УДК 378

МЕТОД ПРОЕКТОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

О.В. Задорожная

Калмыцкий госуниверситет, Элиста

ovz_70@mail.ru

Поступила в редакцию 04.03.2011

Разработка и поиск новых методов в обучении студентов математических специальностей предполагает использование инновационных подходов, к которым можно отнести метод проектов. Важная роль при этом отводится учебным проектам, при выполнении которых происходит эффективное углубление знаний по предмету. В статье показана связь между различными проектами по математическому анализу, объединенными одной проблемой и рассчитанными на выполнение в течение нескольких семестров.

Ключевые слова: учебный проект, математический анализ.

Учебные проекты по математическому анализу направлены на систематизацию знаний по дисциплине, на установление взаимосвязей между отдельными понятиями, положениями всего курса, на взаимосвязь различных содержательно-методических линий предмета, что способствует углублению знаний и обеспечивает целостное восприятие курса математического анализа.

По содержанию проектов можно выделить мини-, локальные, семестровые, курсовые глобальные проекты. Минипроекты включают отдельные вопросы темы, излагаемые в части лекции, локальные – одну или несколько тем курса математического анализа. Семестровые и курсовые проекты включают один или несколько разделов курса, один или несколько семестров. При отборе содержания учебных проектов делается упор на взаимосвязь и взаимозависимость понятий, тем, разделов курса математического анализа через аналогию, обобщение, соподчиненность различных объектов, что обеспечивает взаимосвязь между различными учебными проектами. Покажем на конкретном примере такую связь.

На 1 курсе по математическому анализу изучаются следующие разделы: теория множеств, теория функций, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление, функции многих переменных. В учебной литературе по многим разделам приведены, сформулированы, описаны определения, теоремы, утверждения для функции. Однако те же проблемы не затронуты или в меньшей мере рассмотрены для обратной функции, недостаточно освещена связь свойств взаимно обратных функций. Есть материал, связанный с существованием, непрерывностью, дифференцируемостью и монотонностью обратной функции, но нет разработок, например, об ее экстремуме, выпуклости, вогнутости, интегрируемости.

Рассматриваемый семестровый учебный проект, состоящий из мини-, локальных проектов, направлен на выявление ситуаций для обратной функции по вопросам, не отраженным в литературе, на определение связей между исходной и обратной функциями. При этом необходимо сформулировать полученные результаты в виде теорем, утверждений, а также определить, будут ли инвариантны все свойства для исходной и обратной функций.

Минипроект 1. *Понятие и различные определения функции*

Прежде чем говорить об обратной функции, студент должен разобраться в вопросе о том, что такое функция. Существует много подходов к определению этого понятия. В данном минипроекте студенту необходимо изучить материал из рекомендованных источников [1–3], выписать, систематизировать и проанализировать его.

Анализ студента. Функция в учебной литературе [1–3] определяется как: 1) правило; 2) переменная; 3) декартово произведение; 4) закон. Кроме того, в [3] не только дается определение в смысле декартового произведения, но и приводится также понятие функции в следующей редакции. Пусть $E_x=\{x\}$, $E_y=\{y\}$ – некоторые множества. Понятие A функции: говорят, что имеется функция, определенная на E_x со значениями в E_y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x\epsilon E_x$ соответствует элемент $y\epsilon E_y$.

Проблема студента. Функция – не простое понятие. Очевиден факт: существует несколько различных определений функции. Понятие A функции имеет важное значение для раскрытия и разъяснения ее содержания. В чем причина такого множества определений функции?

Вывод студента. Каждое определение отражает некоторую грань универсального понятия функции. Это связано с тем, что 1) существуют различные способы задания функции (графический, аналитический и др.), 2) функция, как и множество, относится к первичным понятиям и поэтому не определяется, 3) функция отражает наличие взаимозависимости процессов, явлений в реальном мире. В силу этого речь может идти о разъяснении содержания понятия функции, а не об определении функции.

На основании вышеизложенного студент берет за основу разъяснение понятия A функции в качестве рабочего определения.

Семестровый проект. *Биекция. Взаимно обратные функции. Монотонность, непрерывность, дифференцируемость взаимно обратных функций. Инвариантность*

Сбор, систематизация и анализ материала

Минипроект 2. Известно, что если отображение $f{:}E_x\to E_y$, где E_x и E_y – некоторые множества, биективно, т.е. является взаимно однозначным соответствием между элементами множеств E_x и E_y, то естественно возникает отображение $f^{-1}{:}E_y\to E_x$, называемое обратным отображением к исходному [3]. Обратное отображение определяется следующим образом: если $x\xrightarrow{f} y$, то $y\xrightarrow{f^{-1}} x$, т.е. элементу $y\in E_y$ ставится в соответствие тот элемент $x\in E_x$, образом которого при отображении f является y. Обратное отображение $f^{-1}{:}E_y\to E_x$ само является биективным и обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1}{:}$ $E_x\to E_y$ совпадает с $f{:}E_x\to E_y$. Свойство двух биективных отображений быть обратными является взаимным, поэтому они называются взаимно обратными.

Результатом анализа содержания справочного материала, необходимого для выполнения семестрового проекта, является фиксация ряда фактов, которые студент формулирует в виде следующих утверждений.

Утверждение 1. Всякая строго монотонная функция $f{:}E_x\to E_y$ имеет обратную строго монотонную функцию $f^{-1}{:}E_y\to E_x$.

Утверждение 2. Всякая строго монотонная непрерывная функция $f{:}E_x\to E_y$ имеет однозначную строго монотонную непрерывную обратную функцию $f^{-1}{:}E_y\to E_x$.

Утверждение 3. Пусть $f{:}E_x\to E_y$, $f^{-1}{:}E_y\to E_x$ взаимно обратные функции, непрерывные в точках $x_0\in E_x$ и $f(x_0) = y_0\in E_y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f^{/}(x_0) \neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y_0, причем $(f^{-1})^{/}(y_0) = (f^{/} (x_0))^{-1}$.

Анализ студентом содержания утверждений 1–3 позволяет ему сделать следующий вывод.

Вывод студента. В вопросе монотонности, непрерывности, дифференцируемости при $f^{/}(x)\neq 0$ взаимно обратные функции обладают свойством инвариантности.

Прогноз студента. С учетом проанализированного материала и полученных выводов возникает предположение о наличии или отсутствии инвариантности взаимно обратных функций в вопросах выпуклости, вогнутости, интегрируемости, существования производной в расширенном смысле при $f^{/}(x_0)=0$. Вследствие этого у студента генерируются идеи, замыслы о проведении самостоятельного исследования по данным вопросам.

Минипроекты подбираются по принципу «наведение на открытие», т.е. сначала они выступают как конкретизация и уточнение частного факта (происходит качественное усвоение учебного материала), а затем как поиск и исследование расширенной проблемы, охватывающей несколько вопросов математического анализа (формируются элементы научно-исследовательской работы).

Задача данного минипроекта состоит в создании ситуации, при которой происходит генерирование идей, мыслей студента, получен повод для дальнейшего исследования. Замыслы, возникшие в одном минипроекте, реализуются в другом, устанавливая тем самым их взаимосвязь.

Минипроект 3. Для выяснения вопросов, касающихся внутренних точек экстремума, выпуклости, вогнутости, интегрируемости, существования производной в расширенном смысле для обратной функции, студент систематизирует и анализирует сопутствующий материал, имеющийся в учебниках и выделяет следующее.

Определение 1. Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует интеграл Римана, называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a;b]$.

Утверждение 4. Всякая монотонная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на нем.

Утверждение 5. Всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на нем.

Утверждение 6. Всякая строго монотонная функция имеет обратную строго монотонную функцию.

Положим $c=\min[\lim\limits_{x\to a+0} f(x), \lim\limits_{x\to b-0} f(x)]$, $d=$ $=\max[\lim\limits_{x\to a+0} f(x), \lim\limits_{x\to b-0} f(x)]$.

Локальный проект. Эта часть семестрового проекта полностью состоит из новых фактов, полученных студентом в ходе самостоятельных рассуждений, обладающих для него субъективной новизной.

Теорема 1 (проекта): Взаимно обратные строго монотонные на отрезках функции не имеют внутренних точек экстремума.

Доказательство следует из определения внутренних точек экстремума и строгой монотонности взаимно обратных функций (по условию).

<u>Вывод студента</u>. Взаимно обратные строго монотонные на отрезках функции обладают свойством инвариантности в вопросе отсутствия внутренних точек экстремума.

Теорема 2 (проекта): Взаимно обратные функции не обладают свойством инвариантности в вопросе выпуклости и вогнутости.

Доказательство следует из выявления ситуации в случае функции $y=x^2$, которая однозначна, непрерывна, дифференцируема, вогнута на интервале $(-\infty;\infty)$, но не является монотонной на $(-\infty;\infty)$ и не имеет на этом интервале обратной функции. На интервале $(-\infty;0)$ функция $y=x^2$ строго убывает, вогнута и имеет однозначную вогнутую обратную функцию $x=f_1^{-1}(y)=-\sqrt{y}:(0;+\infty)\to(-\infty;0)$. На интервале $(0;+\infty)$ функция $y=x^2$ строго возрастает, вогнута и имеет однозначную выпуклую обратную функцию $x=f_2^{-1}(y)=\sqrt{y}:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$.

Теорема 3 (проекта): Пусть f:$[a;b]\to[c;d]$ биективное, непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда в любой точке $y\in[c;d]$ существует производная обратной функции $(f^{-1}(y))'$, которая конечна в точках $y\in[c;d]$, соответствующих точкам $x\in[a;b]$, в которых $f'(x)\neq 0$ и равна бесконечности определенного знака в точках $y\in[c;d]$, соответствующих точкам $x\in[a;b]$, в которых $f'(x)=0$.

З а м е ч а н и е: Мы требуем не только того, чтобы существовала конечная производная $f'(x)$, но и чтобы она была непрерывной:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)=0,$$

что будет использовано при рассмотрении $\lim\limits_{y\to y_0}(f^{-1}(y))'=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f'(x)}$.

Доказательство. Пусть для определенности функция $f(x)$ строго возрастает на $[a;b]$, в этом случае $f'(x)\geq 0$, $x\in[a;b]$. С учетом условий данной теоремы (функция непрерывно дифференцируема, а это означает что существует производная, которая непрерывна), на основании вышеуказанных теорем 1, 2, 3, при $x\in[a;b]$, в которых $f'(x)\neq 0$, обратная функция непрерывно дифференцируема и ее производная равна $(f^{-1}(y))'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

При $x_0\in[a;b]$, в которых $f'(x_0)=0$ и $y_0=$ $=f(x_0)$ имеем

$$(f^{-1}(y))'_{y_0}=\lim_{y\to y_0}(f^{-1}(y))'=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f'(x)}=\begin{vmatrix} f'(x)>0, \forall x\neq x_0, \\ f'(x_0)=0 \end{vmatrix}=+\infty.$$

Таким образом, в точке $y=y_0$ существует бесконечный предел производной обратной функции положительного знака, и, следовательно, в этом случае при $y=y_0$ существует бесконечная производная $(f^{-1}(y))'_{y_0}=+\infty$.

Пусть теперь $f(x)$ строго убывает на $[a;b]$, в этом случае $f'(x)\leq 0$, $x\in[a;b]$. При $x_0\in[a;b]$, в которых $f'(x_0)=0$ и и $y_0=f(x_0)$, имеем

$$(f^{-1}(y))'_{y_0}=\lim_{y\to y_0}(f^{-1}(y))'=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f'(x)}=\begin{vmatrix} f'(x)<0, \forall x\neq x_0, \\ f'(x_0)=0 \end{vmatrix}=-\infty.$$

Таким образом, в точке $y=y_0$ существует бесконечный предел производной обратной функции отрицательного знака, и, следовательно, в этом случае при $y=y_0$ существует бесконечная производная $(f^{-1}(y))'_{y_0}=-\infty$. Теорема доказана.

<u>Вывод студента.</u> Из теоремы следует, что если исходная функция имеет производную, то обратная к ней функция также имеет производную в расширенном смысле (конечную или бесконечную определенного знака). *Таким образом, в вопросе существования производной в расширенном смысле имеет место инвариантность.*

Исследуем инвариантность в вопросе интегрируемости исходной и обратной функций.

Теорема 4 (проекта): Обратная функция f^{-1}: $[c;d]\to[a;b]$ для всякой строго монотонной функции f:[a;b]→[c;d] интегрируема на отрезке [c;d].

Доказательство. Так как по условию исходная функция f:[a;b]→[c;d] строго монотонна на [a;b], то в соответствии с утверждением 3 существует строго монотонная на [c;d] обратная функция f^{-1}: [c;d]→[a;b]. В этом случае обе взаимно обратные функции f , f^{-1} строго монотонны в соответствующих областях и на основании утверждения 1 интегрируемы на отрезках [a;b] и [c;d] соответственно.

Теорема 5 (проекта): Пусть $f(x)$:[a;b]→[c;d] – биективная, непрерывная функция. Тогда обратная к ней функция $f^{-1}(y)$: [c;d]→[a;b] интегрируема на отрезке [c;d].

Доказательство. Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на [a;b] и биективна, то $f(x)$ строго монотонна на [a;b]. Тогда на основании утверждения 3 функция $f(x)$ имеет строго монотонную обратную функцию $f^{-1}(y)$ и в соответствии с теоремой 4 (проекта) утверждаем, что обратная функция $f^{-1}(y)$ интегрируема на [c;d].

Вывод студента. Теоремы 4 и 5 проекта отражают функциональные свойства взаимно обратных функций (интегрируемость) и условия, при выполнении которых обратная функция интегрируема. *Следовательно, в вопросе интегрируемости также имеет место инвариантность взаимно обратных функций.*

На примере этого проекта видно, что учебные проекты как самостоятельная часть работы студентов направлены, в частности, на создание и получение широты, полноты охвата материала, строгости, завершенности доказательств определенных фактов, обеспечивающих усвоение основного содержания. Такой подход к изучаемому содержанию способствует углублению знаний по математическому анализу по сравнению с заучиванием в традиционном изложении.

Рефлексия побуждает студентов к дальнейшему расширению и обогащению своих знаний. Возникает вопрос о возможности перенесения полученных результатов на случай неявных функций, т.е. расширяются границы проекта. Происходит рождение замысла нового проекта: какие сведения можно получить о неявных взаимно обратных функциях.

Таким образом, семестровый проект естественным образом перерастает в курсовой, т.е. выполняемый в течение всего первого курса обучения математическому анализу.

Фрагмент курсового проекта. *Инвариантность некоторых свойств неявных взаимно обратных функций*

Если функция задается формулой $y = f(x)$, то она называется явной функцией. Функции $y=f(x)$, $x=g(y)$, задаваемые неявно при помощи равенства $F(x,y)=0$, для которых выполнены тождества $F(x,f(x))\equiv 0$ для любых $x\in E_x$ или $F(g(y),y)\equiv 0$ для любых $y\in E_y$, называются неявными. Ставится вопрос об условиях, при которых неявная связь $F(x,y)=0$ может быть разрешена в виде явной функциональной зависимости $y=f(x)$, $x=g(y)$ и об инвариантности некоторых свойств этих функций. Рассмотрением неявных взаимно обратных функций $y=f(x):E_x\to E_y$, $x=g(y):E_y\to E_x$, определяемых уравнением $F(x,y)=0$, студент вышеизложенный семестровый проект доводит до курсового, при выполнении которого он систематизирует, анализирует и обобщает материал по теории неявных функций, взаимно обратных функций, в частности, теорему о неявных функциях [3].

Используя соответствующую теорему [3] о разрешимости уравнения $F(x,y)=0$ относительно y, студент формулирует теорему с добавлением о разрешимости уравнения $F(x,y)=0$ относительно x и указанием областей существования E_x, E_y неявных взаимно обратных функций $f(x):E_x\to E_y$, $g(y):E_y\to E_x$.

Пусть

$$I_x^i=\{x\in R:|x-x_0|<\alpha^i\},$$
$$I_y^i=\{y\in R:|y-y_0|<\beta^i\},$$
$$I^i=I_x^i\times I_y^i, i=1{,}2.$$

Теорема 6 (проекта): Пусть вещественнозначная функция $F(x,y)=0$ определена в окрестности $u=u(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0) и удовлетворяет условиям:

1^0. $F(x,y)\in C^{(p)}(u), p\geq 1,$

2^0. $F(x_0,y_0)=0$,

3^0a). $F_y^{/}(x_0,y_0)\neq 0$ или

$3^0в$). $F_x^{/}(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда в случае 3^0a) существует промежуток $I^1\subset u(x_0,y_0)$ и такая функция $y=f(x)\in C^{(p)}(I_x^1;I_y^1)$, что для любых $(x,y)\in I^1$ выполнено условие $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$, причем $f^{/}(x)$ в точках $x\in I_x^1$ может быть вычислена по формуле $f'(x)=-\dfrac{F_x^{/}(x,f(x))}{F_y^{/}(x,f(x))}$. В случае $3^0в$) существует промежуток $I^2\subset u(x_0,y_0)$ и такая функция $x=g(y)\in C^{(p)}(I_y^2;I_x^2)$, что для любых $(x,y)\in I^2$ выполнено условие $F(x,y)= = 0\Leftrightarrow x=g(y)$, причем $g^{/}(y)$ в точках $y\in I_y^2$ может быть вычислена по формуле $g'(y)=$ $=-\dfrac{F_y^{/}(g(y),y)}{F_x^{/}(g(y),y)}$.

В соответствии с теоремой 6 (проекта) имеем $f(x): I_x^1 \to I_y^1$, $g(y): I_y^2 \to I_x^2$. Полагая $E_x = I_x^1 \cap I_x^2$, $E_y = I_y^1 \cap I_y^2$, заключаем, что функции $f(x): E_x \to E_y$, $g(y): E_y \to E_x$ будут неявными взаимно обратными.

<u>Вывод студента</u>. Неявные взаимно обратные функции $f(x): E_x \to E_y$ и $g(y): E_y \to E_x$ обладают свойством инвариантности в вопросе существования, непрерывности, дифференцируемости ($f^{/}(x) \neq 0$), а также существования производных до порядка p, $p \geq 1$.

<u>Обобщение полученных результатов</u>. Пусть $y = f(x)$ явная функция. Рассмотрим уравнение $f(x) - y = 0$, в котором $F(x,y) = f(x) - y$. Исследуем это уравнение с точки зрения разрешимости относительно x, т.е. с точки зрения нахождения зависимости $x = g(y)$. С этой целью переформулируем теорему 6 (проекта) в случае 3^0*в*) применительно к функции $F(x,y) = f(x) - y$ и уравнению $f(x) - y = 0$.

Теорема 7 (проекта): Пусть вещественнозначная функция $F(x,y) = f(x) - y$ определена в окрестности $u = u(x_0,y_0)$ точки (x_0, y_0) и удовлетворяет условиям:

1^0. $f(x) - y \in C^{(p)}(u), p \geq 1$ (это равносильно $f(x) \in C^{(p)}(\widetilde{u}(x_0)), p \geq 1$),

2^0. $f(x_0) - y_0 = 0$ (это равносильно $f(x_0) = y_0$),

3^0. $(f(x) - y)'_x(x_0, y_0) \neq 0$ (это равносильно $f_x^{/}(x_0) \neq 0$).

Тогда существует промежуток $I^2 \subset u(x_0, y_0)$ и такая функция $x = g(y) \in C^{(p)}(I_y^2; I_x^2)$, что для всех $(x,y) \in I^2$ выполнено условие $f(x) - y =$ $= 0 \Leftrightarrow x = g(y)$, причем $g^{/}(y)$ в точках $y \in I_y^2$ может быть вычислена по формуле $g'(y) = \dfrac{1}{f_x^{/}(x)}, x = g(y)$.

<u>Вывод студента</u>. Полученная теорема 7 (проекта) обобщает утверждение 3. Учитывая равносильные условия, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7$^{/}$ (проекта): Пусть задана функция $y = f(x): \widetilde{u}(x_0) \to \widetilde{u}(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, удовлетворяющая условиям:

1^0. $f(x) \in C^{(p)}(\widetilde{u}(x_0)), p \geq 1$,

2^0. $f(x_0) = y_0$,

3^0. $f_x^{/}(x_0) \neq 0$.

Тогда существуют окрестности $u(x_0) \subset \widetilde{u}(x_0)$, $u(y_0) \subset \widetilde{u}(y_0)$ и функция $x = g(y): u(y_0) \to u(x_0)$, такие, что функции $f(x): u(x_0) \to u(y_0)$ и $g(y): u(y_0) \to u(x_0)$ будут неявными взаимно обратными, причем $x = g(y) \in C^{(p)}(u(y_0))$.

Заключение студента. Неявные взаимно обратные функции обладают свойством инвариантности в вопросе существования производных до порядка p, $p \geq 1$. Существование производных порядка p, $p \geq 1$ для явных взаимно обратных функций определяется существованием производной порядка p исходной функции.

Этот факт обладает субъективной новизной и поэтому является важным и неожиданным для студента.

Полученные результаты являются новыми и значимыми как в теоретическом, так и в практическом отношении. В частности, нахождением промежутков строгой монотонности функции $f(x)$ указываются промежутки существования взаимно обратных функций. Построением графика исходной функции воспроизводим график и свойства взаимно обратных функций.

<u>Дальнейшие перспективы развития проекта</u>

Замечание 1. Если вместо понятия A однозначной функции ввести понятие B многозначной функции, то зарождается проект «Взаимоотношения между однозначной исходной функцией и соответствующей ей многозначной обратной функцией».

Замечание 2. Факт отсутствия внутренних экстремумов для взаимно обратных монотонных функций одной вещественной переменной, указанной в проекте, а также для гармонической и однолистных функций является основанием для зарождения нового проекта «Классы функций, не имеющих экстремумов во внутренних точках».

Замечание 3. Неравенство $f'(M) \neq 0$ является достаточным условием монотонности функции f: $R \to R$, рассмотренной в проекте, конформности отображений и необходимым условием однолистности отображения, что способствует в дальнейшем возникновению проекта «Значение неравенства $f'(M) \neq 0$ и равенства $f'(M) = 0$ в теории функций».

Список литературы

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А. , Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов / Под ред. В.А. Садовничего. 4-е изд., испр. М.: Дрофа, 2004. 640 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981. 687 с.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.

PROJECT METHOD IN TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS

O.V. Zadorozhnaya

The development and search for new methods of teaching students specializing in mathematics involves the use of innovative approaches, which include the project method. An important role is attributed to educational projects. In performing such projects, students' knowledge of the subject is effectively enhanced. The author shows the relationship between various projects on mathematical analysis united by the same problem and intended to be executed over several semesters.

Keywords: educational project, mathematical analysis.