

УДК 621.396.965

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УГЛОВЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ В НЕЭКВИДИСТАНТНЫХ ЧАСТИЧНО КАЛИБРОВАННЫХ ПОДРЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРОЕКЦИОННОГО АЛГОРИТМА

© 2011 г.

Д.В. Демидов¹, Е.А. Маврычев¹, А.Г. Флакман²

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева

²Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

mavrychev.eugene@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается антенная решетка, состоящая из частично калиброванных подрешеток, имеющих произвольную геометрию. Предлагаются методы разрешения и измерения направлений прихода источников сигнала, основанные на применении полиномиального алгоритма RARE. Данные методы используют интерполяцию подрешеток с помощью линейных эквидистантных подрешеток и аппроксимацию псевдоспектра в частотной области с помощью дискретного преобразования Фурье. Предлагаемые подходы являются обобщением полиномиального алгоритма MUSIC и позволяют снизить вычислительную сложность алгоритма оценивания. Представлены результаты математического моделирования, показывающие точности оценок угловых направлений.

Ключевые слова: антенные решетки, проекционные алгоритмы, частично калиброванные подрешетки.

Введение

Антенные решетки (АР) широко применяются в радиосвязи, гидро- и радиолокации, сейсмологии, радиоастрономии и т.д. Применение современных методов обработки сигналов в АР позволяет повысить разрешающую способность систем обработки информации. Во многих практических задачах возникают трудности при калибровке АР. Особенно это касается больших антенных систем, а также систем, состоящих из пространственно разнесенных подрешеток. В связи с этим получили распространение алгоритмы оценивания параметров сигналов, использующие частичное знание геометрии. Метод RARE (rank reduction) [1, 2] позволяет разрешать и оценивать параметры сигналов с помощью АР, состоящей из подрешеток, без знания взаимного расположения подрешеток и взаимной амплитудно-фазовой калибровки. Этот метод можно отнести к классу проекционных алгоритмов, основанных на использовании проектора на подпространство собственного шума, ортогональное сигнальному подпространству. Метод RARE является обобщением MUSIC [3] на случай частично калиброванных подрешеток.

Использование спектральных алгоритмов MUSIC и RARE требует больших вычислительных затрат, связанных с нахождением псевдо-

спектров. Существуют различные подходы, позволяющие снизить вычислительные затраты данных методов. В частном случае для линейных эквидистантных АР применяется полиномиальная разновидность алгоритмов MUSIC [4, 5] и RARE [2]. Вместо вычисления псевдоспектра в полиномиальных алгоритмах задача оценивания сводится к вычислению коэффициентов полинома и поиску его корней.

Полиномиальные алгоритмы могут быть модифицированы для АР произвольной геометрии. В работах [6, 7] предлагается использовать полиномиальный алгоритм с интерполяцией неэквидистантной АР с помощью линейной эквидистантной решетки. Развитие данного подхода для полиномиального алгоритма RARE выполнено в работе [8]. Альтернативной возможностью использования полиномиального поиска является переход в частотную область. В статье [9] разработан алгоритм с использованием аппроксимации MUSIC псевдоспектра с помощью полинома, коэффициенты которого являются коэффициентами ряда Фурье. Данный метод назван полиномиальным методом MUSIC в частотной области. Модификация алгоритма, предложенного в [9], для частично калиброванных подрешеток выполнена в работе [10].

В данной работе рассматривается задача оценивания угловых положений источников сигналов, принимаемых с помощью антенной

решетки, состоящей из неэквилидистантных подрешеток с произвольной геометрией. Предлагается обобщить полиномиальные алгоритмы MUSIC для неэквилидистантных решеток на случай частично калиброванных подрешеток. Рассматривается полиномиальный метод RARE с интерполяцией и полиномиальный метод RARE в частотной области. Предлагаемые методы не имеют ограничений по геометрии подрешеток. Рассматриваемые алгоритмы оценки угловых положений источников основаны на решении полиномиального уравнения, что дает возможность существенно снизить вычислительные затраты по сравнению со спектральными алгоритмами [9]. В статье приводятся результаты математического моделирования, показывающие высокую точность оценивания угловых положений источников сигналов с помощью рассмотренных алгоритмов.

Антенная решетка с частичной калибровкой

Рассмотрим модель сигналов, принимаемых N -элементной АР, состоящей из K неэквилидистантных подрешеток произвольной геометрии. Пусть k -я подрешетка состоит из N_k элементов. Полагаем, что взаимное расположение подрешеток является произвольным и неизвестным. Комплексные амплитуды сигнала, приходящего с направления θ , в элементах решетки представим в виде вектора

$$\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{V}(\theta)\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha}). \quad (1)$$

Матрица $\mathbf{V}(\theta)$ размерности $N \times K$, являющаяся функцией информационного параметра θ , зависит от известных геометрических параметров АР и может быть записана в виде

$$\mathbf{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(\theta) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_2(\theta) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{v}_K(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_k(\theta)$ – вектор комплексных амплитуд сигнала, принимаемого k -й неэквилидистантной подрешеткой, представляемый как

$$\mathbf{v}_k(\theta) = [\exp\{j2\pi(x_{k,1}\sin\theta + y_{k,1}\cos\theta)\}, \dots, \exp\{j2\pi(x_{k,N_k}\sin\theta + y_{k,N_k}\cos\theta)\}]^T, \quad (3)$$

где $x_{k,n}$, $y_{k,n}$ – координаты (в длинах волн) n -го элемента k -й подрешетки.

Вектор $\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ размерности $K \times 1$ зависит от информационного параметра θ и неизвестных параметров $\boldsymbol{\alpha}$, определяющих взаимные положения подрешеток и амплитудно-фазовую калибровку подрешеток относительно первой

подрешетки. Вектор $\boldsymbol{\alpha} = [\varphi_2, \gamma_2, \xi_{x2}, \xi_{y2}, \dots, \varphi_K, \gamma_K, \xi_{xK}, \xi_{yK}]$ размерности $(4K-4) \times 1$ содержит разности фаз между подрешетками, амплитудные коэффициенты и координаты подрешеток начиная со второй относительно первой подрешетки. Тогда первый элемент вектора $\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ будет равен $h_1(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = 1$, а k -й элемент ($k = 2, K$) вектора $\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ можно записать как

$$h_k(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \gamma_k \exp(-j\varphi_k - jk\xi_{xk} \sin\theta - jk\xi_{yk} \cos\theta). \quad (4)$$

Таким образом, вектор сигнала $\mathbf{a}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ представляется в виде произведения матрицы $\mathbf{V}(\theta)$ и вектора $\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$, в котором матрица $\mathbf{V}(\theta)$ зависит от известных параметров АР и информационного параметра θ , а вектор $\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ зависит от неизвестных параметров АР.

Пусть АР принимает сигналы от J источников, приходящие с направлений $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_J$. Вектор сигнала $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$, принимаемого АР, запишем в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (5)$$

где \mathbf{A} – матрица размерности $N \times J$, состоящая из векторов фазового распределения принимаемых сигналов в АР, т.е. $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{a}(\theta_2, \boldsymbol{\alpha}), \dots, \mathbf{a}(\theta_J, \boldsymbol{\alpha})]$; $\mathbf{s}(t)$ – вектор комплексных амплитуд размерности $J \times 1$; $\mathbf{n}(t)$ – вектор собственных шумов АР размерности $N \times 1$. Корреляционную матрицу (КМ) входного сигнала представим следующим образом:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma_0^2\mathbf{I}_N, \quad (6)$$

где $E\{\}$ – статистическое усреднение; σ_0^2 – дисперсия собственного шума; \mathbf{R}_{ss} – матрица взаимной корреляции сигналов различных источников размерности $J \times J$.

Разложение КМ в базис собственных векторов запишем как

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_s\boldsymbol{\Lambda}_s\mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n\boldsymbol{\Lambda}_n\mathbf{U}_n^H, \quad (7)$$

где \mathbf{U}_s – матрица размерности $N \times J$, состоящая из собственных векторов сигнального подпространства; \mathbf{U}_n – матрица размерности $N \times (N-J)$, состоящая из собственных векторов шумового подпространства; $\boldsymbol{\Lambda}_s$ – диагональная матрица размерности $J \times J$, состоящая из собственных чисел сигнального подпространства; $\boldsymbol{\Lambda}_n$ – диагональная матрица размерности $(N-J) \times (N-J)$, состоящая из собственных чисел шумового подпространства, равных мощности собственного шума σ_0^2 .

Выборочная КМ и ее разложение в базис собственных векторов имеют вид

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) = \hat{\mathbf{U}}_s\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s\hat{\mathbf{U}}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n\hat{\mathbf{U}}_n^H. \quad (8)$$

Рассмотрим алгоритм RARE [1, 2], полагая, что матрица взаимной корреляции сигналов \mathbf{R}_{ss} имеет полный ранг, равный J . Проектор на шумовое подпространство ортогонален векторам принимаемых сигналов $\mathbf{a}(\theta_1, \boldsymbol{\alpha}), \dots, \mathbf{a}(\theta_J, \boldsymbol{\alpha})$, тогда для значений θ , соответствующих направлениям на источники сигналов

$$\mathbf{h}^H(\theta, \boldsymbol{\alpha})\mathbf{V}(\theta)\mathbf{h}(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{V}(\theta) = \mathbf{V}^H(\theta)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{V}(\theta). \quad (10)$$

В общем случае при выполнении условия $K < N - J$ матрица $\mathbf{V}(\theta)$ имеет полный ранг. Тогда выражение (9) будет равно нулю при понижении ранга матрицы $\mathbf{V}(\theta)$ или при условии

$$\det \mathbf{V}(\theta) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, значения угловых направлений на источники сигналов будут являться корнями уравнения (11). Оценивание параметров сигналов осуществляется по выборке конечного размера с использованием выборочной КМ $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$. Псевдоспектр, полученный на основе метода RARE, записывается в виде

$$f_{RARE}(\theta) = \frac{1}{\det \hat{\mathbf{V}}(\theta)}, \quad (12)$$

где матрица $\hat{\mathbf{V}}(\theta)$ вычисляется на основе оценки КМ:

$$\hat{\mathbf{V}}(\theta) = \mathbf{V}^H(\theta)\hat{\mathbf{U}}_n\hat{\mathbf{U}}_n^H\mathbf{V}(\theta). \quad (13)$$

Максимумы псевдоспектра (12) соответствуют направлениям на источники сигналов. Оценивание угловых направлений на основе пространственного псевдоспектра (12) называют спектральной разновидностью метода RARE.

Алгоритм RARE для линейных эквидистантных подрешеток может быть представлен в полиномиальной форме [2]. Вектор сигнала, принимаемого линейной эквидистантной подрешеткой, приходящего с направления θ , является параметром комплексной переменной z и равен $\mathbf{v}_k(z) = [1 \ z \ \dots \ z^{N_k-1}]^T$, где $z = \exp(-j2\pi d \sin \theta)$, d – расстояние между элементами эквидистантной подрешетки в длинах волн.

Для нахождения оценок угловых направлений на источники необходимо знать корни следующего уравнения:

$$\det \hat{\mathbf{B}}(z) = 0. \quad (14)$$

Левая часть уравнения (14) является полиномом степени $(2N - K)$. Комплексные корни уравнения (14), лежащие внутри окружности единичного радиуса ($|z| \leq 1$), наиболее близкие к границе, соответствуют направлениям на источники сигнала [2]. Применение стандартных

подпрограмм вычисления корней полиномов позволяет снизить вычислительные затраты на оценивание параметров сигналов.

Полиномиальный метод RARE с интерполяцией

Рассмотрим реализацию полиномиального алгоритма для подрешеток произвольной геометрии. Такая реализация возможна при использовании интерполяции подрешеток. Идея интерполяции заключается в представлении неэквидистантной подрешетки с помощью линейной эквидистантной подрешетки

$$\mathbf{v}_k(\theta) \approx \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k(\theta), \quad (15)$$

где \mathbf{G}_k – матрица преобразования размерности $N_k \times M_k$; $\mathbf{u}_k(\theta)$ – вектор сигнала интерполированной подрешетки с M_k элементами и расстоянием между элементами d в длинах волн:

$$\mathbf{u}_k(\theta) = [1 \ \exp\{j2\pi d \sin \theta\} \ \dots \ \exp\{j2\pi d (M_k - 1) \sin \theta\}]^T. \quad (16)$$

В соответствии с (15) матрица \mathbf{G}_k преобразует вектор сигнала линейной эквидистантной подрешетки в вектор сигнала неэквидистантной подрешетки. Матрица \mathbf{G}_k вычисляется исходя из минимизации ошибки интерполяции в заданном секторе углов методом наименьших квадратов. Используя (15), матрицу информационного параметра антенной решетки $\mathbf{V}(\theta)$ и матрицу проекций на шумовое подпространство $\hat{\mathbf{V}}(\theta)$ можно представить в виде приближений

$$\mathbf{V}(\theta) \approx \mathbf{F}\mathbf{U}(\theta), \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{V}}(\theta) \approx \mathbf{F}^H \mathbf{U}^H(\theta) \hat{\mathbf{E}}_n \hat{\mathbf{E}}_n^H \mathbf{U}(\theta) \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{B}}(\theta),$$

где \mathbf{F} – матрица размерности $N \times M$, $\mathbf{U}(\theta)$ – матрица размерности $M \times J$, а M – суммарное число виртуальных элементов

$$\mathbf{F}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2(\theta) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{G}_K(\theta) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2(\theta) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{u}_K(\theta) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\tilde{\mathbf{B}}(\theta)$ зависит только от вектора интерполированной линейной эквидистантной подрешетки $\mathbf{u}(\theta)$ и не зависит от вектора сигнала исходной неэквидистантной подрешетки $\mathbf{v}(\theta)$. Вектор сигнала линейной эк-

видистантной подрешетки, приходящего с направления θ , является параметром комплексной переменной z и представляется как $\mathbf{u}_k(z) = [1 \ z \ \dots \ z^{M_k-1}]^T$.

Таким образом, матрица $\tilde{\mathbf{B}}(z)$ содержит элементы, являющиеся полиномами комплексной переменной z . Для нахождения оценок угловых направлений на источники необходимо найти корни полиномиального уравнения степени $(2M-K)$

$$\det \tilde{\mathbf{B}}(z) = 0. \quad (19)$$

Полиномиальный метод RARE в частотной области

Учитывая, что псевдоспектр RARE (12) является периодической функцией с периодом 2π , разложим функцию псевдоспектра в ряд Фурье:

$$f_{RARE}(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\theta}, \quad (20)$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются как

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{RARE}(\theta) e^{-jm\theta} d\theta. \quad (21)$$

Ограничивая ряд Фурье $2M-1$ точками и используя определение $z = e^{j\theta}$, функцию псевдоспектра можно аппроксимировать следующим полиномом:

$$f(\theta) \approx \sum_{m=-M+1}^{M-1} F_m z^m = p(z). \quad (22)$$

Коэффициенты ряда Фурье F_m ($m = -M+1, \dots, M-1$) вычисляются с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Коэффициенты, полученные с помощью ДПФ, не точно равны коэффициентам разложения в бесконечный ряд Фурье. Однако за счет увеличения числа точек можно достичь малой ошибки аппроксимации, которая обеспечит достаточную точность оценки параметров.

В качестве входных данных для ДПФ берутся отсчеты псевдоспектра. Таким образом, мы можем использовать следующую аппроксимацию, основанную на ДПФ:

$$\tilde{p}(z) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \tilde{F}_m z^m, \quad (23)$$

где \tilde{F}_m ($m = -M+1, \dots, M-1$) – коэффициенты ДПФ.

Согласно (23), степень полинома $\tilde{p}(z)$ равна $2M-2$. Направления прихода сигналов могут быть найдены из решения полиномиального

уравнения. Легко показать, что если комплексное число z_0 – корень полинома $\tilde{p}(z)$, то число, обратное и комплексно сопряженное, $z_0' = 1/z_0^*$, также является корнем уравнения. Примем, что z_0 – корень полинома. Считая, что $\tilde{F}_m = \tilde{F}_{-m}$, имеем

$$\sum_{m=-M+1}^{M-1} \tilde{F}_m z_0^m = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \tilde{F}_{-m} z_0^{*m} = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \tilde{F}_m z_0'^m = 0. \quad (24)$$

Комплексные корни полинома (23), лежащие внутри окружности единичного радиуса ($|z| \leq 1$), наиболее близкие к границе, соответствуют направлениям на источники сигнала.

Результаты моделирования

Приведем результаты моделирования, показывающие возможности оценки параметров сигналов с помощью предложенных алгоритмов. В качестве примера рассмотрим АР, состоящую из четырех кольцевых подрешеток. Число элементов в подрешетках равно $M_1 = 16$, $M_2 = 12$, $M_3 = 18$, $M_4 = 10$. Геометрическая конфигурация АР показана на рис. 1. АР принимает сигналы от двух некоррелированных шумовых источников одинаковой мощности, находящихся в направлениях $\theta_1 = 3^\circ$ и $\theta_2 = -2^\circ$. Усреднение оценок и вычисление среднеквадратической ошибки (RMSE) выполняется по 1000 независимым экспериментам.

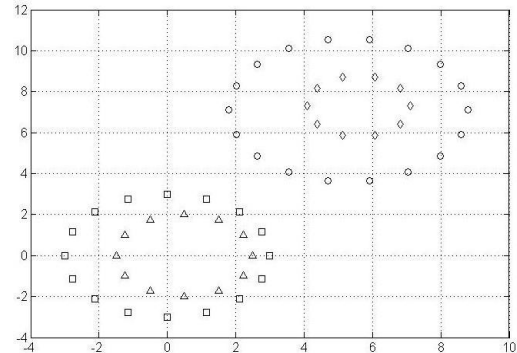


Рис. 1. Конфигурация антенной решетки

На рисунках, приведенных ниже, представлены результаты моделирования, полученные с помощью трех различных методов: метода RARE с интерполяцией (кривые, отмеченные кружочками), метода RARE в частотной области с поиском корней полиномов (кривые, отмеченные квадратиками) и спектрального метода RARE [2] (кривые, отмеченные точками), с которым производится сравнение предложенных алгоритмов. Кроме того, строится граница Крамера–Рао (кривые без маркеров), вычислен-

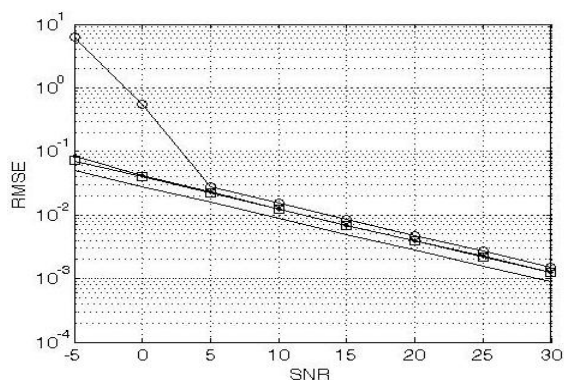


Рис. 2. Зависимость ошибки оценивания от отношения сигнал/шум

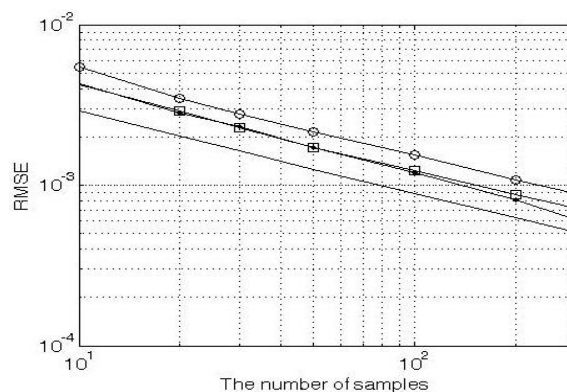


Рис. 3. Зависимость ошибки оценивания от числа выборок

ная для стохастической модели сигналов в соответствии с [2], показывающая потенциально достижимую точность оценки.

На рис. 2 показана зависимость среднеквадратической ошибки оценки угловых положений источников от отношения сигнал/шум, а на рис. 3 – зависимость среднеквадратической ошибки от числа выборок, по которым выполняется оценка корреляционной матрицы. Из представленных кривых видно, что среднеквадратические ошибки оценивания предлагаемых алгоритмов снижаются с ростом отношения сигнал/шум и увеличением числа выборок для оценки корреляционной матрицы. Метод RARE с интерполяцией уступает в точности методу RARE в частотной области. Ошибки оценивания метода RARE в частотной области очень близки ошибкам спектрального алгоритма RARE. Отметим, что полученные в результате моделирования кривые для всех трех методов лежат несколько выше границы Крамера–Рао.

Выводы

Таким образом, в работе рассмотрены методы оценивания параметров сигналов в антенных решетках, состоящих из неэквилидистантных подрешеток. Данные методы основаны на использовании полиномиального проекционного алгоритма RARE. Применение полиномиального алгоритма позволяет снизить вычислитель-

ную сложность по сравнению со спектральным алгоритмом. В результате математического моделирования получены точности оценивания угловых положений источников с помощью рассмотренных алгоритмов.

Список литературы

1. Pesavento M., Gershman A.B., and Wong K.M. // IEEE Trans. Signal Processing. Sep. 2002. V. 50. P. 2103–2115.
2. See C.M.S. and Gershman A.B. // IEEE Trans. Signal Processing. Feb. 2004. V. 52. P. 329–338.
3. Schmidt R. O. // Proc. RADC Spectral Estimation Workshop, Rome, NY. 1979. P. 243–258.
4. Barabell A. // Proc. ICASSP'83, Boston, MA, USA. April 1983. P. 336–339.
5. Rao B.D. and Hari K.V.S. // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. Dec. 1989. V. 37. P. 1939–1949.
6. Friedlander B. // Signal Processing. 1993. V. 30. P. 15–25.
7. Belloni F., Richter A., and Koivunen V. // IEEE Trans. Signal Processing. Oct. 2007. V. 55. № 10. P. 4800–4810.
8. Демидов Д.В., Маврычев Е.А. // Доклады IV Всероссийской конференции «Радиолокация и связь», Москва, 29 ноября–3 декабря 2010. С. 380–384.
9. RübSamen M. and Gershman A.B. // IEEE Trans. Signal Processing. Feb. 2009. V. 57. P. 588–599.
10. Демидов Д.В., Маврычев Е.А. // XVII Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация, связь», Воронеж, 12–14 апреля 2011 г. Т. 1. С. 296–303.

DIRECTION-OF-ARRIVAL ESTIMATION METHODS IN NONEQUIDISTANT PARTLY CALIBRATED SUBARRAYS BASED ON A POLYNOMIAL PROJECTION ALGORITHM

D.V. Demidov, E.A. Mavrychev, A.G. Flaksman

An antenna array consisting of partly calibrated subarrays with arbitrary geometry is considered. Direction-of-arrival estimation methods based on the polynomial root-finding algorithm RARE are proposed. These methods use subarray interpolation with linear and equidistant subarrays and pseudospectrum approximation in the frequency domain with DFT. These approaches are the generalization of the polynomial algorithm MUSIC and they make it possible to reduce the complexity of direction-of-arrival estimations. Mathematical simulation results presented show the accuracy of direction-of-arrival estimations.

Keywords: antenna arrays, projection algorithms, partly calibrated subarrays.