

УДК 534.22

## ЭВОЛЮЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ С ШУМОВЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ НА СТАДИИ РАЗВИТЫХ РАЗРЫВОВ (ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА)

© 2011 г.

*И.Ю. Дёмин, А.М. Серебряков*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

demin@rf.unn.ru

*Поступила в редакцию 11.05.2011*

Рассмотрено численное решение нелинейных уравнений гидродинамического типа, в основе которого лежит алгоритм быстрого преобразования Лежандра, позволяющий значительно сократить количество производимых операций по сравнению со стандартными методами. Численно исследована эволюция интенсивных акустических импульсов с шумовым заполнением. Рассмотрены три характерных вида огибающей и для каждого из них получены характерные профили скорости и вероятностные распределения координаты абсолютного максимума. Показано, что в результате нелинейных взаимодействий происходит генерация ненулевого среднего поля скорости на больших расстояниях.

*Ключевые слова:* нелинейная акустика, быстрое преобразование Лежандра, интенсивные акустические импульсы с шумовым заполнением.

### Введение

Численное моделирование распространения случайных нелинейных акустических волн использует нелинейное эволюционное уравнение Бюргера [1–3], которое описывает два физических эффекта: нелинейность и поглощение. Основная трудность при численном анализе заключается в больших затратах машинного времени и большом объеме оперативной памяти для всех численных моделей, описывающих ударные волны [4–6]. В связи с этим остро стоит задача об оптимизации алгоритмов вычислений. Одним из таких алгоритмов и является использование быстрого преобразования Лежандра для численного моделирования нелинейных акустических случайных волн на стадии взаимодействия развитых разрывов [8–10].

*1. Аналитическое описание распространения интенсивных акустических импульсов с шумовым заполнением на стадии развитых разрывов*

Рассмотрим эволюционное уравнение Бюргера (безразмерное) для плоских акустических волн с начальным условием [1–2]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad v(t, 0) = v_0(t). \quad (1)$$

Решение данного уравнения на стадии развитых разрывов (в случае когда  $\Gamma \gg 1$ ) может быть представлено в следующем виде [3]:

$$v(t, x) = \frac{t - \tau^*(t, x)}{x}, \quad (2)$$

где  $\tau^*$  – координата абсолютного максимума функции  $\Phi(x, \tau, t)$ :

$$\Phi(\tau, t, x) = s_0(\tau) - \frac{(\tau(t, x) - t)^2}{2x}, \quad (3)$$

$s_0(t)$  – начальный потенциал поля скорости:

$$v_0(t) = -\frac{ds_0(t)}{dt}. \quad (4)$$

Сделаем предположение, что  $\Phi(x, \tau, t)$  имеет двух одинаковых абсолютных максимумов, а  $H^*$  и  $\tau^*$  – соответственно величина и координата абсолютного максимума, находящегося в интервале  $[t_1, t_2]$ ,  $s_0(t_2)$  – полный импульс начального поля ( $s_0(t_1) \equiv 0$ ). В таком случае возможны три различных универсальных асимптотики:

а) если  $H^* < 0$ ,  $s_0(t_2) < 0$  или  $H^* < s_0(t_2)$ ,  $s_0(t_2) > 0$  (это значит, что абсолютный максимум достигается на границе интервала  $[t_1, t_2]$ ), то при  $x \rightarrow \infty$  начальное поле преобразуется в треугольную волну, полный импульс которой равен  $|s_0(t_2)|$ , причем если  $s_0(t_2) < 0$ , то фронт волны движется вправо, а в противном случае – влево;

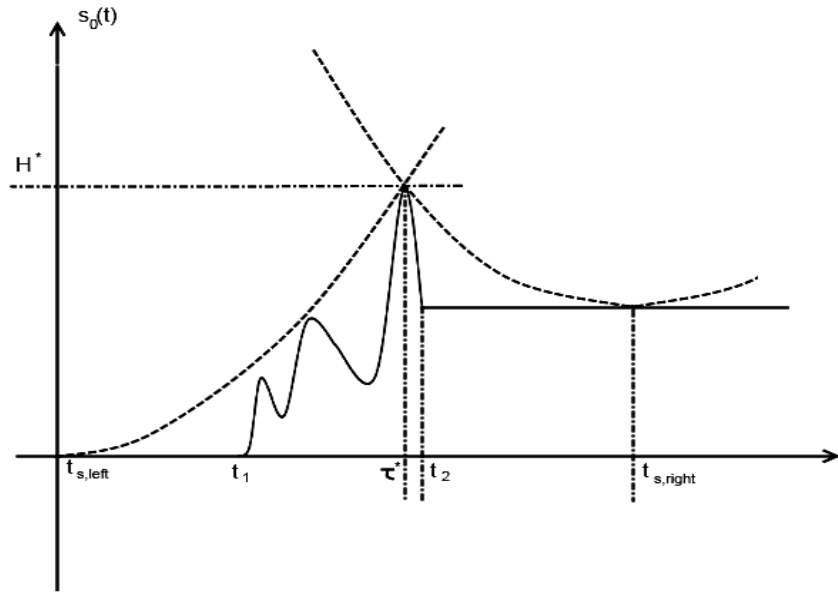


Рис. 1. Графическое изображение процедуры поиска абсолютного максимума

б) если  $s_0(t_1) = s_0(t_2) = 0$ ,  $H^* < 0$ , то из начального поля образуется  $S$ -импульс с амплитудой разрыва  $(t_1 - t_2)/x$ ;

в) если  $H^* > s_0(t_2)$ ,  $H^* > 0$  (абсолютный максимум достигается внутри интервала  $[t_1, t_2]$ ), то в этом случае импульс при прохождении по трассе преобразуется в  $N$ -волну с координатами разрывов  $t_{s,left}$  и  $t_{s,right}$ , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{s,left} &= \tau^* - \sqrt{2H^* x}, \\ t_{s,right} &= \tau^* + \sqrt{2(H^* - s_0(t_2))x}, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь  $\tau^*$  – координата абсолютного максимума и определяет нуль  $N$ -волны. Графически процедура отыскания координаты абсолютного максимума приведена на рис. 1.

Данная процедура позволяет определить асимптотическую форму произвольного импульса с шумовым заполнением на расстояниях взаимодействия развитых разрывов, т.е. на расстояниях  $x > x_n(T/\tau_c)$ , где  $x_n$  – характерное расстояние нелинейных взаимодействий,  $T = (t_1 - t_2)$  – длительность спада импульса, а  $\tau_c$  – время корреляции шумового заполнения.

Рассмотрим эволюцию импульсов с шумовым заполнением, т.е. предположим, что они будут иметь два характерных пространственных масштаба (масштаб внутреннего заполнения  $\tau_c$  и масштаб огибающей  $T$ ). Тогда начальное поле скорости можно записать в следующем виде:

$$v_0(t) = m(t)f(t), \quad (6)$$

где  $m(t)$  – модулирующая функция (регулярная), а  $f(t)$  – шумовое заполнение (случайный про-

цесс). На рис. 2 приведена реализация импульса с шумовым заполнением.

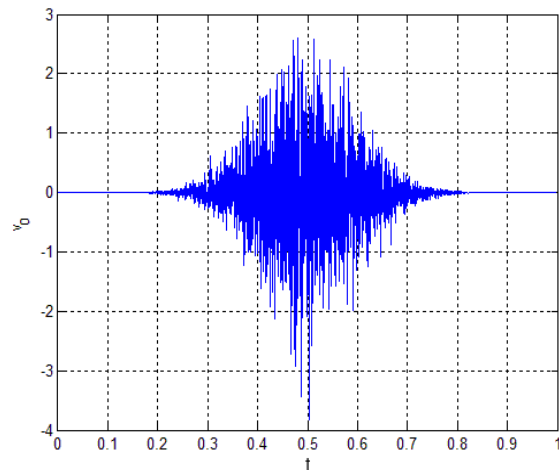


Рис. 2. Пример импульса с шумовым заполнением

Для определенности в задании регулярной огибающей шумового импульса предположим, что  $m(t)$  также имеет два временных масштаба: длительность переходной области  $T_t$  и длительность спада функции  $T$ , причем  $T_t \ll \tau_c \ll T$ . Можно выделить три характерных вида модулирующей функции  $m(t)$  (приведены на рис. 3):

- а)  $m_1(t)$  имеет резкий скачок на переднем и заднем фронте;
- б)  $m_2(t)$  имеет резкий скачок на одном из фронтов (для определенности на переднем);
- в)  $m_3(t)$  – плавная функция только с одним характерным масштабом  $T$ .

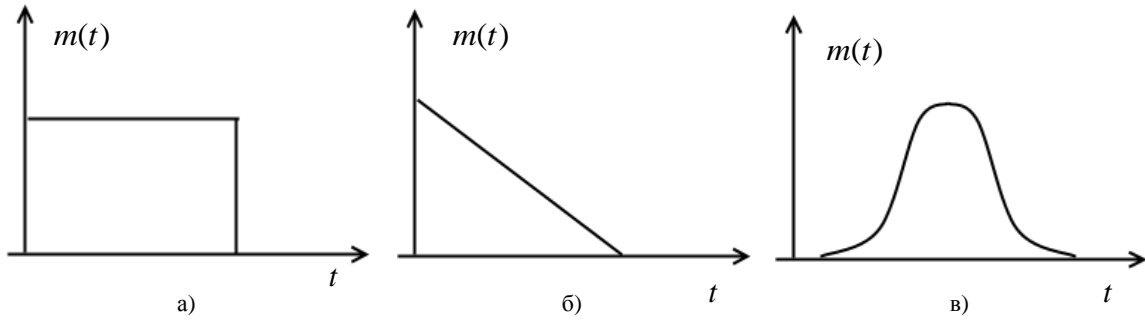


Рис. 3. Качественный вид модулирующих функций (а)  $m_1(t)$ , (б)  $m_2(t)$ , (в)  $m_3(t)$

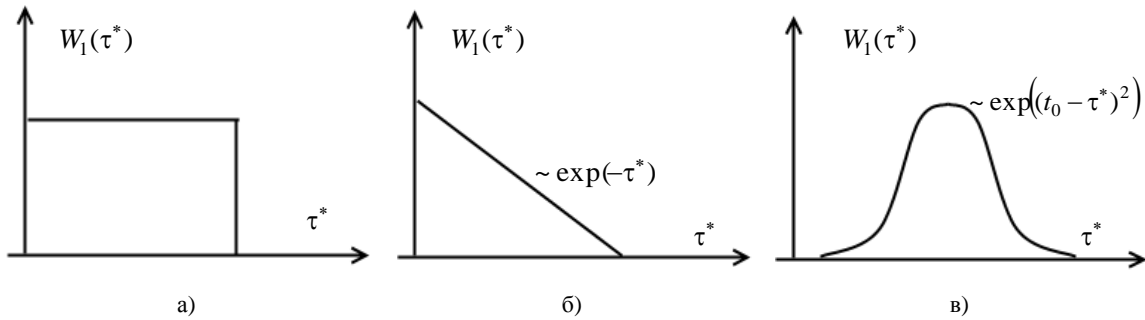


Рис. 4. Качественное изображение вероятностных распределений координаты нуля  $N$ -волны

Прежде чем перейти к моделированию эволюции акустических шумовых импульсов в нелинейной среде, определим начальный потенциал профиля скорости  $s_0(\tau)$  с учетом стационарности шумового заполнения  $f(t) = (d/dt)F(t)$ :

$$s_0(\tau) = m(\tau)F(t) - \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial m(t)}{\partial t} F(t) dt. \quad (7)$$

Принимая во внимание двухмасштабность модулирующей функции  $m(t)$ , при  $T_1 \ll \tau_c \ll T$  для начального потенциала  $s_0(\tau)$  будем иметь следующее выражение:

$$s_0(\tau) = m(\tau)F(t) - [\Delta m_1 F(t_1)E(\tau - t_1) - \Delta m_2 F(t_2)E(\tau - t_2)], \quad (8)$$

где  $E(\tau)$  – единичная функция,  $\Delta m_{1,2}$  – величина скачка  $m(t)$  в точках  $t_1$  и  $t_2$ .

Однополярный импульс реализуется в том случае, если абсолютный максимум  $\Phi(x, \tau, t)$  достигается на одной из границ интервала  $[t_1, t_2]$ , а в случае если абсолютный максимум  $\Phi(x, \tau, t)$  находится внутри интервала, реализуется  $N$ -волна. Так как расстояние между максимумами  $\tau_c$ , характерная длина интервала  $T$ , то вероятность достижения максимума на концах интервала составляет величину порядка  $\tau_c/T \ll 1$ , а значит, более вероятным является трансформация импульса в  $N$ -волну.

В работе [7] был проведен вероятностный и статистический анализ интенсивных акустических импульсов различной формы на стадии

образования развитых разрывов, когда образуется  $N$ -волна, которая полностью определяется заданием координат разрывов и положением нуля поля. Для плотности вероятности координаты нуля  $N$ -волны  $\tau^*$  для трех различных видов огибающей были получены аналитические значения на стадии взаимодействия развитых разрывов, когда наступает автомодельный режим эволюции интенсивных акустических шумовых волн. На рис. 4 приведены качественные реализации плотности вероятности координаты нуля.

В случае прямоугольной модулирующей функции, пренебрегая краевыми эффектами в области порядка  $\tau_c$ , координата нуля распределена равномерно на интервале  $[0, T]$ . Если модулирующая функция имеет вид типа  $m_2(t)$ , т.е. на переднем фронте имеется скачок и далее идет монотонное спадание при  $t > 0$ , то координата нуля распределена по экспоненциальному закону. Если модулирующая функция является плавной с одним максимумом, то координата нуля  $\tau_c$  имеет гауссово распределение. Причем при  $\tau_c/T \ll 1$  ширина этого распределения много меньше характерной ширины огибающей импульса. Связано это с тем, что в результате слияния развитых разрывов выживают лишь те разрывы, которые зародились в области максимальной амплитуды модулирующего поля. Также стоит отметить, что флуктуации скорости разрыва малы по сравнению со средней скоростью, и скорости переднего и заднего

фронтов  $N$ -волны по модулю близки друг к другу и практически детерминированы, т.е. слабо зависят от конкретной реализации шумового импульса на входе [7].

## 2. Использование быстрого преобразования Лежандра для численного моделирования эволюции случайных импульсных сигналов

Для подтверждения аналитических результатов по распространению и трансформации профиля и статистических характеристик интенсивных шумовых импульсов на стадии развитых разрывов в данном разделе будут приведены результаты численного моделирования.

Основной задачей при численном анализе эволюции случайных волн является задача по отысканию координаты абсолютного максимума решения (2). Данная схема численного решения нелинейных уравнений гидродинамического типа хорошо изучена и подробно описана в работах [1, 3, 7, 8]. В нашем случае для отыскания координаты абсолютного максимума импульсов с шумовым заполнением предлагаем использовать алгоритм быстрого преобразова-

ния Лежандра (БПЛ), который позволил существенно сократить число требуемых операций по сравнению со стандартными методами. Если  $N$  – длительность реализации начального процесса, при стандартном методе перебора число операций будет  $N^2$ , в случае использования БПЛ число операций существенно уменьшится и составит  $\text{Mlog}_2 N$ . Еще одним важным свойством данного алгоритма является тот факт, что он без принципиальных изменений может быть применен к многомерным случаям.

Ниже приведены реализации профиля и вероятностного распределения для трех характерных видов огибающей начального импульса с шумовым заполнением. Эволюция шумовых импульсов рассматривалась на расстояниях взаимодействия развитых разрывов и эти характерные расстояния обозначены на рисунках безразмерным параметром  $Z$ . Начальное шумовое поле (при  $Z=0$ ) численно реализовано с использованием генератора случайных чисел, который создавал реализацию с гауссовым распределением, нулевым средним и единичной дисперсией.

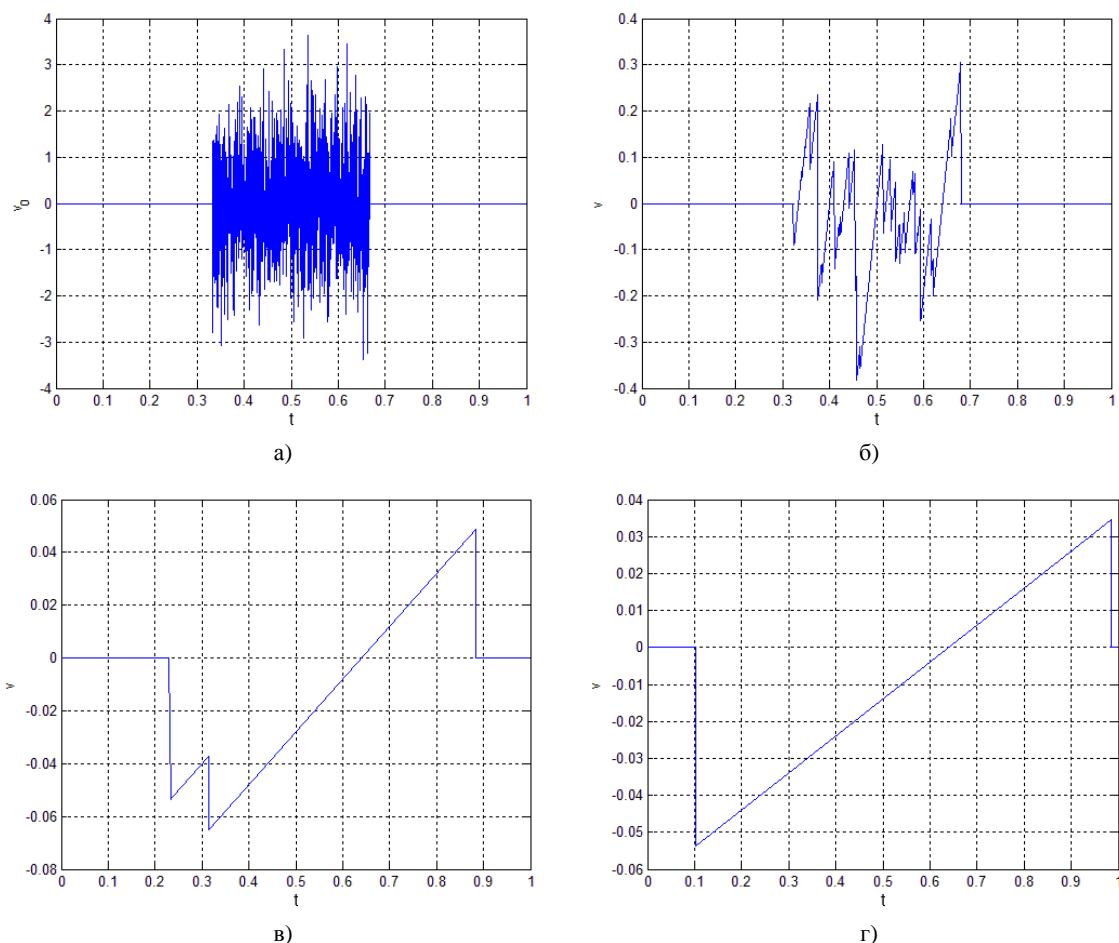


Рис. 5. Эволюция прямоугольного шумового импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$ . Длина реализации  $N = 4000$  точек

2.1. Эволюция прямоугольного импульса

На рис. 5 приведены начальный профиль (при  $Z = 0$ ) и эволюция шумового импульса с огибающей прямоугольного вида на расстояниях формирования и взаимодействия развитых разрывов.

Из приведенных реализаций хорошо видно, как изначально шумовой импульс в результате взаимодействия и слияния разрывов по мере распространения в нелинейной среде преобразуется в  $N$ -волну. В результате такого взаимодействия происходит потеря информации о начальной структуре сигнала. Таким образом, на некотором расстоянии от источника две различные реализации шумового воздействия будут качественно неотличимы.

Интересно также наблюдать за эволюцией среднего поля скорости. Если бы мы наблюдали эволюцию случайного гауссова процесса без импульсной модуляцией, то на стадии взаимодействия разрывов среднее поле скорости было бы равно нулю. В случае импульсного ограничения и нелинейной трансформации наблюда-

ется генерация отличного от нуля среднего поля скорости (рис. 6).

Уже на ранней стадии (рис. 6а) наблюдаются два симметричных однополярных импульса, одинаковых с точностью до знака. Шум, который виден между импульсами, обусловлен конечным числом реализаций, используемых для усреднения (при увеличении их числа амплитуда шума заметно падает). В целом же, можно видеть, что среднее поле скорости преобразуется в сглаженную  $N$ -волну. Такой вид среднего поля объясняется тем, что различные реализации начального поля скорости имеют разные скорости разрывов, поэтому при усреднении по множеству реализаций происходит «сглаживание» усредненного профиля.

Рассмотрим эволюцию статистических характеристик прямоугольного импульса с шумовым заполнением на стадии взаимодействия развитых разрывов. На рис. 7 представлено вероятностное распределение координаты абсолютного максимума функции  $\Phi(x, t, t)$ , полученное в результате численного моделирования.

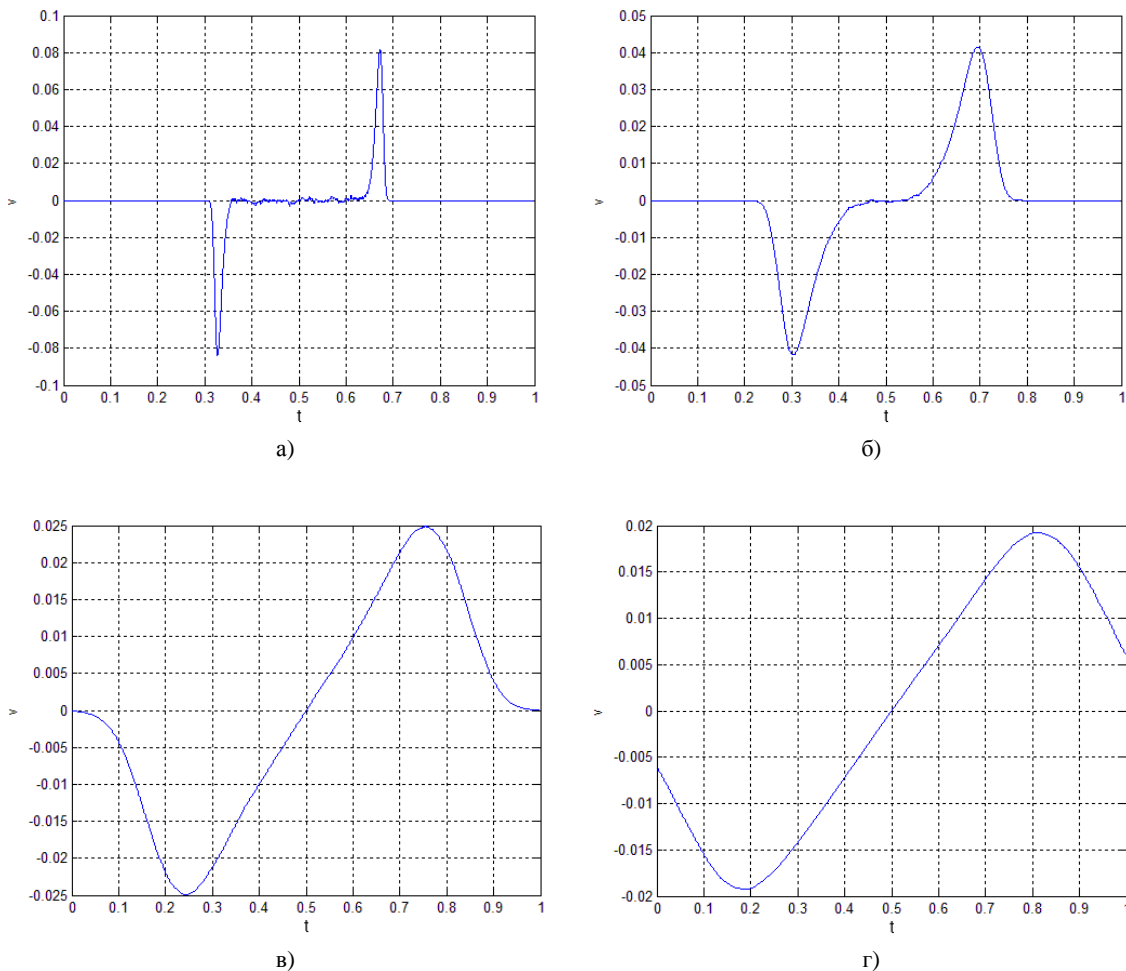


Рис. 6. Эволюция среднего поля скорости (усреднение по 10 000 реализациям) для прямоугольного импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0.001$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$

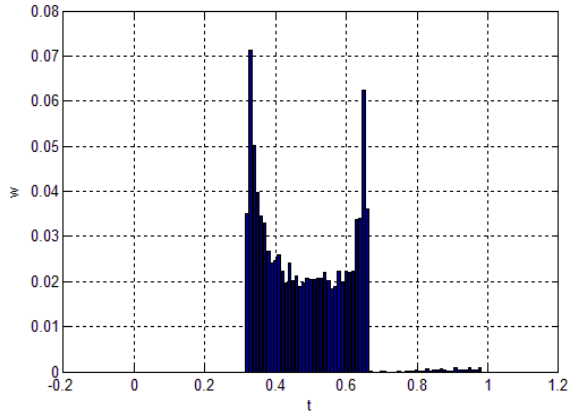


Рис. 7. Вероятностное распределение координаты абсолютного максимума  $\tau^*$  для импульса прямоугольной формы на характерном расстоянии  $Z=10$

Как было отмечено в первом разделе и учитывая результаты работы [7], вероятностное распределение координаты абсолютного максимума  $\tau^*$  прямоугольного импульса должно быть равномерным. Визуальное отличие вероятностного распределения, полученного в ре-

зультате численного эксперимента от равномерного, может быть объяснено наличием краевых эффектов, возникающих при моделировании регулярной функции прямоугольного вида.

### 2.2. Эволюция треугольного импульса

Для второго типа огибающей шумового импульса, когда функция  $m(t)$  имеет резкий скачок на одном из фронтов (для определенности на переднем) и численно может быть реализована в виде треугольной функции, на рис. 8 приведены результаты численного моделирования по распространению интенсивных шумовых акустических импульсов с использованием БПЛ.

Уже на ранней стадии эволюции хорошо видно, что генерируется ярко выраженный минимум на заднем фронте импульса (в отличие от прямоугольного импульса). Однако на больших расстояниях, характерных для формирования автомодельных решений уравнения Бюргера, наблюдается традиционное формирование  $N$ -волны.

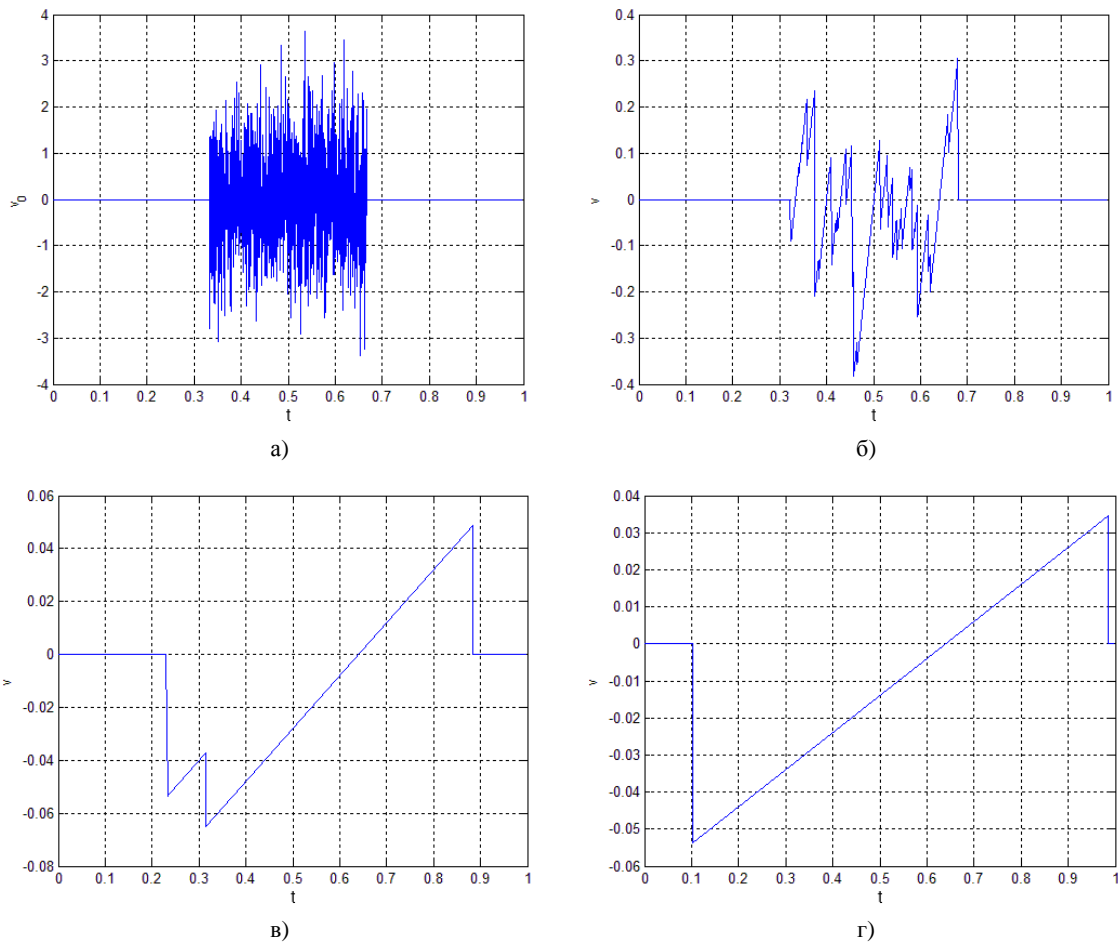


Рис. 8. Эволюция шумового треугольного импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$ . Длина реализации  $N = 4000$  точек

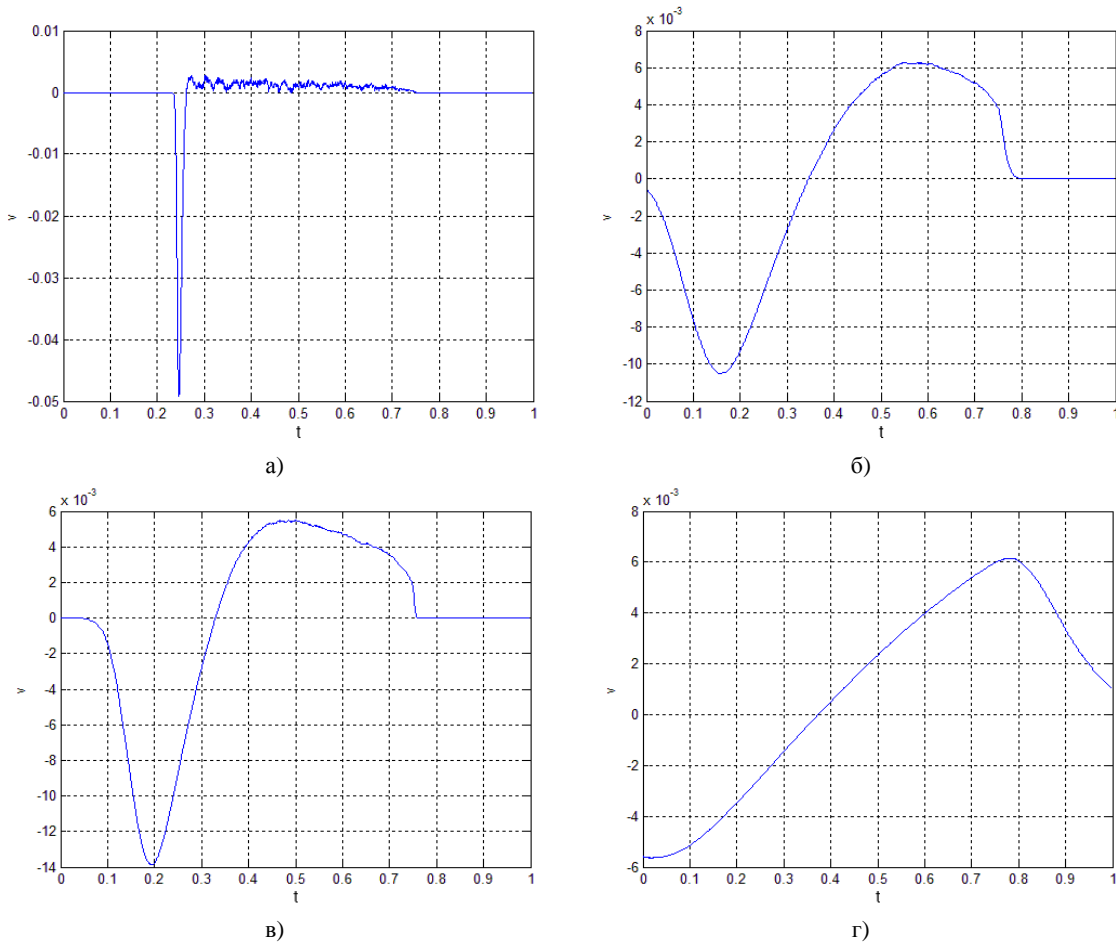


Рис. 9. Эволюция среднего поля скорости (усреднение по 10 000 реализациям) для треугольного импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0.001$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$

Для среднего поля скорости (рис. 9) аналогично приведена эволюция как и в случае прямоугольного импульса.

Здесь, в отличие от прямоугольного случая, хорошо просматривается генерация однополярного импульса (но опять не нулевое поле). Этот эффект объясняется тем, что за счет формы огибающей, вероятность нахождения абсолютного максимума  $\Phi(x, \tau, t)$  (3) на переднем фронте значительно больше вероятности его нахождения на спадающей части импульса. Данное утверждение нашло подтверждение при численном эксперименте по определению вероятностного распределения координаты абсолютного максимума  $\Phi(x, \tau, t)$  для треугольного импульса (рис. 10).

Аналитическое рассмотрение показало [7], что вероятностное распределение координаты абсолютного максимума  $\tau^*$  для треугольной огибающей носит экспоненциальный характер. Результаты численного моделирования эволюции интенсивных шумовых акустических импульсов с огибающей функции треугольного вида также демонстрируют близость вероятностного распределения к экспоненциальному виду.

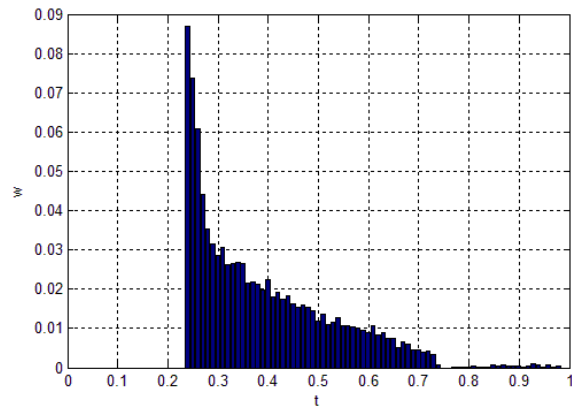


Рис. 10. Вероятностное распределение координаты абсолютного максимума  $\tau^*$  для импульса треугольной формы на характерном расстоянии  $Z=10$

### 2.3. Эволюция гауссовского импульса

В данном разделе приведены результаты по численному моделированию эволюции интенсивных акустических импульсов с шумовым заполнением в случае огибающей гауссова вида (колокообразная). Это наиболее интересный случай для использования алгоритма быстрого

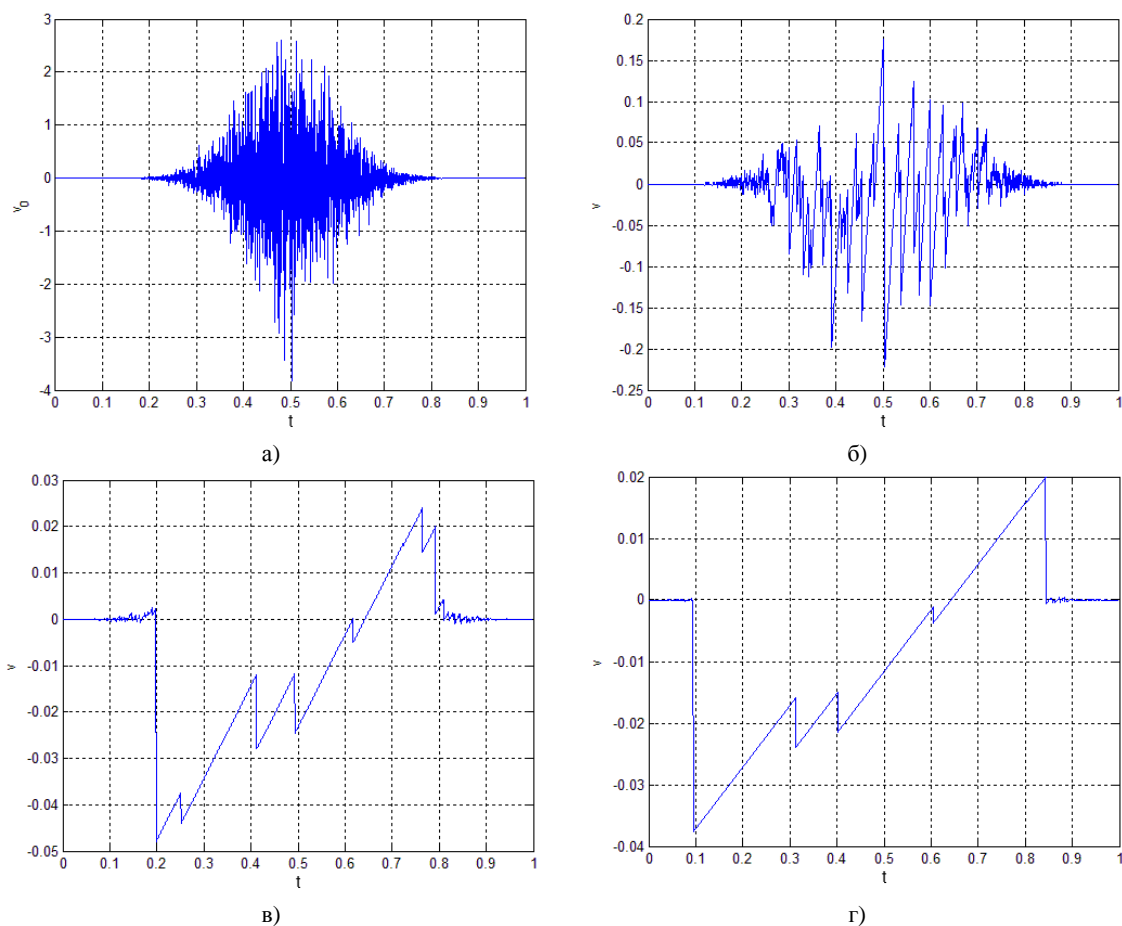


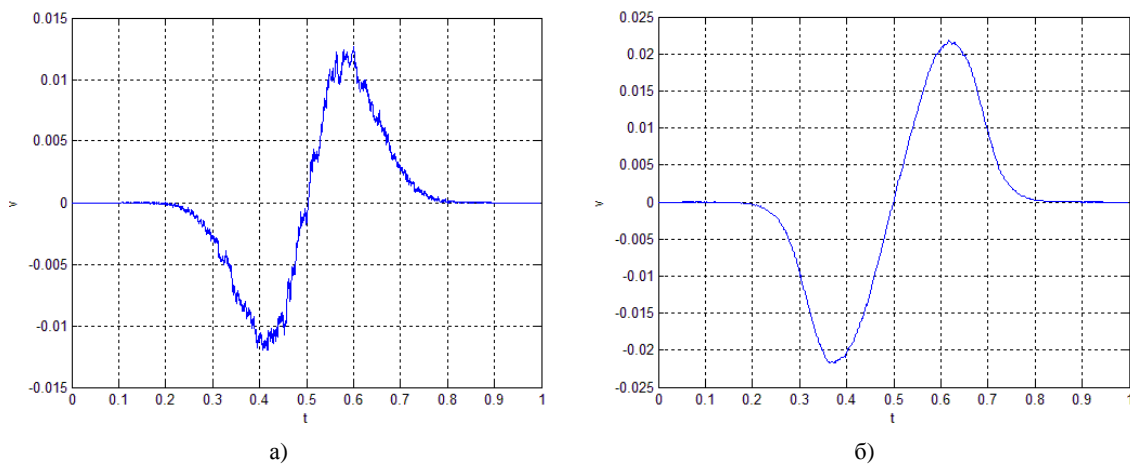
Рис. 11. Эволюция шумового гауссового импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$ . Длина реализации  $N = 4000$  точек

преобразования Лежандра при численном моделировании решения уравнения Бюргера. На рис. 11 приведены результаты трансформации одиночного гауссового шумового импульса в  $N$ -волну.

Из приведенных реализаций хорошо видно, что мелкомасштабные структуры импульса с гауссовой огибающей в отличие от предыдущих случаев, когда огибающая импульса имела резкие границы, сохраняются на стадии взаимо-

действия развитых разрывов на достаточно больших характерных расстояниях. И только, когда наступает этап выхода акустического поля на автомодельную стадию, возникает поглощение разрывом максимальной амплитуды, что и приводит к формированию  $N$ -волны.

Для среднего поля скорости (эволюция приведена на рис. 12), в случае гауссовой формы импульса  $N$ -волна для усредненного значения поля скорости формируется на достаточно ма-





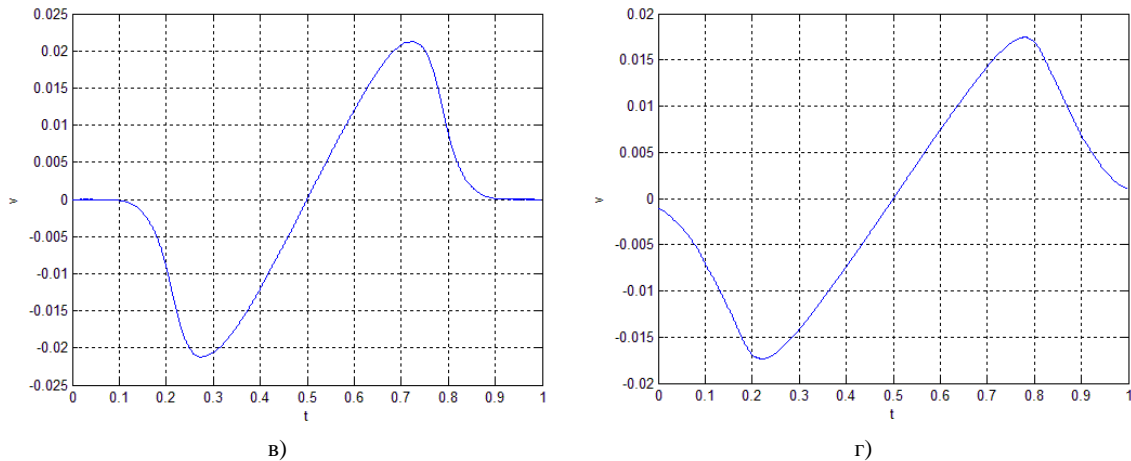


Рис. 12. Эволюция среднего поля скорости (усреднение 10 000 реализаций) для гауссова импульса. Характерные расстояния (а)  $Z=0.001$ ; (б)  $Z=0.05$ ; (в)  $Z=0.1$ ; (г)  $Z=10$

лых расстояниях. Затем с увеличением характерного расстояния качественно картина практически не меняется, только происходит «растягивание» импульса и уменьшение его амплитуды.

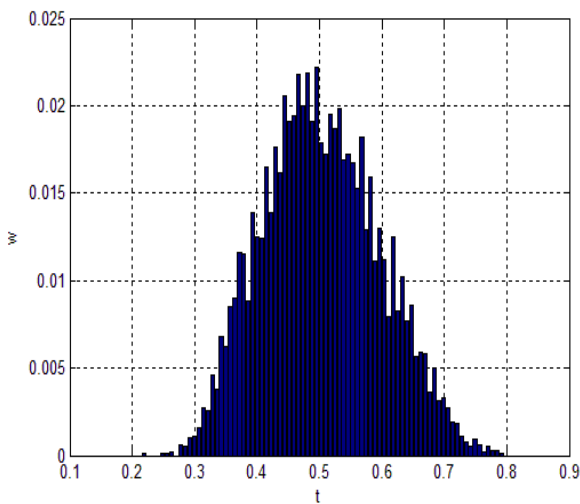


Рис. 13. Вероятностное распределение координаты абсолютного максимума  $\tau^*$  для импульса гауссовой формы на характерном расстоянии  $Z=10$

Хорошее согласование результатов численного моделирования и аналитического предсказания наблюдалось для вероятностного распределения координаты абсолютного максимума  $\Phi(x, \tau, t)$  в случае гауссовой огибающей начального импульса (рис. 13). Численное вероятностное распределение соответствовало гауссовой форме, что подтверждено и теоретическим анализом.

*Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–*

*2013 гг. (контракт № 02.740.11.0565), государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-3700.2010.2) и РФФИ (грант 11-02-00774).*

*Список литературы*

1. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
3. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в недиспергирующих средах. М.: Наука, 1990. 216 с.
4. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
5. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983. 150 с.
6. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Пасманик Г.В. О параметрической генерации низкочастотного излучения при распространении интенсивного модулированного шума // Акуст. журн. 2001. Т. 47, № 4. С. 474–484.
7. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю. О трансформации интенсивных шумовых акустических импульсов // Акуст. журн. 1982. Т. 23, №1. С. 32–37.
8. Гурбатов С.Н., Саичев А.И. Введение в теорию нелинейных волн гидродинамического типа. Учебное пособие. Н. Новгород: Изд. Нижегородского государственного университета, 2003. 156 с.
9. Noullez A., Vergassola M. A Fast Legendre Transform Algorithm and Applications to the Adhesion Model // Journal of Scientific Computing. 1994. V. 9. No. 3. P. 259–281.
10. Демин И.Ю., Серебряков А.М. Численное решение нелинейных уравнений гидродинамического типа с использованием быстрого преобразования Лежандра // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Modern problems of statistical physics). 2009. № 8. С. 58–67.

**EVOLUTION OF ACOUSTIC PULSES WITH NOISE FILLING AT THE STAGE OF DEVELOPED BREAKUPS (NUMERICAL SIMULATION USING THE FAST LEGENDRE TRANSFORM)**

*I.Yu. Demin, A.M. Serebryakov*

The numerical solution of nonlinear hydrodynamic equations has been considered on the basis of the fast Legendre transform algorithm, which makes it possible to reduce substantially the number of operations as compared to standard methods. The evolution of intense acoustic pulses with noise filling has been studied numerically. Three typical envelopes are considered. Speed profiles and the probability distributions of the absolute maximum coordinate have been obtained for each of the envelopes. The generation of non-zero average speed field at large distances has been shown to occur as a result of nonlinear interactions.

*Keywords:* nonlinear acoustics, fast Legendre transform, intense acoustic pulses with noise filling.