

УДК 621.391.01

**О КВАЗИСИНХРОННЫХ РЕЖИМАХ В СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ  
АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

© 2011 г.

*Г.М. Бакунов, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

gleb@bakunov.com

Поступила в редакцию 01.09.2010

Рассмотрены автомодуляционные колебания в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка. В пространстве параметров выделены области существования и глобальной устойчивости квазисинхронных режимов (простых и сложных периодических, хаотических автомодуляционных колебаний). Изучены характеристики автомодуляционных колебаний во временной и частотной областях.

*Ключевые слова:* фазовые системы, фазовая автоподстройка частоты, динамические режимы, синхронизация, бифуркации.

1. О возможности нарушения устойчивости синхронного режима в системе фазовой автоподстройки частоты (ФАП) известно достаточно давно [1–3]. В частности, в [2, 4] установлено, что учет запаздывания в цепи управления системы ФАП ведет к нарушению устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации, и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия, что означает установление в системе ФАП квазисинхронного режима, при котором колебания с выхода генератора ФАП являются колебаниями с периодической угловой модуляцией, причем центральная частота стабилизируется по опорной частоте. Детальному анализу характеристик таких автомодуляционных колебаний посвящена работа [5].

Как установлено в [6], автомодуляционные колебания могут возбуждаться в системе ФАП и без учета запаздывания, но при использовании более сложного фильтра, например фильтра второго порядка. В этом случае автомодуляционные колебания могут быть достаточно сложными [7–11]. Предельный цикл, определяющий автомодуляцию, в результате каскада бифуркаций удвоения периода может переходить в хаотический аттрактор. В этом случае колебания на выходе генератора становятся хаотически модулированными со средней частотой, стабилизированной по опорной частоте. Цель настоящей работы – изучение характеристик различных типов автомодуляционных колебаний, возбуждающихся в системе ФАП с фильтром второго порядка, в зависимости от параметров системы.

2. Базовая математическая модель системы ФАП может быть записана в операторной форме в виде [1, 6]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma. \quad (1)$$

Здесь  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которая может быть скомпенсирована цепью управления,  $\gamma = \Omega_H/\Omega$  – начальная частотная расстройка подстраиваемого и опорного генераторов,  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра,  $F(\varphi)$  – нормированная нелинейная характеристика фазового дискриминатора.

Будем рассматривать в (1) RLC-фильтр с передаточной функцией вида  $K(p) = (1 + ap + bp^2)^{-1}$ . Переходя в (1) к дифференциальной форме и вводя безразмерные время  $\tau = t\Omega$  и параметры  $\mu = b\Omega^2$ ,  $\varepsilon = a\Omega$ , получаем из (1) систему дифференциальных уравнений 3-го порядка:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - \varepsilon z - y - \sin \varphi, \quad (2)$$

определенную в цилиндрическом фазовом пространстве  $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), y, z\}$ . Динамика системы (2) рассматривалась в [6–9], где методом компьютерного моделирования с использованием пакета [10] получены разбиения пространства параметров  $(\gamma, \varepsilon, \mu)$  на области, соответствующие различным динамическим режимам работы.

На рис. 1 приведено сечение  $(\varepsilon, \gamma)$  пространства параметров  $(\gamma, \varepsilon, \mu)$  на уровне  $\mu = 0.5$ . На рис. 1 область  $D_1$  соответствует захвату в режим синхронизации. Здесь в фазовом пространстве  $U$  существует один аттрактор – состояние равновесия с координатами  $O_1$  ( $\varphi^* = \arcsin y$ ,  $y^* = 0$ ,  $z^* = 0$ ), в которое система (2) приходит при любых начальных условиях. С уменьшением значений параметра  $\varepsilon$  состояние равновесия  $O_1$

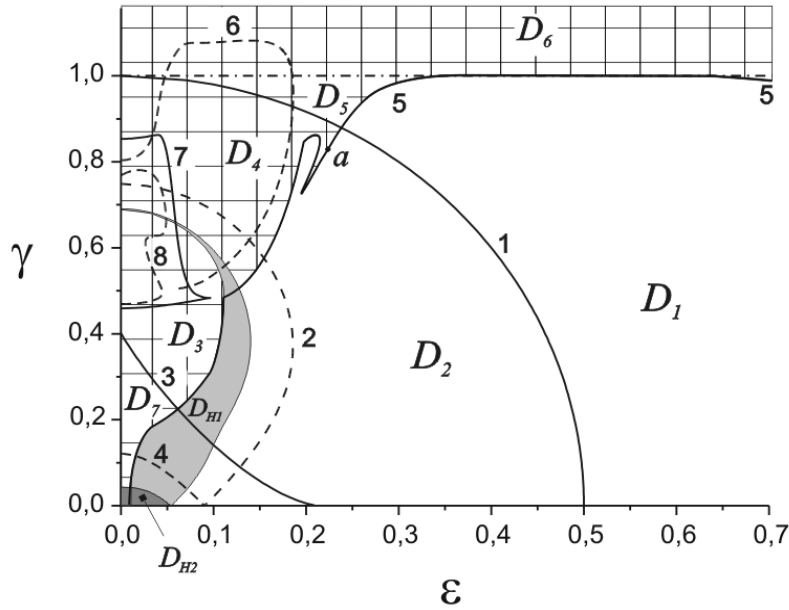


Рис. 1. Структура пространства параметров модели (2) при  $\mu=0.5$

мягко теряет устойчивость через бифуркацию Андронова–Хопфа (линия 1).

Область  $D_2$  соответствует режиму регулярной квазисинхронизации. Математическим образом этого режима являются колебательные (не охватывающие фазовый цилиндр  $U$ ) устойчивые предельные циклы  $L_{01}^{(k)}$ , где  $k$  характеризует кратность цикла. Цикл  $L_{01}^{(1)}$  (рис. 2а) возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа, циклы  $L_{01}^{(k)}$  с  $k > 1$  возникают в результате бифуркаций удвоения периода циклов  $L_{01}^{(k-1)}$ . Пунктирная линия 2 на рис. 1 соответствует мягкой смене устойчивости цикла  $L_{01}^{(1)}$ , сопровождающейся рождением устойчивого предельного цикла  $L_{01}^{(2)}$  (рис. 2б). К области  $D_2$  примыкает область  $D_{H1}$  существования хаотического колебательного аттрактора  $S_{01}$ . Аттрактор  $S_{01}$  (рис. 2в) определяет режим хаотической квазисинхронизации. При значениях параметров из области  $D_7$  в фазовом пространстве модели (2) имеют место колебательные предельные циклы  $L_{02}^{(k)}$ , которые, так же как циклы  $L_{01}^{(k)}$ , характеризуют режим регулярной квазисинхронизации. Цикл  $L_{02}^{(1)}$  возникает в фазовом пространстве  $U$  при пересечении линии 3 при уменьшении  $\varepsilon$  или  $\gamma$  в результате бифуркации двойного предельного цикла (мультипликатор цикла  $\nu=+1$ ). Циклы  $L_{02}^{(k)}$  с  $k > 1$  появляются аналогично циклам  $L_{01}^{(k)}$ , через бифуркации удвоения периода

циклов  $L_{02}^{(k-1)}$ . Пунктирная линия 4 соответствует рождению цикла  $L_{02}^{(2)}$  (рис. 2д) в результате удвоения периода цикла  $L_{02}^{(1)}$  (рис. 2г). Бифуркации удвоения циклов  $L_{02}^{(k)}$  приводят к возникновению хаотического колебательного аттрактора  $S_{02}$  (рис. 2е), который имеет место в области параметров  $D_{H2}$ .

В области  $D_5$  ( $D_4$ ) глобальная устойчивость синхронного (квазисинхронного) режима нарушается появлением регулярных или хаотических аттракторов вращательного (охватывающих фазовый цилиндр  $U$ ) типа. На рис. 1 область существования аттракторов вращательного типа выделена штриховкой. Границей этой области служит линия 5, которая разделена точкой  $a$  на две части. Справа от точки  $a$  линия 5 отвечает за бифуркацию петли сепаратрис седла или седло-фокуса (при  $\varepsilon \in (0.35; 0.65)$  петли сепаратрис седло-узла) с отрицательной седловой величиной. При пересечении этого участка кривой с ростом  $\gamma$  в фазовом пространстве модели (2) появляется устойчивый предельный цикл  $L_1^{(1)}$  (рис. 2ж). По мере удаления от линии 5 аттрактор  $L_1^{(1)}$  может терять устойчивость (на пунктирной линии б) и трансформироваться в аттрактор  $L_1^{(2)}$  (рис. 2з). Участок линии 5, расположенный левее точки  $a$ , отвечает бифуркациям двойных предельных циклов различной кратности. Предельные циклы вращательного типа могут терять устойчивость через бифурка-

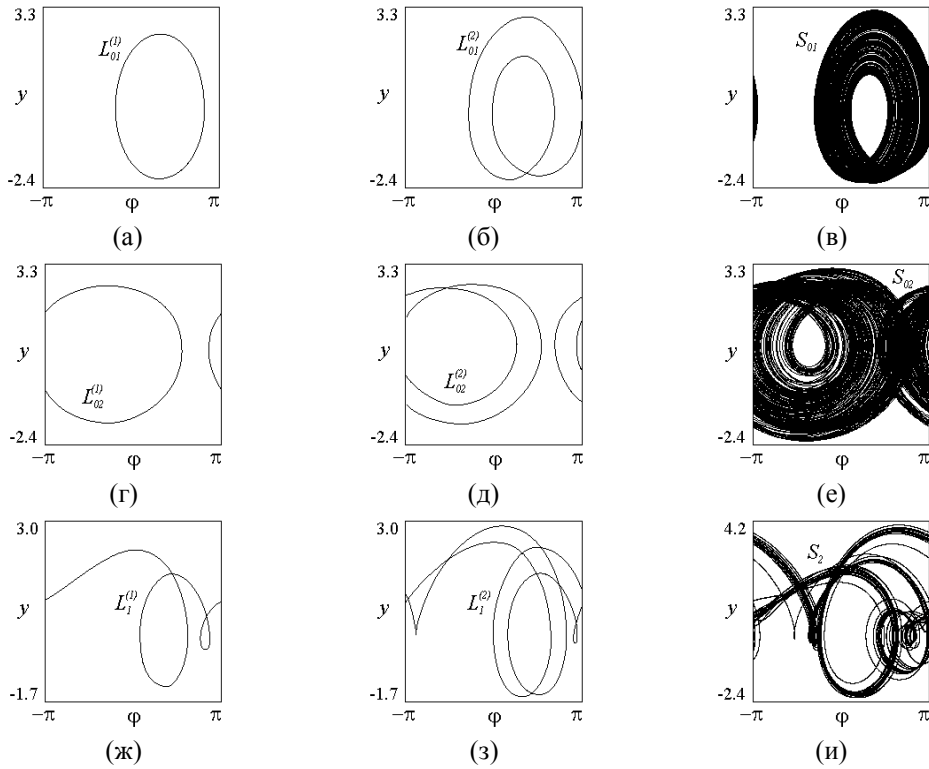


Рис. 2. Проекция аттракторов модели (2)

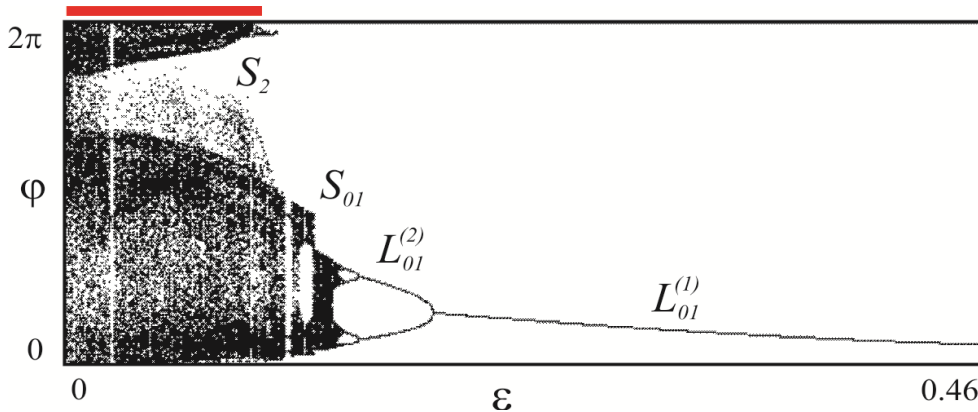


Рис. 3. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, построенная по траекториям модели (2) при уменьшении  $\epsilon$  для  $\mu=0.5, \gamma=0.4$

цию удвоения периода (линия 8 – бифуркационная кривая удвоения периода предельного цикла  $L_2^{(1)}$ ), исчезать в результате касательных бифуркаций (линии 7 – бифуркационная кривая рождения предельного цикла  $L_2^{(1)}$  из двойного предельного цикла), а также по сценарию Фейгенбаума трансформироваться в хаотические аттракторы (рис. 2и). В точке  $a$  седловая величина на бифуркационной кривой, соответствующей петле сепаратрис седло-фокуса, обращается в ноль. При значениях параметров из области  $D_6$  в фазовом пространстве модели (2) существуют только аттракторы вращательного

типа, т.е. реализуются глобально устойчивые режимы биений.

На рис. 3 приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\{\epsilon, \phi\}$ , иллюстрирующая эволюции модулирующих колебаний, ограниченных по  $\phi$ , от момента их зарождения до разрушения. Эта диаграмма типична для модели (2) – при  $\mu=0.5$  в интервале  $0 \leq \gamma < 0.69$  при уменьшении  $\epsilon$  в результате нарушения устойчивости синхронного режима появляются регулярные автоколебания, которые далее через серию бифуркаций удвоения периода трансформируются в хаотические; наконец, квазисинхронность хаотически модулированных колеба-

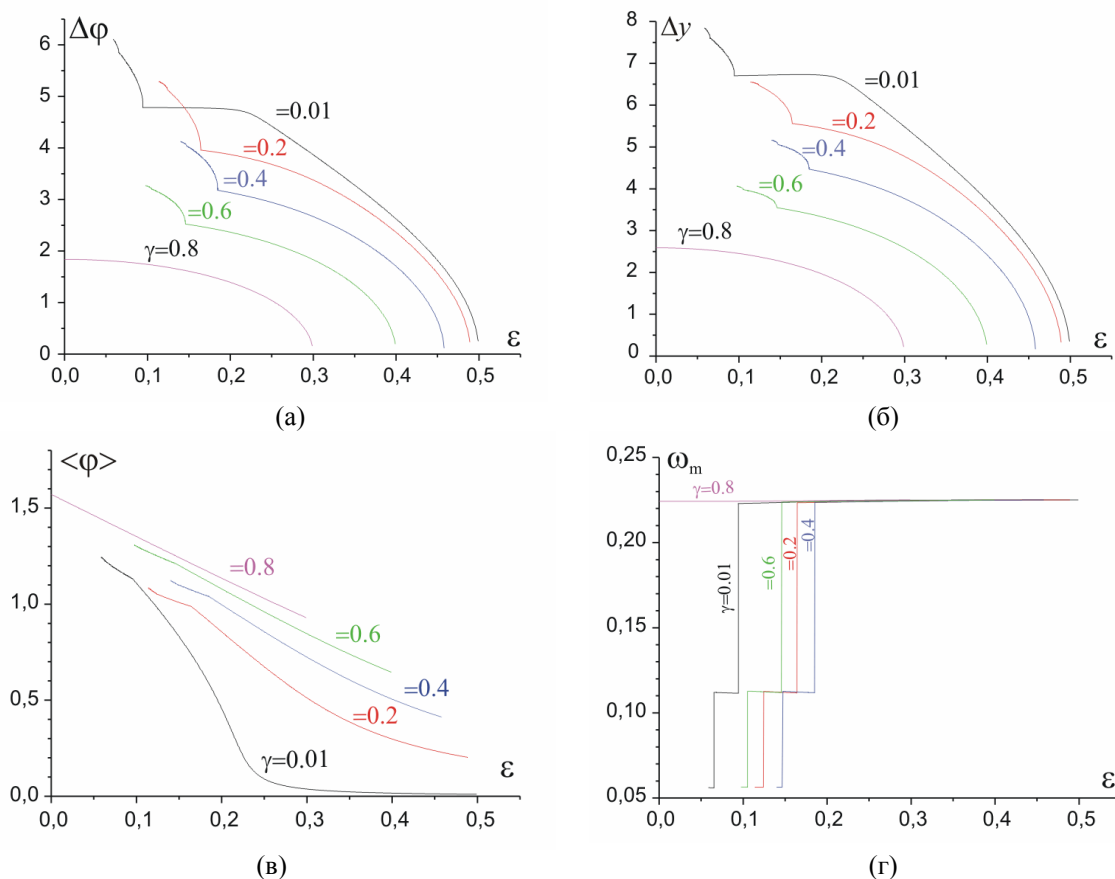


Рис. 4. Зависимости характеристик автомодуляционных колебаний (регулярный режим квазисинхронизации): глубины модуляции по фазе (а) и частоте (б); отклонений усредненной фазы колебаний от фазы опорного сигнала (в); частоты модуляции  $\omega_m$  (г) от параметров  $\gamma$  и  $\epsilon$

ний с дальнейшим уменьшением  $\epsilon$  нарушается вследствие появления проскальзываний фазы на  $2\pi$ . Момент появления проскальзываний определяет переход от хаотического квазисинхронного режима к режиму хаотических биений (на рис. 3 интервал существования режима биений отмечен темной полосой над диаграммой).

3. Перейдем к рассмотрению характеристик автомодуляционных колебаний (режима квазисинхронизации), т.е. аттракторов колебательно-го типа. В качестве таких характеристик будем использовать: 1) амплитуды колебаний переменных  $\phi$  и  $y$  при движении по аттрактору, поскольку они определяют глубины модуляции по фазе и частоте; 2) усредненные значения  $\langle\phi\rangle$  и  $\langle y\rangle$  переменных  $\phi$  и  $y$ , характеризующие ошибки стабилизации автомодуляционных колебаний опорным сигналом; 3) периоды колебаний. Для хаотических колебаний, не имеющих периода, в качестве характеристик будем использовать средний период движения по аттрактору и частотный спектр. На рис. 4 представлены зависимости характеристик автомодуляционных колебаний (регулярный режим квазисинхронизации) от параметра фильтра  $\epsilon$  и начальной расстройки  $\gamma$ , рассчитанные по осо-

бым траекториям модели (2) для  $\mu=0.5$ . Из представленных диаграмм следует, что глубина модуляции по фазе (рис. 4а) и частоте (рис. 4б) растет с уменьшением параметра  $\epsilon$  и убывает при увеличении начальной частотной расстройки  $\gamma$ . Представленные графики имеют изломы в точках бифуркаций удвоения периода. Это свидетельствует о том, что скорость нарастания амплитуды колебаний предельных циклов растет с увеличением кратности предельных циклов. Аналогичным образом изменяются отклонения усредненной фазы модулирующих колебаний от фазы опорного сигнала (рис. 4в). Частота модуляции  $\omega_m=1/T_c$  ( $T_c$  есть период предельного цикла, определяющего закон модуляции) носит скачкообразный характер в интервале  $0 \leq \gamma < 0.69$  при уменьшении  $\epsilon$  и стремится к нулю (рис. 4г).

Рассмотрим свойства автомодуляционных колебаний в частотной области. На рис. 5 приведены спектры мощности автомодуляционных колебаний, построенные по осциллограммам  $y(t)$ . Спектр на рис. 5а соответствует предельному циклу  $L_{01}^{(1)}$ , представленному на рис. 2а. Поскольку колебания не являются гармонич-

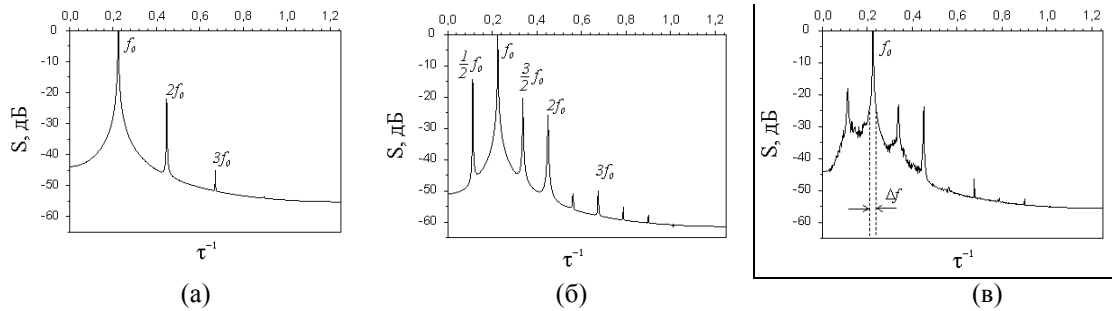


Рис. 5. Спектры мощности регулярных (а), (б) и хаотических (в) автомодуляционных колебаний

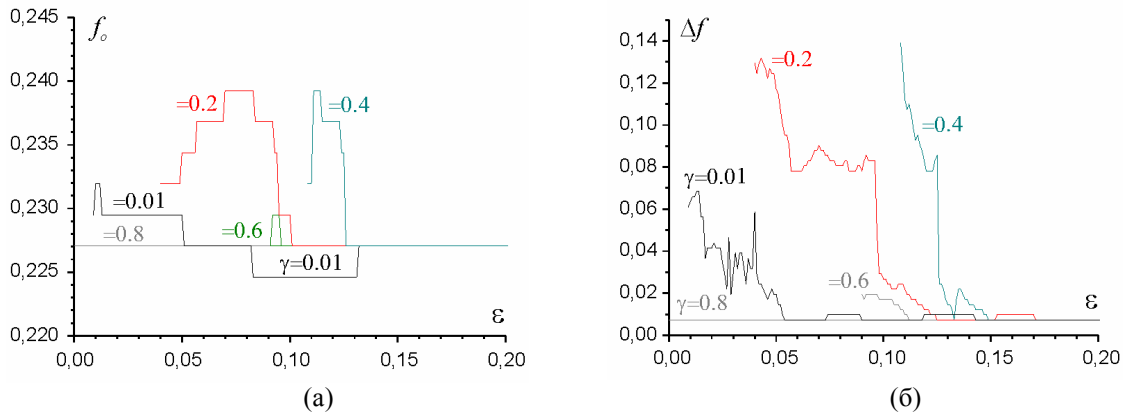


Рис. 6. Зависимости от параметров  $\epsilon$  и  $\gamma$  спектральных характеристик модулирующих колебаний: центральной частоты  $f_0$  (а), эффективной ширины спектра  $\Delta f$  (б)

ческими, спектр содержит основную гармонику на частоте  $f_0=1/T$  и гармоники, расположенные равномерно (эквидистантно) на частотах  $kf_0$ , где  $k = 2,3,4, \dots$ ,  $T$  – период цикла кратности один. Эффективная ширина этого спектра  $\Delta f=0.0073$ . Спектр на рис. 5б соответствует предельному циклу  $L_{01}^{(2)}$  (рис. 2б). Этот спектр отличается от предыдущего наличием субгармоник на частотах  $\frac{1}{2}f_0, \frac{3}{2}f_0, \frac{5}{2}f_0, \dots$ , ширина этого спектра  $\Delta f=0.0073$ . Спектр на рис. 5в соответствует хаотическому аттрактору  $S_{01}$  (рис. 2в). Здесь основная гармоника на частоте  $f_0$  сохраняется, ширина спектра увеличивается  $\Delta f=0.0146$ .

На рис. 6 приведены зависимости частоты  $f_0$  и эффективной ширины спектра мощности  $\Delta f$  автомодуляционных колебаний, стабилизированных опорной частотой, системы ФАП с фильтром второго порядка. В основе построения этих диаграмм лежат спектры мощности (рис. 5), содержащие 1024 гармоники на частотах  $\omega_i=i\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega=0.00244$ ,  $i=0,1023$ , точность диаграмм определяется величиной  $\Delta\omega$ . Из представленных диаграмм следует, что бифуркации удвоения периода не оказывают влияния

на  $f_0$  и  $\Delta f$  вплоть до хаотизации модулирующих колебаний. В области хаотических колебаний центральная частота  $f_0$  по параметру  $\epsilon$  имеет максимум, эффективная ширина спектра  $\Delta f$  растет немонотонно.

4. Проведенное компьютерное исследование модели (2) дополняет известные ранее результаты о динамике системы фазовой автоподстройки с фильтром второго порядка [6–9]. Полученная при малых  $\mu$  ( $\mu=0.5$ ) диаграмма  $(\epsilon, \gamma)$  дает представление о бифуркационных механизмах перехода от модели ФАП с фильтром первого порядка – модели из двух дифференциальных уравнений с регулярной динамикой, не допускающей квазисинхронных режимов, к модели (2) с разнообразной сложной (вплоть до хаотической) динамикой. Анализ регулярных квазисинхронных колебаний в частотной области свидетельствует, что бифуркации удвоения периода модулирующих колебаний не приводят к изменениям основной (центральной) гармоники и эффективной ширины спектра мощности модулирующего сигнала. В области существования хаотических квазисинхронных режимов эффективная ширина спектра увеличивается, центральная же частота несколько отличается от центральной частоты регулярных квазисинхронных колебаний, однако эти отклонения не-

велики и, по-видимому, могут быть результатом вычислительных процедур расчета спектра. Ширина спектра с ростом  $\gamma$  уменьшается, что объясняется уменьшением размеров аттрактора, определяющих глубину модуляции.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-02-00865, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт №П2308).*

#### Список литературы

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. – 2-е изд., доп. и перераб. М.: Связь, 1972.
2. Капранов М.В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т.11. №12. С. 37.
3. Jelonek Z.J., Cowan C.J. Synchronized system with time delay in the loop // Proc. IEEE. 1957. V.104. Part C. P. 389–397.
4. Белоусина Л.Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 2. С. 277–291.
5. Бакунов Г.М., Матросов В.В., Шалфеев В.Д. О регулярных квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник ННГУ. 2010. №6. С. 43–47.
6. Белоусина Л.Н., Быков В.В. О бифуркациях и некоторых качественных характеристиках системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // III симпоз. по прикладной математике и кибернетике. М.: Наука, 1973. С. 28–32.
7. Белых В.Н., Некоркин В.И. Качественные структуры и бифуркации, порождаемые нелинейным уравнением фазовой синхронизации третьего порядка // ПММ. 1978. Т.42, №5. С. 808–819.
8. Матросов В.В. Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 4–8.
9. Матросов В.В. Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // Изв.вузов. Радиофизика. 2006. Т.49, №3. С. 267–278.
10. Матросов В.В. Автоподстройка частоты с фильтром второго порядка // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т.49, №4. С. 357–368.
11. Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007.
12. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: ННГУ, 2002.

### ON QUASI-SYNCHRONOUS REGIMES IN PHASE LOCK LOOPS WITH A SECOND-ORDER FILTER

*G.M. Bakunov, V.V. Matrosov, V.D. Shalfeev*

Self-modulation oscillations in a phase-locked loop with a second-order filter in the control circuit are studied. Regions are identified in the parameter space where regular (simple or complex) or chaotic automodulation oscillations exist and are globally stable. Time and frequency domain characteristics of the automodulation oscillations are investigated.

*Keywords:* phase systems, phase-locked loops, dynamic regimes, synchronization, bifurcations.