УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ПЛАСТИНКУ РОСТА

© 2011 г.

Л.Л. Шарипова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

sleah@yandex.ru

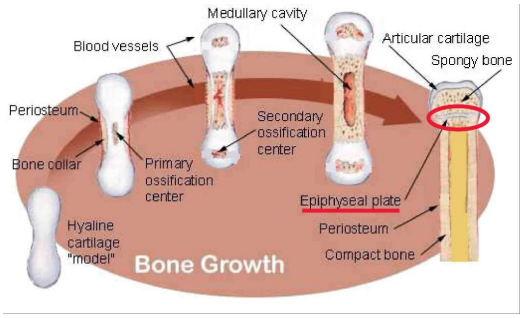
Поступила в редакцию 15.06.2011

Разработана модель для исследования влияния механических факторов и параметра биологического роста на стационарное движение границы окостенения в пластинке роста, ее ориентацию и устойчивость. Получены критические значения параметров нагружения, параметра биологического роста и скорости движения границы, при которых происходит смена ориентации и потеря устойчивости границы окостенения.

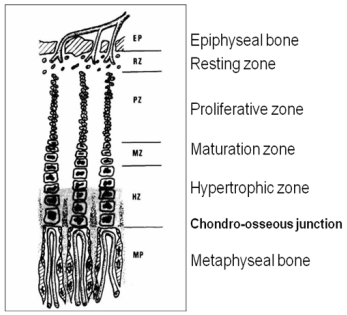
Ключевые слова: биомеханика, пластинка роста, объемный рост, окостенение, кинетика, влияние напряжений, моделирование.

Введение

Продольный рост костей позвоночных в основном осуществляется за счет процессов роста и окостенения в пластинке роста (рис. 1*а*). Пластинка роста представляет собой слой гиалинового хряща между метафизизом и эпифизом кости (рис. 1*б*).



а)



б)

Рис. 1

Рост кости в длину происходит за счет следующих процессов: а) благодаря поступлению вещества происходит деление и рост клеток хряща; б) во время роста клетка хряща выделяет вещество в окружающую ее матрицу, вследствие чего это матрица минерализуется.

При достижении определенного размера клетки хряща происходит ее отмирание с образованием лакун, окруженных кальцифицированным матриксом. Далее на это место прорастают кровеносные сосуды с клетками кости на них. Поверхность между живыми клетками хряща в матриксе и умершими клетками хряща в кальцифицированном матриксе образует границу окостенения.

Хорошо известно, что эти процессы регулируются в процессе жизни как различными биологическими, так и механическими факторами [1]. Разработка моделей описания влияния механических нагрузок на процессы роста костей может помочь в детской хирургической ортопедии, где при лечении отклонений в процессе роста костей применяются, в частности, механические нагрузки. При этом важно знать величину и вид нагрузок, при которых не происходит ни повреждения ткани, ни предварительного закрытия пластинки роста.

Влияние биологического роста на устойчивость стационарного движения границы между хрящом и костью

Условия на границе между хрящом и костью. Пластинка роста моделируется как упругий слой «хрящевая ткань» в упругой среде «кос-

тная ткань» (рис. 2). Рассматривается период роста кости, в котором одновременно имеют место два конкурирующих процесса: деление и увеличение в размере клеток хряща; отмирание клеток с их заменой костной тканью. При этом толщина пластинки роста остается постоянной. Первые два процесса будут описываться как объемный рост в хряще, второй – как стационарное движение границы окостенения.

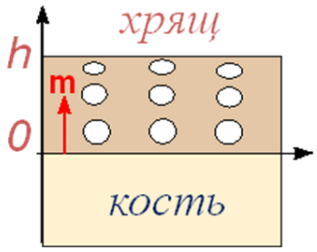


Рис. 2

Скорость стационарного движения границы V_m^Γ определяется кинетическим уравнением, задающим зависимость скорости от конфигурационной силы – аналога разности химических потенциалов на границе:

$$V_m^\Gamma = -k(\mu_{\text{кость}} - \mu_{\text{хрящ}}), \quad k = \text{const} > 0, \quad V_m^\Gamma = \text{const}, \tag{1}$$

$$\mu_{\text{кость}} - \mu_{\text{хрящ}} = \mathbf{m}\cdot[\mathbf{M}]\mathbf{m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{M} = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T\mathbf{S}$ – тензор Эшелби, $\mu_{\text{кость}}$, $\mu_{\text{хрящ}}$ – химические потенциалы кости и хряща соответственно; $\mathbf{F}$, $\mathbf{m}$, W, $\mathbf{S} = \partial W/\partial\mathbf{F}$ – деформационный градиент, нормаль к границе окостенения в отсчетной конфигурации, энергия деформации и тензор напряжений Пиола соответственно. Квадратными скобками $[\cdot] = (\cdot)_- - (\cdot)_+$ обозначается скачок величины через границу, индексы «+» и «–» соответствуют кости и хрящу.

В результате на границе окостенения имеем следующую систему уравнений:

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{S}]\mathbf{m} = 0, \quad [W] - \mathbf{S}_\pm : [\mathbf{F}] + \frac{V_m^\Gamma}{k} = 0. \tag{3}$$

Объемный рост хрящевой ткани учитывается в декомпозиции деформационного градиента на произведение двух тензоров – одного, отвечающего за необратимые, связанные с ростом, деформации, и другого – отвечающего за упругие деформации. В случае объемного изотропного роста для хрящевой ткани $\mathbf{F} = \vartheta\mathbf{F}_e$, где ϑ – объемный изотропный рост клеток хряща, $\mathbf{F}_e$ – упругая составляющая.

Кинетическая устойчивость. Механизм закрытия пластинки роста состоит в том, что граница между хрящом и костью перестает быть плоской, становится бороздчатой, бороздки (костная ткань) развиваются в сторону верхней части пластинки роста, образуя мостики. Количество таких мостиков со временем увеличивается, и пластинка закрывается [2]. Чрезмерная нагрузка может приводить к преждевременному закрытию пластинки роста [3]. Исследуется влияние параметров нагружения, скорости границы и параметра объемного роста на потерю устойчивости границы окостенения. Исследования устойчивости найденных решений проводятся на основе разработанного ранее кинетического критерия, согласно которому возмущения в окрестности точек бифуркации линеаризованной системы уравнений равновесия развиваются, если состояние неустойчиво [4, 5].

Заключение

Для ряда определяющих соотношений хрящевой и костной тканей установлено следующее:

– анализ решения уравнений на границе окостенения показал, что растягивающие напряжения ведут к увеличению величины скорости движения границы окостенения, сжимающие – к уменьшению, что согласуется с экспериментальными данными [1];

– для меньших скоростей движения границы V_m^Γ потеря устойчивости происходит при меньших значениях параметров нагружения, что может интерпретироваться, как уменьшение скорости движения границы окостенения и приводить к более быстрому началу «мостикообразования», что согласуется с наблюдаемыми данными [3];

– увеличение объемного роста оказывает как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффекты в зависимости от выбранной энергии деформации.

Работа выполнена совместно с А.Б. Фрейдиным (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург) и Ж. Моженом (Университет Пьера и Марии Кюри, Париж 6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00849).

Список литературы

1. Carter D.R., Beaupre G.S. Skeletal Function and Form: Mechanobiology of Skeletal Development, Aging, and Regeneration, Cambridge University Press, 2001. 330 p.

2. Martin E.A., Ritman E.L., Turner R.T. //Bone. 2003. V. 32. P. 261–267.

3. Bonnel F. et al. // Acta orthop. scand. 1983. V. 54. P. 730–733.

4. Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. //

Докл. РАН. 2003. Т. 48, №7. С. 359–363.

5. Freidin A.B., Fu Y.B., Sharipova L.L., Vilchevskaya E.N. // Int. J. Solids Structures. 2006. V. 43, No 14–15. P. 4484–4508.

MODELING THE INFLUENCE OF MECHANICAL FACTORS ON THE GROWTH PLATE

L.L. Sharipova

A model to investigate the influence of mechanical factors and a parameter of biological growth on the stationary movement of the ossification boundary in the growth plate, its orientation and stability is developed. Critical values of loading parameters, the parameter of biological growth and the rate of boundary movement at which the ossification boundary changes its orientation and loses stability are obtained.

Keywords: biomechanics, growth plate, volumetric growth, ossification, kinetics, stresses, modelling.