

УДК 621.391.1

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2011 г.

В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

matrosov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 30.05.2011

Рассматривается задача синхронизации хаотически модулированных колебаний с использованием принципа автоподстройки. Показано, что применение принципа автоподстройки позволяет повысить точность синхронизации хаотических колебаний, а также расширить области существования режима хаотической синхронизации в пространстве параметров фазоуправляемых генераторов.

Ключевые слова: динамический хаос, синхронизация, фазовые системы, автоподстройка.

Введение

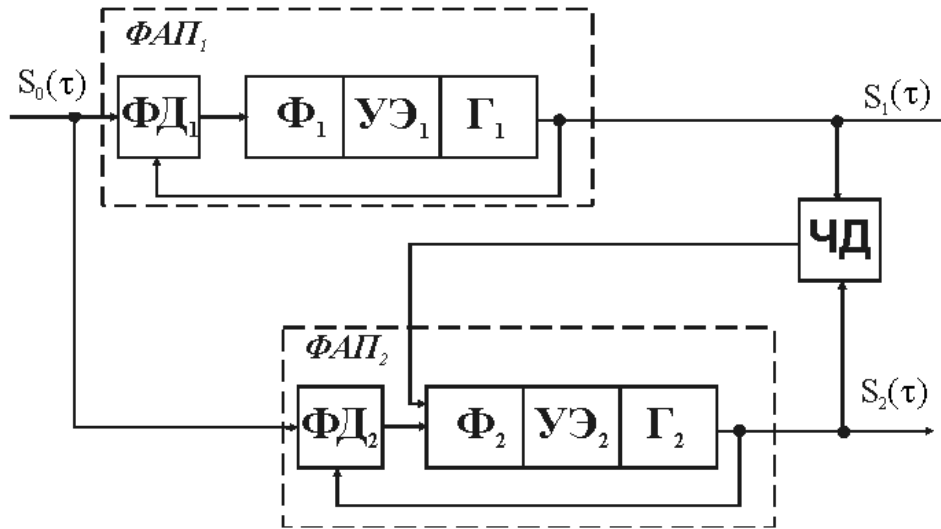
Явление синхронизации хаотических колебаний было открыто около трех десятилетий назад [1, 2]. В последующие годы появился огромный поток публикаций по этой проблеме, тем не менее сегодня можно констатировать, что достаточно удовлетворительной теории синхронизации хаотических колебаний пока не существует. Трудности построения стройной теории синхронизации хаотических колебаний в значительной мере обусловлены размытостью понятия фазы и частоты хаотических сигналов и следующей отсюда неопределенностью того, что целесообразно считать явлением синхронизации хаотических колебаний, что является критерием синхронизации и т.д. Важно также отметить, что развитие теории синхронизации хаотических колебаний сейчас происходит на фоне крайне слабой заинтересованности в построении такой теории со стороны физических и технических приложений и, следовательно, при отсутствии четких целевых установок для развития теории; поэтому, к сожалению, многие задачи по синхронизации хаотических колебаний формулируются исходя из модельных представлений, а не из требований практических приложений.

В начале 90-х годов появилась яркая идея практического использования динамического хаоса для скрытой передачи информации [3]. Идея оказалась весьма привлекательной. Теоретические исследования и макетные разработки, выполненные в 90-х годах, подтвердили принципиальную возможность реализации систем передачи информации с использованием хаотических колебаний в качестве несущих. Однако в

различных макетах для создания в приемнике копии хаотических колебаний, использованных при передаче в качестве несущих (что принципиально необходимо при когерентном приеме), потребовалось выполнить условие высокой идентичности параметров генераторов хаоса в передатчике и приемнике, что привело к низкой помехоустойчивости и слабой криптостойкости разработанных систем. Дальнейшее развитие этого направления привело к заключению о бесперспективности создания конкурентоспособных приемопередающих устройств на основе динамического хаоса, реализующих когерентный способ приема [4]. Одним из вариантов альтернативного подхода к решению проблемы является использование хаотически модулированных колебаний (ХМК) при передаче информации [5]. Переход к ХМК, вообще говоря, может привести к некоторому ухудшению свойств широкополосности хаотического сигнала, однако несомненным преимуществом станет возможность решения задачи о надежной синхронизации ХМК. В [6, 7] показано, что на основе свойств коллективной динамики ансамблей связанных систем фазовой автоподстройки (ФАП) можно построить высокоэффективные генераторы хаотически модулированных колебаний со стабилизированной по опорному колебанию центральной частотой. Рассмотрим далее задачу о синхронизации таких колебаний.

Схема и динамическая модель синхронизации

Рассмотрим задачу синхронизации хаотических колебаний двух однонаправленно связанных генераторов хаотических колебаний на базе

Рис. 1. Схема синхронизации хаотических колебаний генераторов Γ_1 и Γ_2

двух систем ФАП₁ и ФАП₂ (рис. 1). Для достижения синхронизации ФАП₁ и ФАП₂ связаны через дополнительный частотный дискриминатор ЧД, на котором формируется сигнал $\Phi(y_2 - y_1)$ для управления частотой генератора Γ_2 . Математической моделью таким образом связанных ФАП₁ и ФАП₂ является система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin \varphi_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \delta \Phi(y_2 - y_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где первые три уравнения описывают динамику ФАП₁, последние три уравнения – ФАП₂ с дополнительным управлением, нелинейность частотного дискриминатора аппроксимируется функцией $\Phi(y) = 2\alpha y / (1 + \alpha^2 y^2)$. Здесь φ_1 и φ_2 (y_1 и y_2) – текущие разности фаз (частот) колебаний генераторов Γ_1 и Γ_2 относительно опорного сигнала $S_0(\tau)$; безразмерные параметры γ_1 и γ_2 характеризуют начальные частотные расстройки колебаний генераторов относительно $S_0(\tau)$, ε_1 , μ_1 и ε_2 , μ_2 – параметры фильтров Φ_1 и Φ_2 , δ – силу связи (управления).

При моделировании динамики (1) параметры γ_1 , ε_1 , μ_1 выбирались такими, что сигнал $S_1(\tau)$ являлся хаотически модулированным со стабилизированной по опорному сигналу $S_0(\tau)$ средней частотой, параметры $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, таким образом, сигнал $S_2(\tau)$ в общем случае отличается от $S_1(\tau)$. При отсутствии связи ($\delta = 0$) да-

же при близких параметрах ФАП₁ и ФАП₂ синхронизации колебаний ФАП₁ (рис. 2а) и ФАП₂ (рис. 2б) нет (рис. 2в). Введением связи ($\delta > 0$) можно добиться синхронизации ХМК (рис. 2г), при этом силой связи можно обеспечить уменьшение ошибки синхронизации ε до малых величин (рис. 2д), т.е. осуществить с заданной точностью синхронизацию ХМК₁ с выхода ФАП₁ и ХМК₂ с выхода ФАП₂.

Динамические режимы и характеристики синхронизации хаотически модулированных колебаний

Проанализируем полученные процессы синхронизации хаотически модулированных колебаний. Очевидно, что такой анализ целесообразно вести с позиций использования динамического хаоса для передачи информации. В этом случае задачи синхронизации хаотически модулированных колебаний в общей своей постановке практически не отличаются от задач синхронизации регулярных колебаний. Так же как и в случае регулярных колебаний, они должны включать оценку качества синхронизации и предусматривать, в первую очередь, оценку следующих показателей: размеров областей удержания и захвата режима хаотической синхронизации, точности синхронизации, времени установления режима синхронизации.

Режим синхронизации хаотически модулированных колебаний. В фазовом пространстве модели (1) режиму синхронизации отвечает некоторое устойчивое многообразие W^s – многообразие синхронизации. В случае синхронизации хаотических колебаний идентичных систем

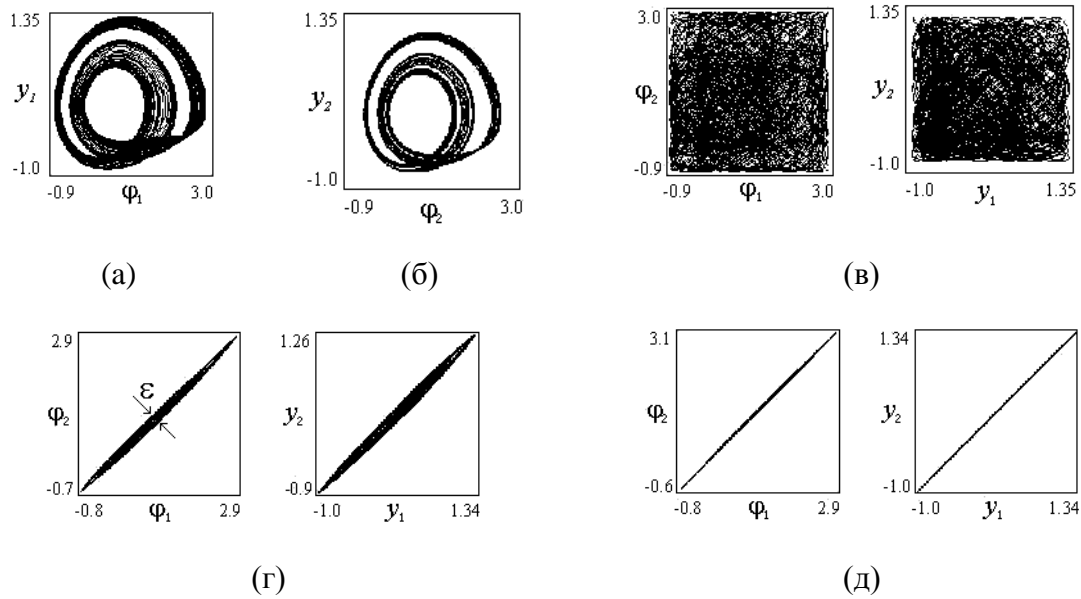


Рис. 2. Проекция хаотического аттрактора модели (1) при $\gamma_1=0.46$, $\gamma_2=0.51$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\mu_1=\mu_2=2.2$ в случае $\delta = 0$ (а–в); в случае нелинейного управления $\alpha=30$, $\delta = 0.3$ (г) и $\delta=0.7$ (д)

(в рассматриваемом случае это означает равенство в модели (1) параметров ФАП₁ и ФАП₂: $\gamma_1=\gamma_2$, $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $\mu_1=\mu_2$) проекции W^S на плоскости соответствующих фазовых переменных (φ_1, φ_2) , (y_1, y_2) , (z_1, z_2) представляют собой отрезки, размещенные на диагоналях. Проекция W^S на плоскости разностей соответствующих фазовых переменных $[(\varphi_2 - \varphi_1), (y_2 - y_1)]$, $[(\varphi_2 - \varphi_1), (z_2 - z_1)]$, $[(y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$ есть точки.

В случае неидентичных систем проекция многообразия W^S на плоскости соответствующих фазовых переменных всегда обладают некоторой «толщиной» (рис. 3а, б, в), а на плоскостях разностей соответствующих фазовых переменных вместо точки появляется некоторое множество, по виду напоминающее проекцию колебательного хаотического аттрактора, у которого фазовые переменные изменяются в небольших пределах (рис. 3г, д, е). Следует обратить внимание на то, что в случае неидентичных систем некоторые проекции W^S на плоскости соответствующих фазовых переменных могут размещаться не в окрестности самих диагоналей, а в окрестности прямых, параллельных этим диагоналям, как на рис. 3а. В этом случае синхронизация наступает с точностью до констант, определяемых величинами сдвига прямых относительно диагоналей. Значения констант определяют остаточные ошибки синхронизации по соответствующим переменным.

Точность хаотической синхронизации. Толщина многообразия W^S или ε – радиус окружности, которой можно окружить проекцию W^S на

плоскостях разностей фазовых переменных, характеризует точность синхронизации. Эта величина имеет особое значение, поскольку, в случае практического использования явления хаотической синхронизации, именно она характеризует качество синхронизации. В задачах передачи информации с когерентным приемом от точности синхронизации зависит точность воспроизведения принимаемой информации.

Область удержания режима хаотической синхронизации. Такой областью в пространстве параметров динамических моделей можно назвать область существования режима хаотической синхронизации. Однако здесь следует обратить внимание на то, что вопрос о существовании режима хаотической синхронизации целесообразно увязывать с точностью синхронизации, поскольку от точности синхронизации зависит размер области удержания.

Область захвата в режим хаотической синхронизации. Это область пространства параметров, где режим синхронизации наступает гарантированно при любых или при определенных, характерных для каждой конкретной модели, начальных условиях. Отсюда можно предложить несколько подходов к определению границ области захвата: граница определяется либо условиями глобальной устойчивости многообразия W^S , либо условием принадлежности набора характерных начальных условий бассейну притяжения W^S . Задача об определении области захвата в режим хаотической синхронизации, так же как и в случае определения области удержания режима

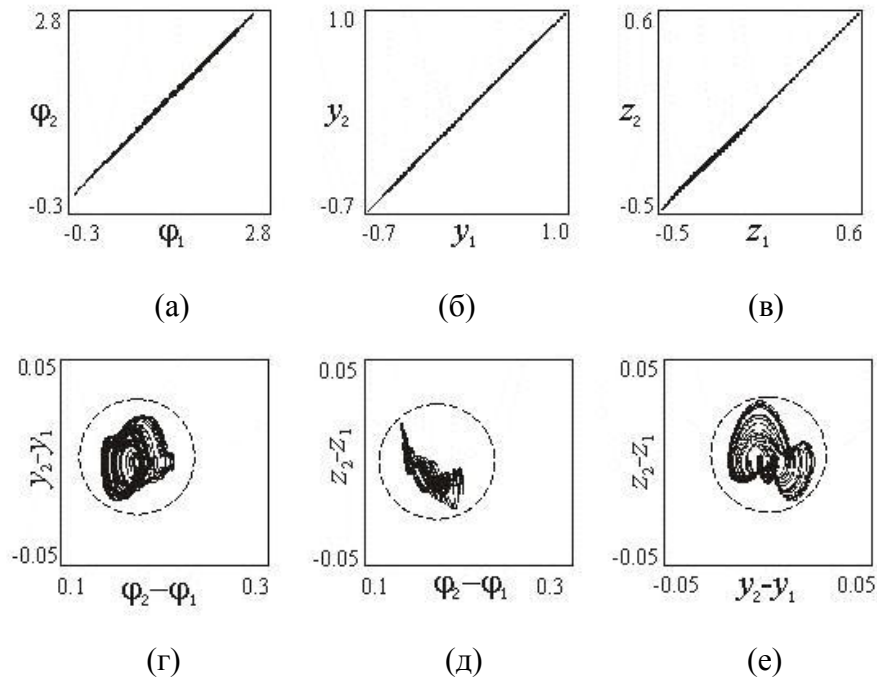


Рис. 3. Проекция многообразия синхронизации W^δ в случае неидентичных систем. Пунктирная линия воспроизводит ε -окрестность, характеризующую точность синхронизации

хаотической синхронизации, должна решаться с учетом точности синхронизации.

Время установления режима синхронизации. Это время переходного процесса от начального состояния до установления в системе режима хаотической синхронизации, т.е. время достижения фазовой траекторией некоторой ε -окрестности многообразия W^δ .

Важное место в исследованиях хаотической синхронизации занимает изучение сценариев установления и срыва режима синхронизации, т.к. понимание этих механизмов позволяет не только разрабатывать оптимальные алгоритмы расчета динамических характеристик систем синхронизации (областей захвата и удержания, точности синхронизации, времени установления режима синхронизации и т.д.), но и минимизировать ошибки этих расчетов.

Моделирование процессов синхронизации ХМК

Перейдем к рассмотрению решения обозначенных выше задач применительно к модели (1). На рис. 4 приведены результаты расчета границ областей захвата и удержания в режим хаотической синхронизации. Здесь *линия 1* определяет область существования режима хаотической синхронизации, *линия 2* ограничивает область, где этот режим глобально устойчив, – область захвата. Граница области удержания

рассчитана по следующему алгоритму. Изначально в модели (1) значения параметров и начальные состояния ФАП₁ и ФАП₂ выбираются одинаковыми. В модели (1) устанавливается режим хаотической синхронизации¹. Далее значения параметров системы ФАП₁ остаются неизменными, а значения параметров ФАП₂ меняются, удаляясь от значений параметров ФАП₁. При этом начальные состояния модели (1) для новых значений параметров наследуются с предыдущего шага. Рассогласования параметров ФАП₂ и ФАП₁ увеличиваются до тех пор, пока не произойдет срыв синхронизации.

Расчет границы области захвата осуществляется в обратном порядке. Теперь изначально значения параметров и начальное состояние модели (1) выбираются таким образом, чтобы ФАП₂ и ФАП₁ находились в асинхронном режиме. Далее параметры системы ФАП₂ меняются в сторону уменьшения рассогласований между значениями параметров ФАП₁ и ФАП₂, начальные состояния модели (1) при этом наследуются. Границе области захвата соответствуют такие значения параметров, когда в модели (1) вновь установится режим хаотической синхронизации.

Если нанести границы областей удержания режима хаотической синхронизации на карту динамических режимов автономной модели ФАП₂ [1, 3], то получим рис. 5, из которого видно, что области синхронизации модели (1) могут

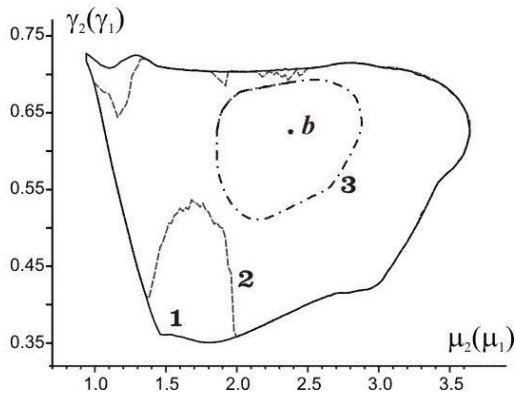


Рис. 4. Области захвата и удержания режима хаотической синхронизации в модели (1) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\mu_1 = 2.38$, $\gamma_1 = 0.625$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 30$: точка b иллюстрирует значения параметров ФАП₁, линия 1 есть граница области удержания режима хаотической синхронизации (точность синхронизации $\varepsilon=0.2$), линия 2 – граница области захвата, линия 3 – граница области синхронизации с повышенной точностью (точность синхронизации $\varepsilon=0.01$)

захватывать области существования различных динамических режимов автономной модели ФАП₂. Отсюда следует, что при разомкнутом кольце автоподстройки ($\delta=0$) ФАП₂ может функционировать практически в любом из возможных динамических режимов: от режима генерации регулярных колебаний, синхронизированных с опорным сигналом, до режима генерации хаотически модулированных колебаний. Цепи автоподстройки здесь не только позволяют скомпенсировать существенную разницу между двумя колебательными процессами, но и обеспечивают поддержание режима хаотической синхронизации с высокой точностью на протяжении длительного времени. Заметим, что на установление режима хаотической синхронизации существенное влияние оказывают как характеристики самих колебательных движений, так и параметры цепей автоподстройки. В примере, представленном на рис. 5, хаотические колебания в цепи управления ФАП₁ для значений параметров, определенных в точках a и b , различаются амплитудами, в частности проекции аттрактора модели (1) на плоскость (φ_1, y_1) в точке a меньше, чем в точке b . Из вышесказанного следует, что области синхронизации ХМК двух однонаправленно связанных систем ФАП₁ и ФАП₂ увеличиваются при увеличении силы связи δ и при уменьшении размеров хаотического аттрактора ведущей подсистемы.

Теперь рассмотрим процессы установления режима хаотической синхронизации, когда ФАП₁ функционирует в режиме генерации ХМК, а в ФАП₂ могут реализовываться различные режимы. Пусть параметры ФАП₁ определе-

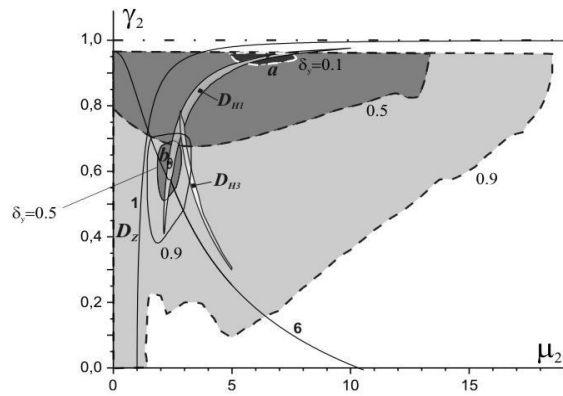


Рис. 5. Области существования режима хаотической синхронизации модели (1) в случае $\varepsilon_2=1$, $\delta=0.1$; 0.5; 0.9, $\alpha=30$ для точек b ($\gamma_1=0.625$, $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=2.38$) и a ($\gamma_1=0.95$, $\varepsilon_1=1$, $\mu_1=6.5$). Здесь границы областей синхронизации для точки b проведены сплошными линиями, для точки a – пунктирными линиями

ны в точке b ($\gamma_1 = 0.625$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1=2.38$), а параметры ФАП₂ имеют следующие значения: $\gamma_2 = 0.68$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 2$. Тогда в отсутствие связи ($\delta=0$) в частичном фазовом пространстве $U_1 = \{\varphi_1(\text{mod } 2\pi), y_1, z_1\}$ модели (1) имеет место колебательный хаотический аттрактор, а в $U_2 = \{\varphi_2(\text{mod } 2\pi), y_2, z_2\}$ существуют два регулярных аттрактора с различной топологией – колебательный L_1 (рис. 6а) и вращательный L_2 (рис. 7а) предельные циклы. Определим состояние ФАП₂ таким образом, что в фазовом пространстве U_2 реализуется цикл L_1 , соответствующий регулярному квазисинхронному режиму. Далее будем увеличивать значения параметра δ , добиваясь синхронизации колебаний ФАП₁ и ФАП₂. Процесс установления режима синхронизации иллюстрирует рис. 6, на котором представлены: однопараметрическая бифуркационная диаграмма модифицированного отображения Пуанкаре (рис. 6б)², проекции фазовых портретов и осциллограммы (рис. 6в–ж). Здесь при слабой связи $\delta=0.05$ режим синхронизации отсутствует (рис. 6в). Увеличение силы связи до $\delta=0.15$ приводит к появлению на осциллограмме интервалов синхронных режимов, которые достаточно часто перемежаются асинхронными движениями (рис. 6г). Появление коротких интервалов синхронизации не приводит к заметным изменениям в проекциях фазового портрета аттрактора. Дальнейшее увеличение δ приводит к увеличению интервалов синхронных движений, эти изменения находят свое отражение и на проекциях фазового портрета (рис. 6д) – изображающая фазовые траектории точка боль-

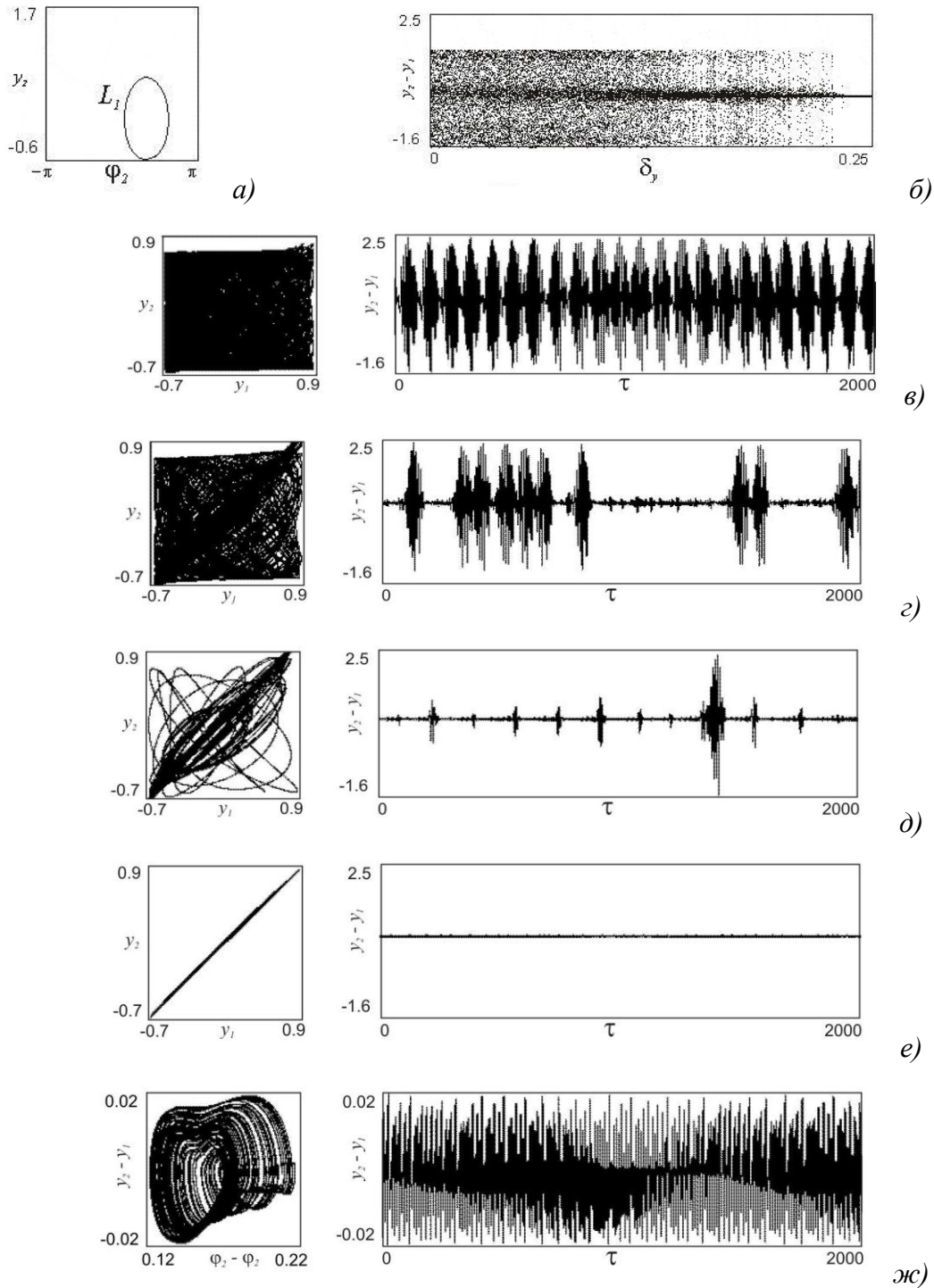


Рис. 6. Подстройка регулярного квазисинхронного режима ФАП₂ под режим ХМК ФАП₁ в случае бистабильного поведения ФАП₂

ше времени проводит в окрестности диагонали. Наконец, при $\delta=0.232$ устанавливается режим синхронизации с точностью $\varepsilon=0.04$ по частоте ($|y_2(\tau) - y_1(\tau)| < \varepsilon$) (рис. 6е). На рис. 6ж представлены проекции фазового портрета на плоскости разности фазовых переменных и соответствующая осциллограмма в увеличенном масштабе. Дальнейшее увеличение δ приводит к повыше-

нию точности синхронизации. Однако следует иметь в виду, что введение слишком больших значений коэффициентов связи может привести к срыву синхронизации и переходу системы ФАП₂ на режим хаотических биений.

Процесс установления режима синхронизации с ростом δ в случае, когда при $\delta=0$ в фазовом пространстве U_2 реализуется вращательный цикл

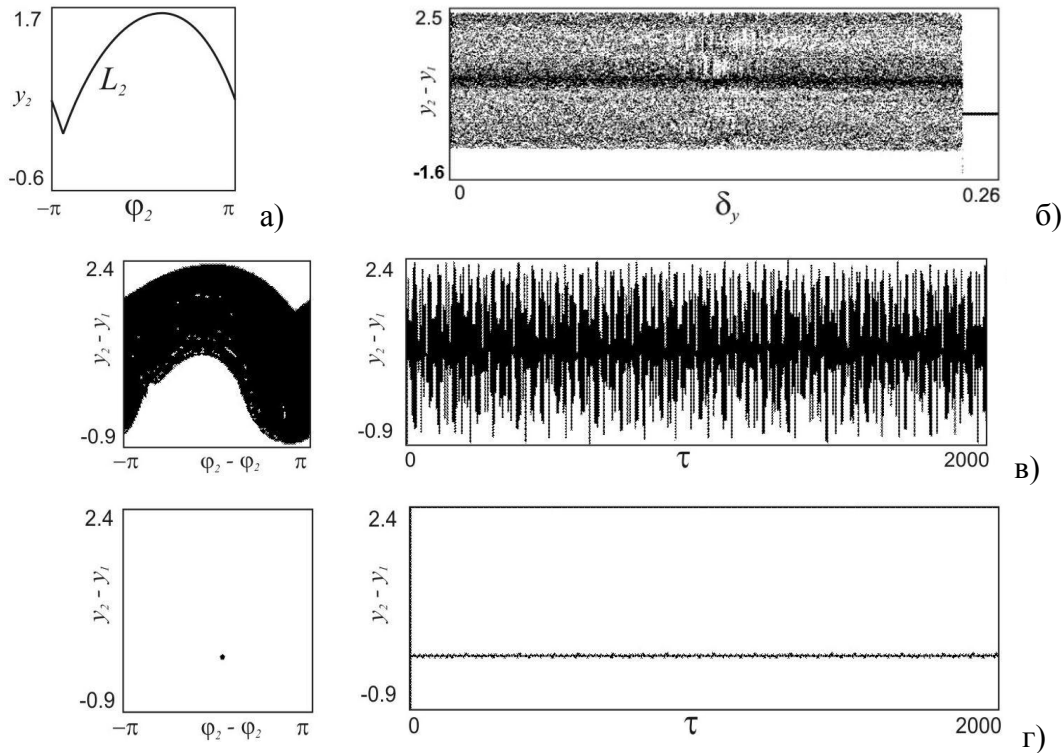


Рис. 7. Подстройка регулярного режима биений ФАП₂ под режим ХМК ФАП₁ в случае бистабильного поведения ФАП₂

L_2 (рис. 7а), иллюстрирует диаграмма отображения Пуанкаре, представленная на рис. 7б, проекции фазовых портретов и осциллограммы на рис. 7в, г. Здесь введение слабой связи $0 < \delta \ll 1$ приводит к тому, что колебания на выходе ФАП₂ становятся хаотическими. Этому режиму в фазовом пространстве модели (1) отвечают движения по аттрактору, у которых разность между координатами φ_2 и φ_1 постоянно нарастает, а разность между y_2 и y_1 хаотически изменяется в широком диапазоне (рис. 7в). Таким образом, в случае слабой связи режим хаотической синхронизации колебаний ФАП₁ и ФАП₂ отсутствует. При увеличении δ наблюдаемая выше картина не претерпевает существенных изменений вплоть до значений $\delta = 0.234$, когда аттрактор асинхронных режимов разрушается, и фазовые траектории из его окрестности переходят на многообразие синхронизации (рис. 7г). Если теперь начать уменьшать параметр δ , то выход из режима синхронизации происходит через перемежаемость синхронных и асинхронных движений при $\delta = 0.232$.

Таким образом, из рассмотренного примера следует, что в системе с бистабильным поведением установление режима хаотической синхронизации и его разрушение происходят практически при одном и том же уровне связи независимо от начального состояния модели. Начальные условия определяют сценарии уста-

новления режима синхронизации: в случае регулярного квазисинхронного режима переход на режим генерации ХМК происходит мягко, через перемежаемость, в случае регулярных биений – жестко, через разрушение асинхронного аттрактора.

Выводы

Результаты моделирования системы (1) показали, что существует принципиальная возможность подстройки (синхронизации) колебаний ФАП₂ под хаотически модулированные колебания ФАП₁ с помощью схемы, представленной на рис. 1. На основании проведенного исследования заключаем, что на базе кольца ФАП возможно осуществить не только генерацию хаотически модулированных колебаний в достаточно широкой области изменения параметров, но и их синхронизацию. Процессы синхронизации ХМК характеризуются наличием гистерезисности, т.е. наличием в пространстве параметров областей удержания и захвата с несовпадающими границами.

Важно отметить, что фактически здесь мы не используем результаты теории синхронизации хаотических колебаний, а опираемся на результаты классической теории синхронизации периодических колебаний, модулированных по не-

которому сложному закону. В частности, известно, что в теории систем ФАП имеются результаты по синхронизации периодических колебаний, модулированных по линейному закону, по синусоидальному закону и т.д. В этом случае системы ФАП позволяют осуществить стабилизацию центральной частоты и слежение за законом модуляции. В нашем случае закон модуляции – хаотический, он не задается извне, а возникает в схеме ФАП в результате появляющихся хаотических автоколебаний. В приведенных выше результатах по синхронизации хаотически модулированных колебаний в системах ФАП используются цепи управления как по фазе, так и по частоте, то есть используется частотно-фазовое управление. Идея частотно-фазового управления известна давно и является достаточно продуктивной, поэтому ее использование в случае синхронизации хаотически модулированных сигналов вполне естественно. Таким образом, резюмируя сказанное, можно констатировать, что использование колец ФАП позволяет осуществить как эффективную генерацию хаотически модулированных колебаний, так и синхронизацию таких колебаний, что позволяет реализовывать на этой основе идею передачи информации на основе хаотически модулированной несущей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №10-02-00865, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракты № П2308, № 02.740.11.0565, № 02.740.11.0075).

Примечания

1. Вообще говоря, начальные состояния ФАП₁ и ФАП₂ могут быть выбраны неидентичными, но в этом случае необходимо, чтобы начальные условия принадлежали бассейну притяжения аттракторов, определяющих один и тот же динамический режим. Тогда при $\delta > 0$ режим хаотической синхронизации наступит через некоторый интервал времени T_{trans} , длительность которого зависит от соотношения начальных состояний ФАП₁ и ФАП₂. Время T_{trans} всегда конечно, более того, оно сравнительно мало.

2. Отличие модифицированного отображения Пуанкаре от обычного заключается в том, что на диаграмме на рис. 6б по оси ординат отложены не координаты точек отображения Пуанкаре, а значения некоторой функции R от этих координат, в частности здесь $R(y_2, y_1) = y_2 - y_1$.

Список литературы

1. Fujisaka H., Yamada T. // Prog. Theor. Phys. 1983. V.69. №1. P. 32–46.
2. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29. №9. С. 795–803.
3. Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64. №8. P. 821–824.
4. Дмитриев А.С., Клецов А.В., Лактюшкин А.М. и др. // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. №10. С. 1193–1209.
5. Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. №11. С. 44–56.
6. Shalfeev V.D., Matrosov V.V., Korzinova M.V. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1999. V.9. №5. P. 963–973.
7. Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. Нижний Новгород: ННГУ, 2007. 258 с.

SYNCHRONIZATION OF CHAOTICALLY MODULATED OSCILLATIONS

V.V. Matrosov, V.D. Shalfeev

Synchronization of chaotically modulated oscillations is studied using the phase-locked loop principle. The application of this principle makes it possible to improve synchronization accuracy of chaotic oscillations and to enlarge the existence domains of chaotic synchronization regime in the parameter space of phase-locked oscillators.

Keywords: dynamical chaos, synchronization, phase-locked loops.