся в природе, λ_2 всегда много меньше λ_1. Поэтому между коэффициентами в (69), (70) всегда существует следующее соотношение

$$r_{x,y}<<R_{x,y}. \quad (72)$$

В сверхсильных магнитных полях, когда $v_{x,y}\sim V_{x,y}(0)$, вклад слагаемых, связанных с эффектом дрожаний, будет определяться отношением λ_2/λ_1, которое много меньше единицы. Это говорит о том, что в нулевом приближении в формулах (69), (70) достаточно ограничиться следующими слагаемыми

$$x(t)=R_x\sin(\lambda_2 t)-R_y\cos(\lambda_2 t), \quad (73)$$

$$y(t)=R_x\cos(\lambda_2 t)+R_y\sin(\lambda_2 t). \quad (74)$$

Подставляя (73), (74) в (53), легко показать, что радиус ларморовской орбиты остается постоянным во времени, т.е.

$$r_L=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=R_\perp=\frac{V_\perp}{\lambda_2}=\mathrm{const}, \quad (75)$$

где $R_\perp=\sqrt{R_x^2+R_y^2}$, а $V_\perp$ определяется формулой (65).

В общем случае, с учетом эффекта дрожаний, из (69), (70) и (53) найдем

$$r_L=R_\perp\sqrt{1+g(t)}, \quad (76)$$

где $R_\perp$ то же самое, что и в (75), а функция $g(t)$ имеет следующий вид

$$g(t)=\left(\frac{r_\perp}{R_\perp}\right)^2+2\frac{R_x r_x+R_y r_y}{R_\perp^2}\sin((\lambda_1-\lambda_2)t)+ \\ +2\frac{R_y r_x-R_x r_y}{R_\perp^2}\cos((\lambda_1-\lambda_2)t). \quad (77)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $R_x=R_y$ и $r_x=r_y$. Тогда из (76) и (77) найдем

$$r_L=\sqrt{2}R_x\sqrt{1+\left(\frac{r_x}{R_x}\right)^2+\frac{2r_x}{R_x}\sin(\lambda_1 t)},\ \ \frac{2r_x}{R_x}<<1. \quad (78)$$

Формулы (76)–(78) показывают, что радиус ларморовской орбиты, так же как и поперечная составляющая скорости электрона, совершает периодические дрожательные движения с очень высокой частотой около определенного среднего значения. Его можно определить, представив (78) в виде ряда по малому параметру и усреднив получившееся выражение по периоду высокочастотных колебаний, что в итоге дает следующий результат

$$\bar{r}_L\approx\sqrt{2}R_x\left(1+\frac{3}{4}\left(\frac{r_x}{R_x}\right)^2\right).$$

Таким образом, учет эффекта осцилляций Шредингера в задаче о движении электрона Дирака в магнитном поле приводит к увеличению радиуса ларморовской орбиты этого электрона.

4. Решение Шредингера для свободного электрона (14), а также решение (49), (50) в случае действия на электрон внешнего магнитного поля могут быть использованы в различных задачах релятивистской квантовой механики. В частности, большой интерес представляет задача об определении конкретного вида следующего оператора

$$e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1))}=e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}, \quad (79)$$

который часто встречается в задачах квантовой электродинамики в динамическом подходе [25, 26].

Ограничимся в данной работе решением этой задачи в случае слабых внешних магнитных полей. Это приближение означает, что в качестве оператора $\mathbf{r}(t)$ в (79) можно, с большой точностью, использовать решение Шредингера. Кроме того, будем рассматривать электрон в его собственной системе отсчета.

С учетом этих приближений выражение для оператора $\mathbf{r}(t)$ будет иметь следующий вид

$$\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)=\boldsymbol{\alpha}(t_1)\frac{c}{\lambda_1}\sin(\lambda_1\tau)+ \\ +\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{c}{\lambda_1^2}(1-\cos(\lambda_1\tau)). \quad (80)$$

Выражение (80) можно получить непосредственно из второй формы решения уравнения (28), через предельный переход, т.е. когда $B_0=0$ и $p_{x,y,z}=0$, с начальными условиями в момент времени $t=t_1$.

Заметим, что в классической релятивистской механике в собственной системе отсчета электрона, очевидно, $r_{x,y,z}(t)=r_{x,y,z}(t_1)=0$. Поэтому выражение (79) есть обычное число, равное единице. Но в релятивистской квантовой механике даже в собственной системе отсчета электрона оператор его радиус-вектора не является постоянной, равной нулю, величиной, а представляет собой определенную периодическую функцию времени, определяемую выражением (80). Это означает, что и выражение (79) также будет некоторой функцией времени. Поэтому наша задача будет заключаться в определении этой функциональной зависимости.

Для решения этой задачи воспользуемся одним свойством функций, зависящих от матриц Дирака.

Пусть $f(x(\boldsymbol{\alpha}))$ есть некоторая произвольная функция, аргумент которой зависит от матриц Дирака. Тогда имеет место следующее свойство:

$$f(x(\boldsymbol{\alpha})) = f(|x|), \quad |x| = \sqrt{x^2(\boldsymbol{\alpha})}, \tag{81}$$

если f является четной функцией своего аргумента, и

$$f(x(\boldsymbol{\alpha})) = \frac{x(\boldsymbol{\alpha})}{|x|} f(|x|), \quad |x| = \sqrt{x^2(\boldsymbol{\alpha})}, \tag{82}$$

если f является нечетной функцией своего аргумента, причем в формулах (81), (82) $|x|$ уже не зависит от матриц Дирака. Соотношения (81), (82) можно легко получить, разложив функцию f в ряд по своему аргументу, используя при этом свойства (2), (4).

Пользуясь в (79) формулой Эйлера и свойством (81), (82), найдем

$$e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = \cos(k\Delta r) + i\frac{\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r}}{k\Delta r}\sin(k\Delta r), \tag{83}$$

где

$$k\Delta r = \sqrt{(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})^2}\,. \tag{84}$$

Определим теперь вид функции (84). Для этого поступим следующим образом. Вспомним, что $\boldsymbol{\alpha} = \beta_1\boldsymbol{\sigma}$, а также что в собственной системе отсчета электрона $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \lambda_1\beta_2\boldsymbol{\sigma}$. Тогда формулу (80) можно переписать в виде

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c\boldsymbol{\sigma}}{\lambda_1}\left(\beta_1\sin(\lambda_1\tau) + \beta_2(1-\cos(\lambda_1\tau))\right). \tag{85}$$

Умножая теперь (85) скалярно на вектор $\mathbf{k}$ и возводя в квадрат, используя при этом (2) – (4) найдем

$$(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})^2 = x^2\sin^2(\Omega\tau), \tag{86}$$

где $x = k\lambda_c$, $\lambda_c = \hbar/mc$ – комптоновская длина волны электрона.

В итоге, из (84) и (83) найдем следующую функциональную зависимость для соотношения (79)

$$k\Delta r = x|\sin(\Omega\tau)|, \tag{87}$$

$$e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = \cos\left(x|\sin(\Omega\tau)|\right) + i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})\frac{\sin(x|\sin(\Omega\tau)|)}{x|\sin(\Omega\tau)|}. \tag{88}$$

В заключение остановимся на физическом содержании формул (84) и (87). Данные формулы можно рассматривать как квадратный корень из дисперсии приращения координаты электрона, причем, в отличие от классической релятивистской механики, эта величина является конечной периодической функцией времени. В качестве параметра времени выступает разность $\tau = t - t_1$. Это говорит о том, что дисперсия приращения координаты электрона определяется не для одного фиксированного значения времени, а для разности двух времен, что свидетельствует о наличии определенной временной нелокальности в релятивистской квантовой механике даже для свободного покоящегося электрона. Как было показано выше, причина возникновения этой нелокальности непосредственно связана с наличием у электрона внутренней степени свободы, которая полностью определяется его спиновым моментом.

Список литературы

1. Schrodinger E. Non powerful motion in the relativistic quantum mechanics // Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1930. **24**. P. 418–428.
2. Шредингер Э. О свободном движении в релятивистской квантовой механике. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976.
3. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1989.
4. Weyssenhof J. On two relativistic models of Dirac's electron // Acta. Phys. Pol. 1947. **9**. P. 47–53.
5. Huang K. On the zitterbewegung of the electron // Am. J. Phys. 1949. **20**. P. 479.
6. Barut O.A., Bracken A.J. Zitterbewegung and the geometry of the electron // Phys. Rev. D. 1981. **23**. **10**. P. 2454–2463.
7. Lock J.A. Relativistic invariance and zitterbewegung // Am. J. Phys. 1984. **52**. 3.
8. Maddox J. Where zitterbewegung may lead // Nature. 1987. **325**. P. 306.
9. Hestenes D. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics // Found. of Phys. 1990. **20**. **10**. P. 1213–1232.
10. Pavsic M., Recami E., Rodrigues Jr.W.A. Electron structure, zitterbewegung, and the new non-linear Dirac-like equation // Phys. Lett. B. 1993. **318**. P. 481–488.

11. Rodrigues Jr.W.A., Jayme V.Jr., Recami E., Salesi G. About zitterbewegung and electron structure // Phys. Lett. B. 1993. **318**. P. 623–628.

12. Hestenes D. Space-time physics with geometric algebra // Am. J. Phys. 2003. **71**. P. 691–704.

13. Bolte J., Glaser R. Zitterbewegung and semiclassical observables for the Dirac equation // J. Phys. A. 2004. **37**. P. 6359–6373.

14. Schliemann J., Loss D., Westervelt R.M. Zitterbewegung of electronic wave packets in III-V Zinc-Blende semiconductor quantum wells // Phys. Rev. Lett. 2005. **94**. 206801.

15. Hamdan N., Altorra A., Salman H.A. Modified Dirac equation with classical zitterbewegung // Proc. Pakistan Akad. Sci. 2007. **44(4)**. P. 263–272.

16. Lamata L., Leon J., Schatz T., Solano E. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion // Phys. Rev. Lett. 2007. **98**. 253005.

17. Hestenes D. Zitterbewegung in quantum mechanics – a research program. URL: http//arxiv.org/pdf/8002.2728.

18. Vaishnav J.Y., Clark C.W. Observing zitterbewegung with ultracold atoms // Phys. Rev. Lett. 2008. **100**. 153002.

19. Mandal B.P., Verma S. Dirac oscillator in an external magnetic field. URL: http//arxiv.org/pdf/0907.4544.

20. Вонсовский С.В., Свирский М.С., Свирская Л.М. О дрожащем движении электрона в зонной теории //ТМФ. 1990. **85**. **2**. С. 211–221.

21. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: Наука, Физматлит, 1975.

22. Шапиро С., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды. Физика компактных объектов. М.: Мир, 1985.

23. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Физматлит, 2006.

24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 2006.

25. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В., Петров Д.А. Квантово-статистическая теория радиационных эффектов без расходимостей // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2007. **6**. С. 3–35.

26. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Квантово-статистическая теория радиационного трения релятивистского электрона // ТМФ. 2009. **158**. **3**. С. 478–496.

ON THE MOTION OF A DIRAC ELECTRON IN A CONSTANT MAGNETIC FIELD

G.F. Efremov, D.A. Petrov

The motion of a Dirac electron in an external constant magnetic field has been studied taking into account the Zitterbewegung phenomenon. An equation has been derived describing the time evolution of the electron velocity operator. Time dependences of electron coordinate and velocity operators have been determined. The quantum nonlocality in the Dirac theory due to the Zitterbewegung phenomenon has been considered.

Keywords: the Dirac electron, Zitterbewegung phenomenon, quantum nonlocality.