

УДК 621.391.01

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ КОЛЬЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ, СИНХРОНИЗОВАННЫХ В ПРОТИВОФАЗЕ

© 2011 г.

А.В. Шмелёв, В.В. Матросов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

bzzz2004@bk.ru

Поступила в редакцию 02.04.2010

Проведено исследование коллективной динамики двух фазовых систем, объединенных в кольцо, синхронизованных в противофазе. Рассмотрены вопросы устойчивости противофазного синхронного режима, изучены динамические режимы, нарушающие синхронную работу генераторов, в пространстве параметров выделены области глобальной и локальной устойчивости (области захвата и удержания) синхронного режима. Проанализировано влияние параметров систем и связей на динамику ансамбля. Показано, что инерционность цепей управления в зависимости от параметров связей может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на синхронный режим.

Ключевые слова: фазовые системы, коллективная динамика, динамические режимы, синхронизация, бифуркации.

Введение

Исследование динамики связанных активных элементов является одной из актуальных задач современной нелинейной науки. К анализу коллективного поведения сводятся многочисленные задачи из различных областей – физики, химии, биологии, экономики, социологии и т.д. Привлекательным свойством связанных систем является способность демонстрировать сложную автоколебательную активность вплоть до хаотической при простой индивидуальной динамике парциальных элементов. При этом коллективное поведение определяется не столько динамикой парциального элемента, сколько структурой и силой связей между элементами. Связи в ансамблях играют решающую роль, с их помощью можно управлять колебаниями элементов – порождать колебания, усложнять их, синхронизовать колебания как отдельных элементов ансамбля, так и всех в целом, а также решать обратные задачи десинхронизации, регуляризации и подавления колебаний.

В радиофизике ярким примером коллективных систем служат ансамбли систем фазовой автоподстройки частоты (системы ФАП, фазовые системы). На практике к объединению ФАП в ансамбли прибегают, например, для разрешения противоречивых требований, предъявляемых к различным характеристикам систем – полосе захвата, фильтрующим свойствам, быстродействию, вероятности срыва

слежения и т.д. [1]. Другой пример представляют собой различные схемы нелинейного фазирования в активных антенных решетках, реализованных на основе генераторов, связанных с помощью цепей фазовой автоподстройки [2]. Существует также ряд задач, где принципиально необходимо объединение нескольких систем в ансамбль [3–8]. Возникающие в результате объединения новые свойства расширяют функциональные возможности систем ФАП как в традиционных направлениях (в качестве управляемых по частоте генераторов периодических сигналов), так и в нетрадиционных (в качестве генераторов хаотических сигналов). Что касается новых приложений, в частности для хаотических систем связи, то здесь наибольший интерес представляют реализующиеся в ансамблях сложные хаотические автомодуляционные колебания [9].

В данной работе рассматривается ансамбль из двух систем ФАП с фильтрами первого порядка, объединенных в кольцо, с дополнительными связями по цепям управления. В [10, 11] установлено, что в зависимости от значений параметров дополнительных связей колебания фазоуправляемых генераторов ансамбля могут синхронизоваться как синфазно, так и в противофазе. В работе [12] подробно рассмотрен случай, когда в ансамбле реализуется синфазный синхронный режим. В рамках динамической модели с полутора степенями свободы исследованы условия устойчивости синхронного синфазного режима, закономерности возбужде-

ния и развития несинхронных режимов. Обнаружена богатая картина динамических режимов и бифуркационных переходов, создающая возможности для формирования в системе разнообразных видов колебаний. Рассмотрены способы управления динамическими режимами генераторов ансамбля с помощью параметров парциальных подсистем и параметров связей. Данная работа дополняет исследования [10–12], в частности, здесь изучаются особенности динамического поведения ансамбля в случае, когда в нем реализуется противофазный синхронный режим.

Исследуемая модель

Коллективная динамика кольцевого соединения двух фазовых систем с обратными связями и фильтрами первого порядка в цепях управления описывается следующими уравнениями [11]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \times \\ &\times \sin \varphi - (1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi) \times \\ &\times y - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ – текущее фазовое рассогласование первого генератора относительно второго, $\tau = \Omega_1 t$ – безразмерное время, $b = \Omega_2 / \Omega_1$ – отношение полюс удержания второй и первой ФАП, $\varepsilon_{1,2}$ – безразмерные параметры фильтров, $\kappa_{1,2}$ – параметры дополнительных связей. Система (1) определена в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве $U: \{\varphi(\text{mod} 2\pi), y, z\}$ и шестимерном пространстве параметров $\Lambda: \{\gamma, b > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \kappa_1, \kappa_2\}$. Система (1) инвариантна относительно замены $(-\gamma, -\varphi, -y, -z) \rightarrow (\gamma, \varphi, y, z)$, поэтому достаточно рассмотреть $\gamma \geq 0$. Изучение решений модели (1) проводилось путем компьютерного моделирования, с использованием пакета ДНС [13], реализующего методы качественной теории динамических систем и теории колебаний.

Динамические режимы

Рассматриваемый кольцевой ансамбль, состоящий из двух систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления, может работать в следующих стационарных режимах [12]:

- *синхронные режимы*, при которых частоты колебаний генераторов совпадают, а разность фаз равна некоторой постоянной величине.

Синхронным режимам в фазовом пространстве U соответствуют устойчивые состояния равновесия;

- *квазисинхронные режимы*, при которых разности частот и фаз колебаний генераторов меняются в некоторых диапазонах, средняя разность частот при этом равна нулю. Образами этих режимов в фазовом пространстве U являются аттракторы колебательного типа (ограниченные по координате φ);

- *асинхронные режимы (режимы биений)*, при которых разность фаз генераторов неограниченно возрастает или убывает, средняя разность частот при этом равна некоторой постоянной величине. Образами регулярных режимов биений в фазовом пространстве U являются аттракторы вращательного типа (не ограниченные по координате φ , т.е. аттракторы, охватывающие фазовый цилиндр U).

Квазисинхронные и асинхронные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими, регулярным колебаниям в фазовом пространстве U отвечают предельные циклы, хаотическим – странные аттракторы.

Согласно [12] система (1) при $0 \leq \gamma < \max[1 - \kappa_2 + b(1 - \kappa_1), -1 + \kappa_2 - b(1 - \kappa_1)]$ имеет два состояния равновесия: $O_1(\varphi_1^* = \arcsin(\gamma / (1 + b - b\kappa_1 - \kappa_2)), y_1^* = 0, z_1^* = 0)$ и $O_2(\varphi_2^* = \pi - \varphi_1^*, y_2^* = 0, z_2^* = 0)$. Устойчивое состояние равновесия является образом синхронного режима, а соответствующая ему координата φ_1^* или φ_2^* определяет остаточную разность фаз колебаний генераторов в синхронном режиме (фазовую ошибку). При $\gamma = 0$ в синхронном режиме, определяемом состоянием равновесия O_1 , разность фаз $\varphi_1^* = 0$, а в синхронном режиме, определяемом состоянием равновесия O_2 , $-\varphi_2^* = \pi$, поэтому первый синхронный режим будем называть синфазным, а второй – противофазным. Противофазный синхронный режим существует при $\kappa_1 > 1 + (1 - \kappa_2)/b$, граница его локальной устойчивости определяется выражением (2), а глобальная устойчивость может нарушаться в результате появления как асинхронных, так и квазисинхронных режимов

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + [b \varepsilon_1^2 (1 - \kappa_1) + \varepsilon_2^2 (1 - \kappa_2)] \cos \varphi^* = 0. \quad (2)$$

Перейдем к рассмотрению особенностей динамического поведения ансамбля при нарушении устойчивости синхронного режима. Сначала рассмотрим динамику ансамбля при наличии элементов с малоинерционными цепями управления ($\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ll 1$).

Динамика ансамбля при наличии малоинерционных элементов

При $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ll 1$ математическая модель (1) имеет малый параметр при производной $dz/d\tau$. В этом случае, согласно [14], динамика модели (1) сводится к динамике системы двух уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{dy}{d\tau} &= \gamma - [(1 - \kappa_1)b + 1 - \kappa_2] \times \\ &\times \sin \varphi - (1 + [\varepsilon_1(1 - \kappa_1)b + \varepsilon_2(1 - \kappa_2)] \cos \varphi) y. \end{aligned} \quad (3)$$

Модель (3) описывает динамику ансамбля в случае, когда хотя бы один из его элементов

является малоинерционным. Динамику ансамбля в предельном случае, когда $\varepsilon_2 = 0$, характеризует рис. 1. На рис. 1а в области D_1 единственным аттрактором системы (3) является вращательный предельный цикл L_1 (рис. 1б), отвечающий за режим биений. Границей области D_1 служит линия 1, отражающая бифуркацию двукратного состояния равновесия. При пересечении этой линии сверху вниз в фазовом пространстве модели (3) появляются состояния равновесия: седло O_1 и устойчивый узел O_2 . Состояние равновесие O_2 устойчиво выше линии 2, соответствующей бифуркации Андронова – Хопфа. В области D_2 состояние равновесия O_2 глобально устойчиво, эта область является областью захвата в синхронный режим. В области D_3 аттрактор O_2 существует совместно с

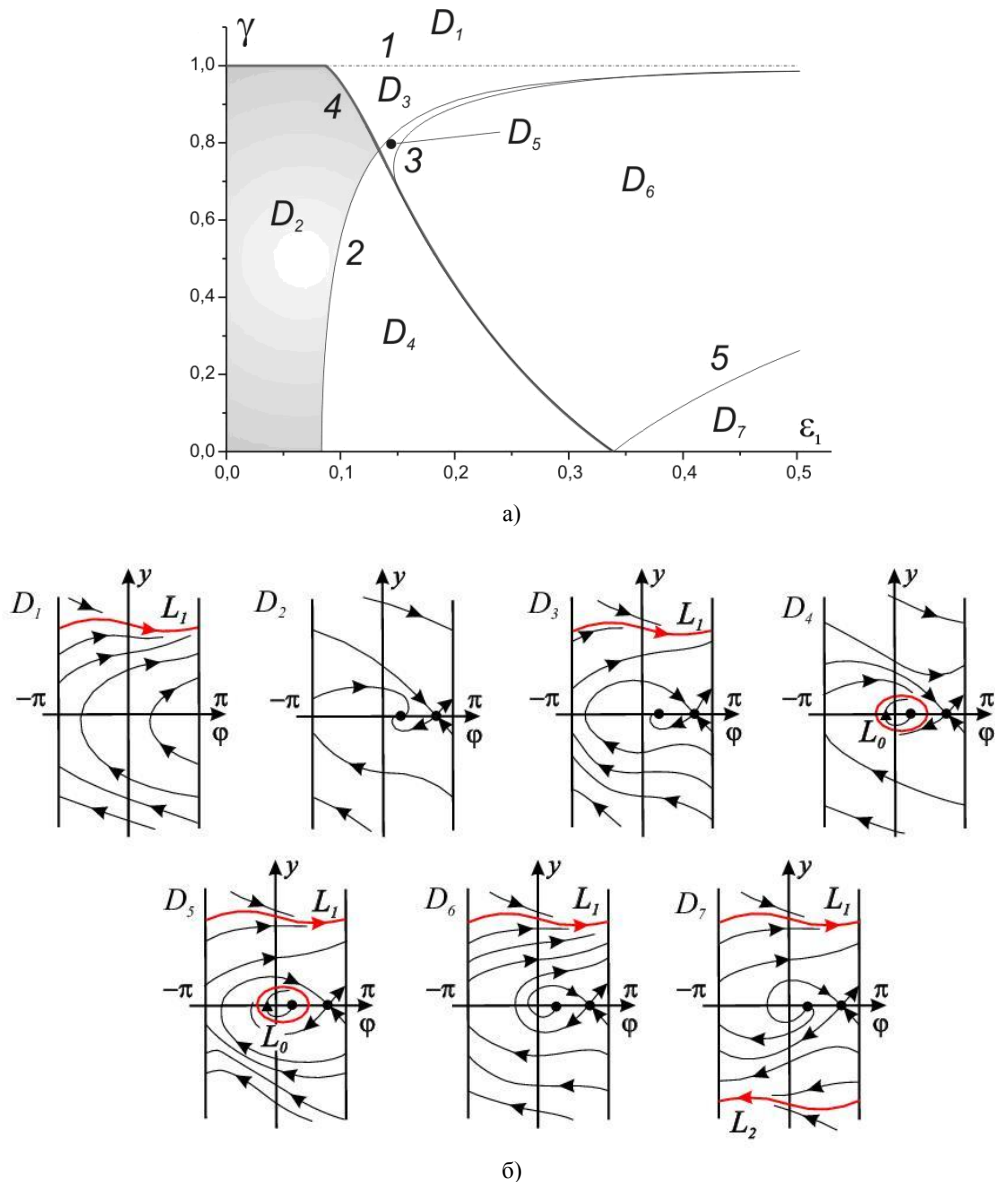


Рис. 1. Параметрический и фазовые портреты модели (3) при $b = 6, \kappa_1 = -1, \kappa_2 = 14$

циклом L_1 , область $D_Z = D_2 \cup D_3$ является областью удержания синхронного режима. При выходе из области D_Z через *линию 2* состояние равновесия O_2 теряет устойчивость, вокруг него мягко рождается колебательный предельный цикл L_0 , отвечающий за квазисинхронный режим. В области параметров D_4 цикл L_0 глобально устойчив, в области D_5 он существует вместе с циклом L_1 . Ограничивающая область $D_{Z1} = D_4 \cup D_5$ существования квазисинхронного режима ограничена справа *линией 3*. На этой линии цикл L_0 исчезает в петлю сепаратрис седла O_1 . Поведение генераторов ансамбля в области D_6 аналогично поведению при значениях параметров из области D_1 . Цикл L_1 разрушается при переходе через *линию 4*, которая соответствует бифуркации петли сепаратрис 2-го рода, образованной сепаратрисами седла O_1 , расположенными в области $y > 0$. *Линия 5* соответствует бифуркации петли сепаратрис седла O_1 , расположенной в области $y < 0$. При пересече-

нии этой линии сверху вниз рождается устойчивый предельный цикл L_2 . Эта бифуркация соответствует рождению в фазовом пространстве вращательного предельного цикла L_2 . В области D_6 имеют место два асинхронных режима, определяемые циклами L_1 и L_2 .

Динамика ансамбля в отсутствие малоинерционных элементов

Воспользуемся результатами предыдущего раздела, выберем значение ε_1 не малым ($\varepsilon_1 = 4$), далее осуществим плавный переход от установленных структур при $\varepsilon_2 = 0$ к структурам в области не малых ε_2 . Результаты исследования этого перехода представлены на рис. 2 в виде двухпараметрической бифуркационной диаграммы $\{\varepsilon_2, \gamma\}$ и проекций некоторых аттракторов модели (1).

При $\varepsilon_2 \ll 1$ динамика модели (1) аналогична динамике модели (3), параметрические портре-

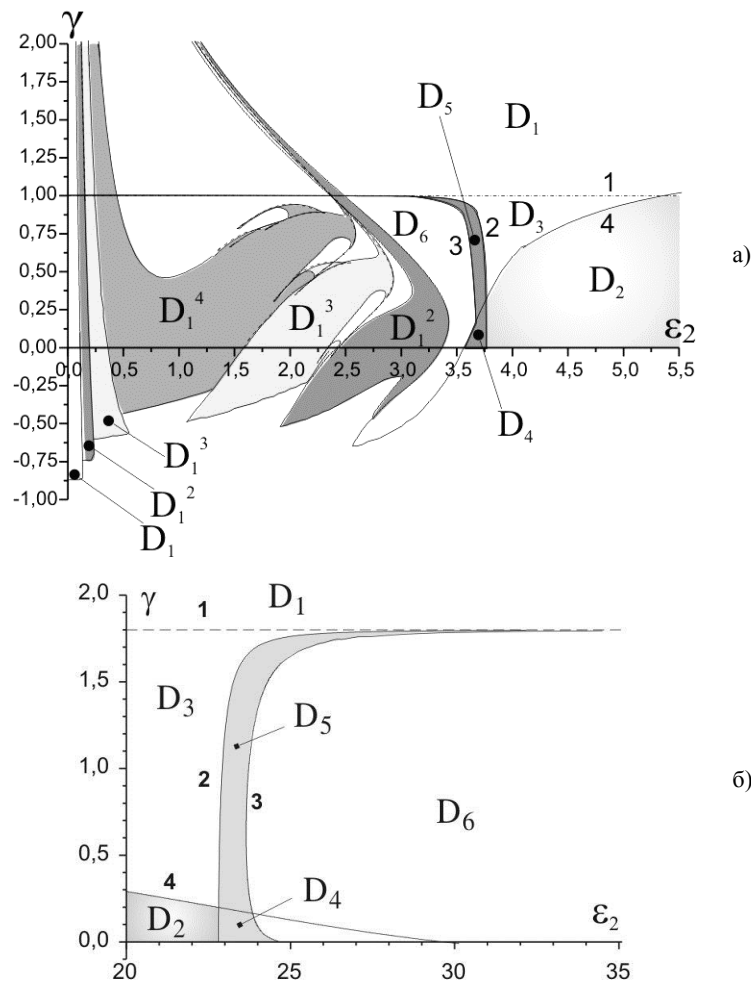


Рис. 2. Параметрические портреты модели (1) при $b = 6$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 14$, $\varepsilon_1 = 4$ (а), $b = 1.5$, $\kappa_1 = 3.2$, $\kappa_2 = -0.5$, $\varepsilon_1 = 15$ (б)

ты этих моделей определяют *линии 1–3, 5*, которые принадлежат соответственно одним и тем же бифуркационным поверхностям. При увеличении ε_2 установленные структуры фазового и параметрических пространств трансформируются, эти изменения связаны как с аттракторами, выявленными ранее, так и возникающими вновь. Линии на рис. 2а, не имеющие обозначений, соответствуют бифуркациям аттракторов вращательного типа, причем здесь приведены бифуркационные кривые только тех аттракторов, у которых усредненное значение y положительное. Кривые, соответствующие бифуркациям аттракторов со средним отрицательным значением, получаются из приведенных бифуркационных кривых аттракторов вращательного типа путем зеркального отображения их относительно оси абсцисс. Аналогичным способом из *линии 4* получается *линия 5*, которая показана на рис. 1а, а на рис. 2а не приведена. Области

параметров, где поведение генераторов ансамбля, определяемое по моделям (3) и (1), одинаково, имеют те же обозначения, что на рис.1. Области D_1, D_1^2, D_1^3, D_1^4 – это области существования асинхронных режимов, определяемых устойчивыми циклами L_1, L_1^2, L_1^3 и L_1^4 (рис. 3а–г) с периодами $T, 2T, 3T$ и $4T$ соответственно. Эволюцию разности частот колебаний генераторов иллюстрирует однопараметрическая бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 4а. Из диаграммы видно, что среднее значение разности частот в режиме регулярных биений при увеличении (уменьшении) параметра ε_2 меняется скачкообразно. Этот эффект может быть использован при построении делителей частоты.

Вращательные аттракторы могут быть хаотическими, они имеют место при значениях параметров из областей, находящихся между

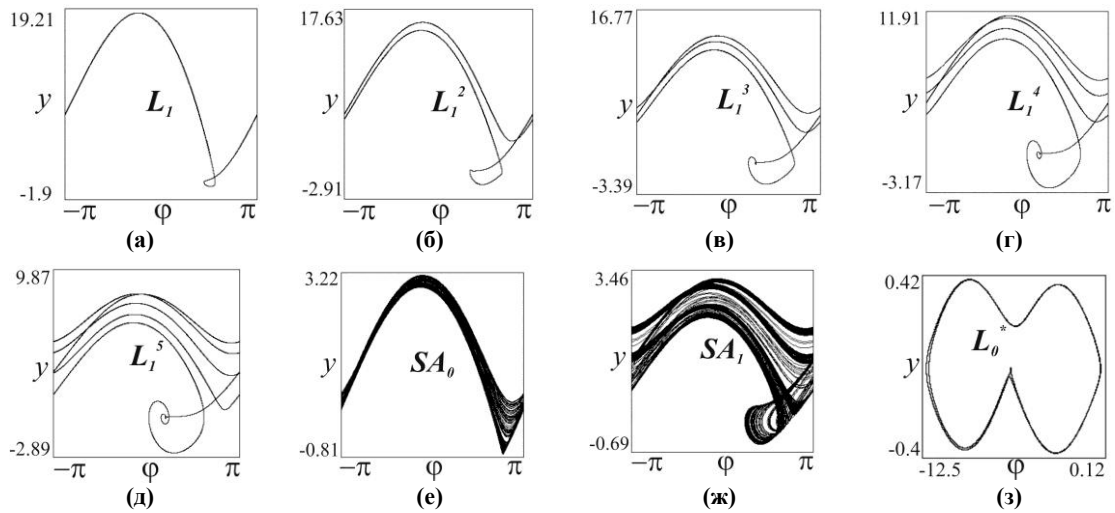


Рис. 3. Проекция аттракторов модели (1)

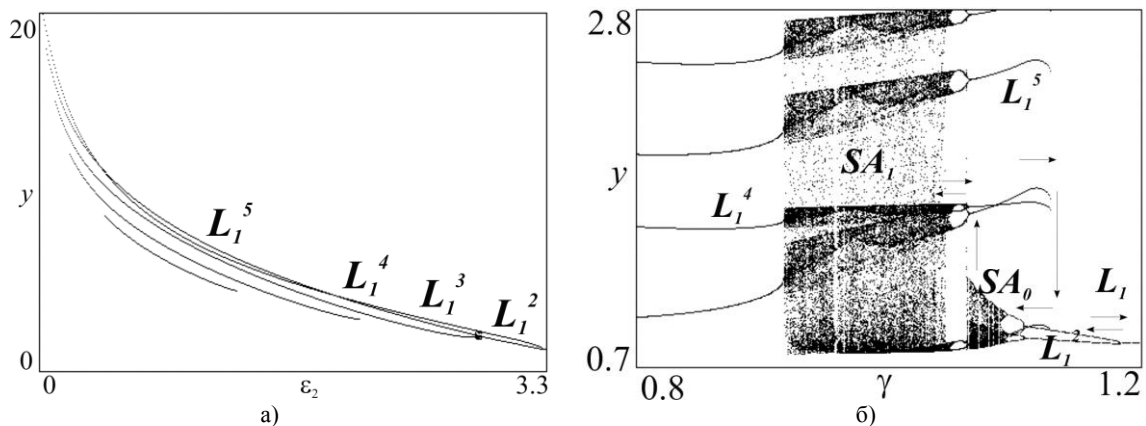


Рис. 4. Однопараметрические бифуркационные диаграммы: эволюции разности частот колебаний генераторов при увеличении постоянной времени фильтра ε_2 на уровне $\gamma = 0.4$; эволюции асинхронных режимов при вариации начальной частотной расстройки γ на уровне $\varepsilon_2 = 2.2$ (б)

областями D_1^2, D_1^3, D_1^4 . Переход к режиму хаотических биений осуществляется по сценарию Фейгенбаума либо через перемежаемость 1-го рода. Рисунок 4б иллюстрирует сценарии перехода к режиму хаотических биений и режим мультистабильного поведения. Здесь при увеличении γ из цикла L_1^4 через перемежаемость 1-го рода рождается хаотический аттрактор SA_1 (рис. 3ж), этот аттрактор с ростом γ мягко переходит в предельный цикл L_1^5 (рис. 3д), который, в свою очередь, исчезает в результате касательной бифуркации, и система (1) переходит на цикл L_1^2 . Цикл L_1^2 появляется из цикла L_1 при уменьшении γ в результате бифуркации удвоения периода. Дальнейшее уменьшение γ сначала приводит к рождению хаотического аттрактора SA_0 (рис. 3е) по сценарию Фейгенбаума, а потом его кризису с переходом на цикл L_1^5 .

Из параметрического портрета на рис. 2а следует, что увеличение постоянной времени фильтра ε_2 приводит к стабилизации динамики ансамбля. При $\varepsilon_2 = 0$ синхронный режим существует совместно с асинхронными режимами в крайне узкой полосе начальной частотной расстройки γ (полоса удержания синхронного режима практически отсутствует). Увеличение ε_2 сначала ведет к расширению полосы удержания, далее появляется полоса захвата в синхронный режим (при $\varepsilon_2 = 3.76$), которая с ростом ε_2 расширяется, наконец, начиная с $\varepsilon_2 = 5.36$ полоса захвата уравнивается с полосой удержания. Однако эффект стабилизации динамики ансамбля с ростом постоянной времени ε_2 не постоянен. На рис. 2б приведен параметрический портрет модели (1), где ε_2 носит дестабилизирующий характер [10]. Характер влияния параметра ε_2 определяется знаком выражения:

$$G \equiv \frac{[1 + 2(1 - \kappa_2)\varepsilon_1] + \sqrt{1 + 4(1 - \kappa_2)\varepsilon_1[1 - (1 - \kappa_1)\varepsilon_1 b]}}{(1 - \kappa_2)} \quad (4)$$

Если $G < 0$, то ε_2 стабилизирует динамику ансамбля, и дестабилизирует в противном случае.

При моделировании динамики (1) в противофазном синхронном режиме были выявлены регулярные и хаотические квазисинхронные режимы с проворотом фазы [10]. В фазовом пространстве U за такие режимы отвечают колебательные аттракторы, амплитуда которых по ϕ превышает значение 2π . В качестве примера на рис. 3з приведена проекция предельного

цикла L_0^* , характеризующего регулярный квазисинхронный режим с проворотом фазы.

Заключение

В работе изучена коллективная динамика ансамбля из двух фазовых систем, объединенных в кольцо, синхронизованных в противофазе. Рассмотрены вопросы устойчивости противофазного синхронного режима, изучены динамические режимы, нарушающие синхронную работу генераторов, проанализированы бифуркационные механизмы возникновения асинхронных режимов, в пространстве параметров выделены области глобальной и локальной устойчивости (области захвата и удержания) синхронного режима. Установлено, что динамика ансамбля в противофазном синхронном режиме обладает всеми свойствами динамики ансамбля в синхронном синфазном режиме, а также имеет свои особенности, в частности имеет место квазисинхронный режим с проворотом фазы. Проанализировано влияние параметров систем и связей на динамику ансамбля. Показано, что инерционность цепей управления в зависимости от параметров связей может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на синхронный режим.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт № П2308).

Список литературы

1. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
2. Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
3. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
4. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
5. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / Под ред. П.П. Дмитриева, В.С. Шебшаевича. М.: Радио и связь, 1982.
6. Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1977. 400 с.

7. Журавлев В.И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах. М.: Радио и связь, 1986.
8. Федосова Т.С. Сложные системы фазовой синхронизации: Уч. пособие. М.: Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1992.
9. Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. Нижний Новгород, 2007.
10. Шмелев А.В., Матросов В.В. Нелинейная динамика фазовых систем, объединенных в кольцо // Труды 8-й Всероссийской науч. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Н. Новгород, 2008. С. 341.
11. Шмелев А.В., Матросов В.В. Динамика двух фазовых систем, объединенных в кольцо // Труды науч. конференции по радиофизике, посвященной 90-й годовщине со дня рождения М.М. Кобрина / Ред. А.В. Якимов. Н. Новгород: ННГУ, 2008. С. 92–94.
12. Матросов В.В., Шмелев А.В. Нелинейная динамика ансамбля из двух фазоуправляемых генераторов с кольцевым типом объединения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 67.
13. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: ННГУ, 2002.
14. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

PECULIARITIES OF DYNAMICS OF TWO RING-COUPLED PHASE-LOCKED LOOPS SYNCHRONIZED IN ANTI-PHASE

A. V. Shmelev, V. V. Matrosov

Collective dynamics of two ring-coupled phase-locked loops synchronized in anti-phase has been studied. The stability of the anti-phase synchronous regime has been considered, dynamic modes disrupting the synchronous performance of the generators have been studied, domains in the parameter space of synchronous mode global and local instabilities (capture and lock ranges) have been defined. The influence of system parameters and links on the ensemble dynamics has been analyzed. The control circuit lagging has been shown to have stabilizing and destabilizing impact on the synchronous mode depending on the link parameters.

Keywords: phase-locked loops, collective dynamics, dynamic regimes, synchronization, bifurcations.