УДК 539.1

К ВОПРОСУ О «РАСПУТЫВАНИИ» ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЕКТРОННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

© 2011 г.

Г.Ф. Ефремов, Д.А. Петров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

efremov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 01.08.2011

Решается задача о «распутывании» произведения операторов электронных плотностей, взятых в разные моменты времени, в релятивистской квантовой механике с учетом эффекта дрожаний (zitterbewegung). Предложен способ, позволяющий решить данную задачу в приближении свободного движения электрона. Проанализированы некоторые предельные случаи.

Ключевые слова: электрон Дирака, эффект дрожания (zitterbewegung), оператор электронной плотности.

Введение. Постановка задачи

Настоящая задача возникла в рамках нового подхода к ряду радиационных эффектов в квантовой электродинамике. Его особенность заключается в том, что в отличие от традиционного квантово-механического описания основных эффектов квантовой релятивистской физики он опирается на квантово-статистические представления, позволяющие рассматривать различные диссипативные процессы в стохастических квантовых системах. Основные положения нового подхода были изложены в ряде работ [1–3].

При исследовании на основе развиваемого подхода некоторых квантово-электродинамических (радиационных) эффектов, в частности таких как лэмбовский сдвиг энергетических уровней и аномальный магнитный момент электрона, возник ряд особенностей, одна из которых связана с проблемой «распутывания» произведения операторов электронных плотностей. Она может быть сформулирована следующим образом.

В классической физике выражение для тока, создаваемого движущимся электроном, имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}',t) = e\mathbf{V}(t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)), \qquad (1)$$

где e – заряд электрона, $\mathbf{V}(t) = d\mathbf{r}'/dt$ – его скорость, $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t))$ – δ-функция от координаты электрона, характеризующая модель точечного электрона. Возьмем от (1) преобразование Фурье:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k},t) = e\mathbf{V}(t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \qquad (2)$$

где $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}$ можно определить как электронную плотность.

Для перехода к квантовой механике воспользуемся принципом соответствия и будем считать, что $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}$ и $\mathbf{V}(t)$ есть операторы электронной плотности и скорости электрона в представлении Гейзенберга. Таким образом, настоящая задача заключается в «распутывания» произведения операторов электронных плотностей $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}$, взятых в разные моменты времени, в релятивистской квантовой теории, что математически можно представить следующим образом

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} = f(\boldsymbol{\xi}), \qquad (3)$$

где $f(\boldsymbol{\xi})$ – некоторый неизвестный оператор, вид которого необходимо определить, зависящий от операторов координаты электрона в разные моменты времени и в общем случае – от их многократных коммутаторов, которые все в совокупности условно обозначены $\boldsymbol{\xi}$.

Особенность данной задачи заключается в том, что даже для свободного релятивистского электрона «распутывание» является нетривиальным. Это связано с тем, что в релятивистской квантовой механике движение свободного электрона имеет достаточно сложный характер: во-первых, скорость электрона приобретает самостоятельное значение наряду с его импульсом, во-вторых, движение свободного электрона не является в общем случае «прямолинейным» [4, 5]. Все это приводит к тому, что коммутатор $[\mathbf{r}(t),\mathbf{r}(t_1)] = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_1)\cdot\mathbf{r}(t)$ уже не является *c*-числом, что делает невозможным применение формулы Бейкера–Хаусдорфа [6] при решении этой задачи.

Другая особенность связана с тем, что оператор координаты электрона $\mathbf{r}(t)$ является функцией от матриц Дирака, что делает некоммутативным произведение оператора электронной плотности и координаты электрона даже в один и тот же момент времени. Это, в свою очередь, приводит к тому, что стандартный прием [6], основанный на решении дифференциального уравнения для определения правой части в (3), становится малопригодным.

Действительно, согласно этому способу, представим (3) в виде

$$e^{i(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}+\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1))\theta} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}\theta} g(\theta,\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)\theta}, \quad (4)$$

где $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)$, $g(\theta,\boldsymbol{\xi})$ – неизвестная функция-оператор, не коммутирующая с экспонентами из (4), которую предстоит определить из решения дифференциального уравнения с начальным условием

$$g(0,\boldsymbol{\xi}) = 1. \quad (5)$$

Дифференцируя (4) по θ и выполняя простейшие преобразования, найдем

$$\frac{dg(\theta,\boldsymbol{\xi})}{d\theta} + ig(\theta,\boldsymbol{\xi})\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)\right) - ie^{-i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}\theta}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)\right)\times \quad (6)$$
$$\times e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}\theta} g(\theta,\boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Уравнение (6) не может быть проинтегрировано, поскольку $g(\theta,\boldsymbol{\xi})$ не коммутирует с $\mathbf{r}(t_1)$ и $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}\theta}$, что делает необходимой разработку нового метода, способного «распутать» произведение (3), чему и посвящена настоящая работа.

Решение

Прежде чем непосредственно перейти к решению поставленной задачи, получим выражение для оператора координаты свободного электрона Дирака, тем самым определив необходимые формулы для решения задачи и выяснив, следуя решению Шредингера [4,5], некоторые особенности движения свободного электрона в релятивистской квантовой механике.

1. *Выражение для оператора координаты свободного релятивистского электрона*

Из теории Дирака [7] следует, что гамильтониан свободного релятивистского электрона имеет вид

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta_3 mc^2, \quad (7)$$

где $\mathbf{p}$ – вектор импульса электрона, $\boldsymbol{\alpha} = \beta_1\boldsymbol{\sigma}$ и β_i (i = 1, 2, 3) – матрицы Дирака, обладающие свойствами:

$$\alpha_i\cdot\alpha_j = ie_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}, \quad (8)$$
$$\beta_i\cdot\beta_j = ie_{ijk}\beta_k + \delta_{ij}, \quad (9)$$
$$\sigma_i\cdot\beta_j - \beta_j\cdot\sigma_i = 0, \quad (10)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – вектор, состоящий из матриц Паули.

Согласно представлению Гейзенберга, операторы физических величин подчиняются следующему уравнению

$$i\hbar\frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H], \quad (11)$$

где $A(t)$ – оператор, соответствующий физической величине A, H – гамильтониан системы.

Используя уравнение (11), гамильтониан (7) и свойства (8)–(10), запишем уравнение движения для оператора координаты и скорости электрона:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) = c\boldsymbol{\alpha}(t), \quad (12)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\boldsymbol{\alpha}(t)H - H\boldsymbol{\alpha}(t)\right). \quad (13)$$

Далее поступим следующим образом [5]. Как известно, одним из интегралов движения свободного электрона является его энергия, причем, учитывая (8)–(10), легко показать, что имеет место следующее соотношение

$$\boldsymbol{\alpha}(t)H + H\boldsymbol{\alpha}(t) = 2c\mathbf{p}. \quad (14)$$

Поэтому уравнение (13) может быть переписано в виде

$$i\hbar\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = 2\boldsymbol{\alpha}(t)H - 2c\mathbf{p} = 2c\mathbf{p} - 2H\boldsymbol{\alpha}(t). \quad (15)$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha}(t)$ и H не коммутируют друг с другом, то в уравнении (15) является принципиальным положение оператора H. Поэтому дальше везде в этой работе будем рассматривать случай, когда оператор H находится справа от $\boldsymbol{\alpha}(t)$.

Учитывая, что импульс электрона также является интегралом движения, возьмем от правой и левой частей уравнения (15) производную по времени:

$$i\hbar\frac{d^2\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt^2} = 2\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt}H. \quad (16)$$

Решая уравнение (16), найдем

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(t_1)e^{-i\frac{2H}{\hbar}\tau}, \quad (17)$$

где $\tau = t - t_1$.

Подставляя (17) в (15), получим

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{c\mathbf{p}}{H} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{i\hbar}{2H}e^{-i\frac{2H}{\hbar}\tau}. \quad (18)$$

Умножая теперь (18) на скорость света и интегрируя по времени, окончательно найдем

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c^2\mathbf{p}}{H}\tau - \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{c\hbar^2}{4H^2}e^{-i\frac{2H}{\hbar}\tau}. \quad (19)$$

Остановимся подробнее на соотношении (12) и решении (19). Особенность уравнения (12) заключается в следующем. Как известно из классической релятивистской механики, скорость электрона связана с его импульсом известным соотношением:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E}, \qquad (20)$$

где m – масса движущегося электрона, E – его энергия. Согласно же уравнению (12) в релятивистской квантовой механике связь между скоростью и импульсом (20) нарушается, причем скорость, как и импульс, приобретает самостоятельное значение, поскольку, согласно уравнению (13), уже не является сохраняющейся величиной, а это, в свою очередь, означает, что скорость электрона несет в себе определенную информацию о характере его движения [5].

Рассмотрим теперь решение (19). Из этого решения видно, что движение свободного электрона перестает быть «прямолинейным», при этом следует заметить, что первое слагаемое в (19) линейно растет со временем, причем коэффициент при t является обычной скоростью электрона, соответствующей импульсу $\mathbf{p}$. Последнее слагаемое в этом уравнении быстро осциллирует около среднего значения и представляет, согласно Шредингеру [5], микроскопическое дрожательное (zitterbewegung) движение электрона, наряду с макроскопическим, определяющимся скоростью $\mathbf{V} = c^2\mathbf{p}/H$. Содержание понятия «микроскопическое движение» можно выяснить, если оценить амплитуду высокочастотных колебаний в (19). Согласно [5] она имеет следующий порядок

$$\xi \sim \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-11}[\text{см}],$$

т.е. порядок минимального размера электрона как волнового пакета. Поэтому для электрона с макроскопической скоростью $\mathbf{V} = c^2\mathbf{p}/H$ отклонение центра тяжести облака заряда от прямолинейной траектории будет много меньше протяженности этого облака заряда. В этом и заключается «микроскопичность» дрожательного движения электрона.

Несмотря на то, что эффект дрожательного движения был открыт Шредингером в 30-х годах прошлого века, он продолжает привлекать внимание многих физиков [8–21], занимающихся релятивистской квантовой механикой, и даже специалистов из других областей теоретической физики [22].

Вернемся к решению (19). Для дальнейших вычислений будет удобно представить это решение в несколько ином виде. Для этого запишем уравнение (18) в виде

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{c\mathbf{p}}{H} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{i\hbar}{2H}\cos\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{\hbar}{2H}\sin\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right). \qquad (21)$$

Теперь учтем, что согласно уравнению (15)

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{ih}{2H} = \boldsymbol{\alpha}(t_1) - \frac{c\mathbf{p}}{H}. \qquad (22)$$

Подставляя решение (22) в (21), получим

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{c\mathbf{p}}{H}\left(1-\cos\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right)\right) + \boldsymbol{\alpha}(t_1)\cos\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{\hbar}{2H}\sin\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right). \qquad (23)$$

Умножая теперь (17), (23) на скорость света и интегрируя по времени, найдем

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c^2\mathbf{p}}{H}\left(\tau - \frac{\hbar}{2H}\sin\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right)\right) + \boldsymbol{\alpha}(t_1)\frac{c\hbar}{2H}\sin\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{c\hbar^2}{4H^2}\times \left(1-\cos\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right)\right). \qquad (24)$$

Далее воспользуемся известным свойством функций, зависящих от матриц Дирака. Пусть $f(x(\boldsymbol{\alpha}))$ есть некоторая функция, аргумент которой зависит от матриц Дирака. Тогда имеет место следующее свойство:

$$f(x(\boldsymbol{\alpha})) = f(\tilde{x}),\ \tilde{x} = \sqrt{x^2(\boldsymbol{\alpha})}, \qquad (25)$$

если f является четной функцией своего аргумента, и

$$f(x(\boldsymbol{\alpha})) = \frac{x(\boldsymbol{\alpha})}{\tilde{x}} f(\tilde{x}),\ \tilde{x} = \sqrt{x^2(\boldsymbol{\alpha})}, \qquad (26)$$

если f является нечетной функцией своего аргумента, причем в формулах (25), (26) $\tilde{x}$ уже не зависит от матриц Дирака. Соотношения (25), (26) можно легко получить, разложив функцию f в ряд по своему аргументу, используя при этом свойства (8)–(10).

Используя (25) и (26), получим

$$\sin\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right) = \frac{H}{E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right), \qquad (27)$$

$$\cos\left(\frac{2H}{\hbar}\tau\right) = \cos\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right), \qquad (28)$$

где

$$H^2 = E^2 = c^2p^2 + m^2c^4. \qquad (29)$$

Подставляя (27) и (28) в (24), окончательно найдем

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c^2\mathbf{p}}{H}\left(\tau - \frac{\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right) + \boldsymbol{\alpha}(t_1)\frac{c\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)\frac{c\hbar^2}{4E^2}\times \left(1-\cos\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right). \qquad (30)$$

Перейдем теперь к изложению метода «распутывания» электронных плотностей.

2. *Метод «распутывания» произведения операторов электронных плотностей*

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\left(F_0+V\right)\psi(\theta), \tag{31}$$

где ψ – некоторая функция, θ играет роль переменной времени, $F_0=\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)\right)=\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}$ – оператор свободной эволюции, $V=\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)$ – оператор возмущения.

Решение уравнения (31) имеет вид

$$\psi(\theta)=e^{i\left(F_0+V\right)\theta}\psi(0). \tag{32}$$

Согласно предыдущему пункту, и в частности выражению (30), оператор свободной эволюции имеет вид

$$F_0=\frac{c^2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}\right)}{H}\left(\tau-\frac{\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)\times$$
$$\times\frac{c\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)+\left(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\frac{c\hbar^2}{4E^2}\left(1-\cos\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right), \tag{33}$$

где $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(t_1)$ и $\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)$.

Запишем теперь уравнение (31) в представлении взаимодействия:

$$-i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}=V(\theta)\tilde{\psi}(\theta), \tag{34}$$

где

$$\tilde{\psi}(\theta)=e^{-iF_0\theta}\psi(\theta), \tag{35}$$

$$V(\theta)=e^{-iF_0\theta}Ve^{iF_0\theta}=e^{-iF_0\theta}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)\right)e^{iF_0\theta}. \tag{36}$$

Заметим, что в импульсном представлении оператор взаимодействия имеет вид

$$V=i\hbar\left(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right), \tag{37}$$

следовательно, $V(\theta)$ запишется как

$$V(\theta)=V+i\hbar e^{-iF_0\theta}\left(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\right)e^{iF_0\theta}=V+U(\mathbf{p},\theta), \tag{38}$$

и уравнение (34) можно переписать в виде

$$-i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}=\left(V+U(\mathbf{p},\theta)\right)\tilde{\psi}(\theta). \tag{39}$$

Будем искать решение (39) в виде

$$\tilde{\psi}(\theta)=e^{iV(\theta-m)}\varphi(\theta), \tag{40}$$

где m – некоторое число.

Подставляя (40) в (39), найдем

$$-i\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\tilde{U}(\mathbf{p},\theta)\varphi(\theta), \tag{41}$$

где

$$\tilde{U}(\mathbf{p},\theta)=e^{-iV(\theta-m)}U(\mathbf{p},\theta)e^{iV(\theta-m)}=$$
$$=e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}U(\mathbf{p},\theta)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}. \tag{42}$$

Докажем далее следующее равенство

$$\tilde{U}(\mathbf{p},\theta)=U(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}(\theta-m),\theta). \tag{43}$$

Для этого вычислим коммутатор

$$\left[U(\mathbf{p},\theta),e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\right]. \tag{44}$$

Поскольку в координатном представлении оператор импульса $\mathbf{p}=-i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$, представим $U(\mathbf{p},\theta)$ в виде ряда по параметру $\mathbf{p}$:

$$U(\mathbf{p},\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n U(\mathbf{p},\theta)}{\partial\mathbf{p}^n}\bigg|_{\mathbf{p}=0}\mathbf{p}^n. \tag{45}$$

Определим теперь, чему равен следующий коммутатор

$$[\mathbf{p}^n,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}]. \tag{46}$$

Для этого воспользуемся следующим приемом. Как известно,

$$\mathbf{p}f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r})\mathbf{p}=(-i\hbar\nabla)f(\mathbf{r}). \tag{47}$$

Умножая поочередно, слева и справа, (47) на $\mathbf{p}$ и складывая получившиеся выражения, получим

$$\mathbf{p}^2f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r})\mathbf{p}^2=(-i\hbar\nabla)\mathbf{p}f(\mathbf{r})+(-i\hbar\nabla)f(\mathbf{r})\mathbf{p}=$$
$$=(-i\hbar\nabla)^2f(\mathbf{r})+2(-i\hbar\nabla)f(\mathbf{r})\mathbf{p}. \tag{48}$$

Далее опять умножая поочередно (48), слева и справа, на $\mathbf{p}$ и складывая получившиеся выражения, найдем

$$\mathbf{p}^3f(\mathbf{r})-f(\mathbf{r})\mathbf{p}^3=(-i\hbar\nabla)^3f(\mathbf{r})+3(-i\hbar\nabla)^2\times$$
$$\times f(\mathbf{r})\mathbf{p}+3(-i\hbar\nabla)f(\mathbf{r})\mathbf{p}^2. \tag{49}$$

Выполняя эти операции n раз, получим

$$\mathbf{p}^nf(\mathbf{r})-f(\mathbf{r})\mathbf{p}^n=[\mathbf{p}^n,f(\mathbf{r})]=$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\left(C_n^l\left(-i\hbar\nabla\right)^{n-l}f(\mathbf{r})\mathbf{p}^l\right)-f(\mathbf{r})\mathbf{p}^n, \tag{50}$$

где C_n^l есть биномиальные коэффициенты.

Учитывая теперь, что $f(\mathbf{r})=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}$, найдем

$$\left[\mathbf{p}^n,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\right]=\sum_{l=0}^{n}\left(C_n^l\left(-i\hbar\nabla\right)^{n-l}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\times\right.$$
$$\left.\times\mathbf{p}^l\right)-e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\mathbf{p}^n=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}(\sum_{l=0}^{n}\left(C_n^l\left(\hbar\mathbf{k}(\theta-\right.\right. \tag{51}$$
$$\left.\left.-m)\right)^{n-l}\mathbf{p}^l\right)-\mathbf{p}^n)=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\left(\left(\hbar\mathbf{k}\left(\theta-m\right)+\mathbf{p}\right)^n-\right.$$
$$\left.-\mathbf{p}^n\right).$$

Подставляя (45) и (51) в (44), получим

$$U(\mathbf{p},\theta)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}\times$$
$$\times(U(\mathbf{p},\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^nU(\mathbf{p},\theta)}{\partial\mathbf{p}^n}\bigg|_{\mathbf{p}=0}\times \tag{52}$$
$$\times(\left(\hbar\mathbf{k}\left(\theta-m\right)+\mathbf{p}\right)^n-\mathbf{p}^n))$$

или

$$U(\mathbf{p},\theta)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}=$$
$$=e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(\theta-m)}U(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}(\theta-m),\theta). \tag{53}$$

Теперь подставляя (53) в (42), получим (43), что и доказывает справедливость этой формулы.

Вернемся к уравнению (41). Поскольку оператор $\widetilde{U}(\mathbf{p},\theta)$ не коммутирует с $\widetilde{U}(\mathbf{p},\theta_1)$ при разных значениях параметров θ и θ_1, что является следствием зависимости этих операторов от матриц Дирака, запишем решение уравнения (41) в соответствии с теорией *S*-матрицы [6]:

$$\varphi(\theta) = T\exp\left\{i\int_0^\theta d\theta_1 \widetilde{U}(\mathbf{p},\theta_1)\right\}\varphi(0) = S(\theta)\varphi(0), \quad (54)$$

где T – оператор хронологического упорядочения.

Определим теперь связь между исходной функцией $\psi(\theta)$ и найденной $\varphi(\theta)$. Из (35) и (40) имеем

$$\psi(\theta) = e^{iF_0\theta}e^{iV(\theta-m)}\varphi(\theta) \quad (55)$$

и с учетом (54) получим

$$\psi(\theta) = e^{iF_0\theta}e^{iV(\theta-m)}S(\theta)\varphi(0). \quad (56)$$

Но, с другой стороны, из (32) следует, что

$$\psi(\theta) = e^{i(F_0+V)\theta}\psi(0). \quad (57)$$

Установим связь между $\psi(0)$ и $\varphi(0)$. Для этого устремим в (56) θ к нулю:

$$\psi(0) = e^{-iVm}\varphi(0). \quad (58)$$

В итоге, приравнивая (56) и (57) при $\theta = 1$ и учитывая (58), найдем

$$e^{i(F_0+V)}e^{-iVm} = e^{iF_0}e^{iV(1-m)}S(1), \quad (59)$$

и поскольку $F_0 + V = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))$, то

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))m} = e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))(1-m)}S(1). \quad (60)$$

Для того чтобы получить из (60) произведение электронных плотностей (3), необходимо в этой формуле положить $m = 1$, что окончательно дает следующий ответ:

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))} = \\ = e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}T\exp\left\{i\int_0^1 d\theta U(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}(\theta-1),\theta)\right\}. \quad (61)$$

Вычислим теперь $U(\mathbf{p},\theta)$. Согласно формуле (38), имеем

$$U(\mathbf{p},\theta) = i\hbar e^{-iF_0\theta}(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})e^{iF_0\theta}. \quad (62)$$

Поскольку F_0 зависит от матриц Дирака, то воспользуемся свойствами (25) и (26) и представим экспоненты $e^{-iF_0\theta}$ и $e^{iF_0\theta}$ в виде

$$e^{\pm iF_0\theta} = \cos(\widetilde{F}_0\theta) \pm i\frac{F_0}{\widetilde{F}_0}\sin(\widetilde{F}_0\theta), \quad (63)$$

где

$$\widetilde{F}_0 = \sqrt{(F_0)^2} \quad (64)$$

и, как будет показано дальше, уже не содержит матриц Дирака.

Определим теперь $\widetilde{F}_0$. Вводя обозначения

$$A(\tau) = \frac{c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})}{E^2}\left(\tau - \frac{\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right), \quad (65)$$

$$B(\tau) = \frac{c\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right), \quad (66)$$

$$C(\tau) = \frac{c\hbar^2}{4E^2}\left(1-\cos\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right) \quad (67)$$

и учитывая, что $1/H = H/E^2$, перепишем (33) в виде

$$F_0 = A(\tau)H + B(\tau)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + C(\tau)(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (68)$$

Возводя (68) в квадрат, найдем

$$F_0^2 = A^2(\tau)E^2 + A(\tau)B(\tau)(H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H) + \\ + A(\tau)C(\tau)(H(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})H) + B^2(\tau)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 + \\ + B(\tau)C(\tau)((\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})) + C^2(\tau)(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})^2. \quad (69)$$

В первую очередь заметим, что вследствие коммутационных свойств матриц Дирака $(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 = k^2$. Теперь определим, чему равно симметризованное произведение

$$H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H. \quad (70)$$

Для этого воспользуемся формулой (14). Умножая ее скалярно на $\mathbf{k}$, получим

$$H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H = 2c(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}). \quad (71)$$

Далее рассмотрим второе симметризованное произведение из (69):

$$H(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})H. \quad (72)$$

Для его вычисления воспользуемся формулой (13) и представим (72) в виде

$$H(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})H = \frac{1}{i\hbar}\{H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H - E^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + \\ + (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})E^2 - H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H\} \equiv 0. \quad (73)$$

Теперь определим предпоследнее слагаемое в (69):

$$(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{i\hbar}\{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 H - \\ - (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}) - H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2\} \equiv 0. \quad (74)$$

Вычислим теперь $(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})^2$:

$$(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})^2 = (\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \\ = -\frac{1}{\hbar^2}((\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H - H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}))((\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H - H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})) = \\ = -\frac{1}{\hbar^2}\{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})H - 2E^2(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 + H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})\times \\ \times H(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})\} = -\frac{4}{\hbar^2}(c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})^2 - k^2E^2). \quad (75)$$

В итоге, подставляя (71)–(75) в (69) и выполняя простейшие преобразования, найдем

$$F_0^2 = \left(\frac{kc\hbar}{E}\right)^2\sin^2\left(\frac{E}{\hbar}\tau\right) + \left(\frac{c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})}{E}\right)^2\times \\ \times\left(\tau^2 - \left(\frac{\hbar}{E}\right)^2\sin^2\left(\frac{E}{\hbar}\tau\right)\right) \quad (76)$$

или

$$\widetilde{F}_0 = \frac{kc}{\Omega}\left(\sin^2(\Omega\tau)+\left(\frac{c(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})}{\hbar}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(\tau^2-\frac{1}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\tau)\right)\right)^{1/2} = \frac{kc}{\Omega}Q(p), \quad (77)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, определяющий направление $\mathbf{k}$,

$$\Omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}. \quad (78)$$

Вернемся к вычислению $U(\mathbf{p},\theta)$. Подставляя (63) в (62), найдем

$$U(\mathbf{p},\theta) = i\hbar\left(\cos(\widetilde{F}_0\theta)-i\frac{F_0}{\widetilde{F}_0}\sin(\widetilde{F}_0\theta)\right)\times$$
$$\times(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})\left(\cos(\widetilde{F}_0\theta)+i\frac{F_0}{\widetilde{F}_0}\sin(\widetilde{F}_0\theta)\right) = \quad (79)$$
$$= U_1(\mathbf{p},\theta)+iU_2(\mathbf{p},\theta),$$

где

$$U_1(\mathbf{p},\theta) = -\theta\frac{F_0}{\widetilde{F}_0}\left(\hbar\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\widetilde{F}_0}{\partial\mathbf{p}}\right)+\frac{\sin(2\widetilde{F}_0\theta)}{2\widetilde{F}_0}\times$$
$$\times\left(\frac{F_0}{\widetilde{F}_0}\left(\hbar\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\widetilde{F}_0}{\partial\mathbf{p}}\right)-\left(\hbar\mathbf{k}\cdot\frac{\partial F_0}{\partial\mathbf{p}}\right)\right), \quad (79.1)$$

$$U_2(\mathbf{p},\theta) = \frac{1-\cos(2\widetilde{F}_0\theta)}{2\widetilde{F}_0}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\left[\frac{F_0}{\widetilde{F}_0},\left(\hbar\mathbf{k}\cdot\frac{\partial F_0}{\partial\mathbf{p}}\right)\right]_+-\left(\hbar\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\widetilde{F}_0}{\partial\mathbf{p}}\right)\right). \quad (79.2)$$

Символ $[\ ]_+$ в формуле (79.2) обозначает симметризованное произведение операторов.

Определим теперь $(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})\widetilde{F}_0$ и $(\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})F_0$. Используя (33), (77), (78) и переходя в формулах (33), (77) и (79) к безразмерным переменным

$$\mathbf{x} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{mc} = \mathbf{k}\lambda_c,\ \boldsymbol{\pi} = \frac{\mathbf{p}\lambda_c}{\hbar} = \frac{\mathbf{p}}{mc},$$
$$y = \frac{mc^2}{\hbar}\tau = \Omega_0\tau, \quad (80)$$

получим

$$F_0 = \frac{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\pi})}{f^2(\pi)}((\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\alpha})+\beta_3)\times$$
$$\times\left(y-\frac{1}{2f(\pi)}\sin(2f(\pi)y)\right)+\frac{(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha})}{2f(\pi)}\times \quad (81)$$
$$\times\sin(2f(\pi)y)-\frac{(\mathbf{x}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})}{4f^2(\pi)}(1-\cos(2f(\pi)y)),$$

$$f(\pi) = \sqrt{\pi^2+1}, \quad (82)$$

$$\widetilde{F}_0 = \frac{x}{f(\pi)}Q(\pi,y), \quad (83)$$

$$Q(\pi,y) =$$
$$= \sqrt{\sin^2(f(\pi)y)+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})^2\left(y^2-\frac{1}{f^2(\pi)}\sin^2(f(\pi)y)\right)}, \quad (84)$$

$$(\mathbf{x}\cdot\nabla_{\pi})\widetilde{F}_0 =$$
$$= \frac{x^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})}{Q(\pi,y)f^3(\pi)}\left(\widetilde{W}_1(\pi,y)+\widetilde{W}_2(\pi,y)+\widetilde{W}_3(\pi,y)\right), \quad (85)$$

$$(\mathbf{x}\cdot\nabla_{\pi})F_0 = \frac{x^2}{f^3(\pi)}\left((\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})W_1(\pi,y)+W_2(\pi,y)\right), \quad (86)$$

$$\widetilde{W}_1(\pi,y) = \left(-1+\left(\frac{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})}{f(\pi)}\right)^2\right)\sin^2(f(\pi)y), \quad (87)$$

$$\widetilde{W}_2(\pi,y) = \left(1-\left(\frac{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})}{f(\pi)}\right)^2\right)\frac{y}{2}\sin(2f(\pi)y), \quad (88)$$

$$\widetilde{W}_3(\pi,y) =$$
$$= \left(f^2(\pi)-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\pi})^2\right)\left(y^2-\frac{1}{f^2(\pi)}\sin^2(f(\pi)y)\right), \quad (89)$$

$$W_1(\pi,y) = w_1(\pi,y)+w_2(\pi,y)+w_3(\pi,y), \quad (90)$$

$$w_1(\pi,y) = \frac{1}{2}\sin(2f(\pi)y)-f(\pi)y\cos(2f(\pi)y), \quad (91)$$

$$w_2(\pi,y) = (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})f(\pi)y(\cos(2f(\pi)y)-1), \quad (92)$$

$$w_3(\pi,y) = -\frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})}{4f(\pi)}\times$$
$$\times(2f(\pi)y\sin(2f(\pi)y)+\cos(2f(\pi)y)-1), \quad (93)$$

$$W_2(\pi,y) =$$
$$= f(\pi)((\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\alpha})+\beta_3)\left(y-\frac{1}{2f(\pi)}\sin(2f(\pi)y)\right), \quad (94)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dy} = -\frac{1}{\Omega_0}\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t_1)}{dt_1}. \quad (95)$$

Формулы (33), (61) и (79)–(94) в принципе решают поставленную задачу.

В общем случае анализ полученных соотношений является очень сложным. Поэтому для упрощения вычислений рассмотрим далее некоторые предельные случаи и приближения.

3. *Приближения и предельные случаи*

Для того чтобы посмотреть, как работают полученные соотношения, попытаемся их максимально упростить, используя для этого следующие приближения.

В первую очередь рассмотрим случай, когда электрон находится в собственной системе отсчета. Тогда, согласно формуле (61), преобразование $\mathbf{p}\to\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}(\theta-1)$ сведется к замене в формулах (81)–(94) $\boldsymbol{\pi}$ на $x(\theta-1)\mathbf{n}$.

Рассмотрим теперь два основных предельных случая, а именно когда $x<<1$ и $x>>1$, имея цель определить асимптотический вид

функции $U(x,y,\theta)$. В первом случае из приведенных выше формул, с учетом принятого приближения и с точностью до минимальной степени по x, найдем

$$U_1(x,y,\theta) = -x^2\theta\beta_3\left(y-\frac{1}{2}\sin(2y)\right), \quad (96)$$

$$U_2(x,y,\theta) = \\ = -x^4\theta^2(\theta-1)\left(y^2-2\sin^2(y)+\frac{y}{2}\sin(2y)\right). \quad (97)$$

Заметим, что поскольку $U(x,\theta)$ зависит только от матрицы β_3, то $U(x,\theta)$ коммутирует с $U(x,\theta_1)$ при различных значениях параметров θ и θ_1. Это означает, что в формуле (61) мы можем пренебречь операцией взятия хронологического произведения.

В итоге, подставляя (96) и (97) в (61), получим

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))} = \\ = e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\{-B_1(x,y)-i\beta_3B_2(x,y)\}, \quad (98)$$

где

$$B_1(x,y) = \frac{x^4}{12}\left(y^2-2\sin^2(y)+\frac{y}{2}\sin(2y)\right), \quad (99)$$

$$B_2(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(y-\frac{1}{2}\sin(2y)\right). \quad (100)$$

Заметим, что при выводе формул (98)–(100) предполагалось, что $y\sim 1$. В действительности, поскольку формулы (99) и (100) имеют вид $f(x)g(y)$, они справедливы и в асимптотическом представлении по переменной y, т.е. для $y<<1$ и $y>>1$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $x>>1$. Пропуская элементарные преобразования, запишем окончательный ответ:

$$U(x,y,\theta) = -U_1(x,y,\theta)+iU_2(x,y,\theta), \quad (101)$$

где

$$U_1(x,y,\theta) = (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\frac{x^2y}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^{3/2}}\times \\ \times\left(\theta-\frac{\sin(2xy\theta)}{2xy}\right)+\frac{x^3(\theta-1)^2}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^{3/2}}\times \quad (102) \\ \times\left(\sin^2(xy(\theta-1))+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\cos^2(xy(\theta-1))\right)\sin(2xy\theta),$$

$$U_2(x,y,\theta) = \frac{x\sin^2(xy\theta)}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^{3/2}}\left(-1+2x^2(\theta-1)^2\times\right. \quad (103) \\ \left.\times\left((\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\sin^2(2xy(\theta-1))+\cos^2(2xy(\theta-1))\right)\right).$$

Отметим, что эти формулы справедливы не только при $y\sim 1$, но также позволяют определить асимптотические выражения для $U(x,y,\theta)$ при $y<<1$ и $y>>1$.

Как и в предыдущем случае, ввиду того, что $U(x,y,\theta)$ зависит только от $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})$, $U(x,y,\theta)$ коммутирует с $U(x,y,\theta_1)$ при различных значениях параметров θ и θ_1. Другими словами, в этом случае мы также можем пренебречь взятием хронологического произведения в (61).

Подставляя теперь (101) в (61) и интегрируя по θ, найдем

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))} = \\ = e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\{-B_1(x,y)-iB_2(x,y)\}, \quad (104)$$

где

$$B_1(x,y) = \\ = \sin^2(xy)\left(2f_1(x,y)-1+2f_2(x,y)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\right), \quad (105)$$

$$B_2(x,y) = f_2(x,y)\sin(2xy)+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\times \\ \times\left(xy\left(1+\frac{\sin(2xy)}{2xy}\right)+f_1(x,y)\sin(2xy)\right), \quad (106)$$

$$f_1(x,y) = \int_0^x d\theta\,\frac{\theta^2\cos^2(y\theta)}{\left(\theta^2+1\right)^{3/2}}, \\ f_2(x,y) = \int_0^x d\theta\,\frac{\theta^2\sin^2(y\theta)}{\left(\theta^2+1\right)^{3/2}}. \quad (107)$$

Для физических приложений интересно рассмотреть еще одно приближение. Его содержание заключается в следующем. Заметим, что практически все полученные выше соотношения, так или иначе, основаны на выражении (33). Выпишем его еще раз:

$$F_0 = \frac{c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})}{H}\left(\tau-\frac{\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right)+(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\alpha})\times \\ \times\frac{c\hbar}{2E}\sin\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)+(\mathbf{k}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}})\frac{c\hbar^2}{4E^2}\left(1-\cos\left(\frac{2E}{\hbar}\tau\right)\right),$$

где $\tau = t-t_1$. Фактически величина этого параметра ничем не определена, и может быть как $\tau>>1$, так и $\tau<<1$, что, собственно, и определяет данное приближение.

Рассмотрим первый случай, когда $\tau>>1$. Тогда выражение (33) принимает достаточно простой вид

$$F_0 = \frac{c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})}{H}\tau, \quad (108)$$

при этом несложно получить:

$$\widetilde{F}_0 = \frac{c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})}{E}\tau, \quad (109)$$

$$(\hbar\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})\widetilde{F}_0 = \tau\hbar\frac{k^2c^2}{E}\left(1-\frac{c^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})^2}{E^2}\right), \quad (110)$$

$$(\hbar\mathbf{k}\cdot\nabla_{\mathbf{p}})F_0 = \\ = \tau\hbar\frac{c^3k^2}{E^2}\left((\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})+\beta_3mc\right). \quad (111)$$

Подставляя (108)–(111) в (79), вводя безразмерные переменные (80) и переходя в собственную систему отсчета электрона, найдем

$$U(x,y,\theta)=U_1(x,y,\theta)+iU_2(x,y,\theta), \quad (112)$$

где

$$U_1(x,y,\theta)=-\theta\frac{x^2y\left(x(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{n})(\theta-1)+\beta_3\right)}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^2}, \quad (113)$$

$$U_2(x,y,\theta)=-\frac{1}{x^2(\theta-1)^2+1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x^2y(\theta-1)}{\sqrt{x^2(\theta-1)^2+1}}\right)\frac{\sin^2\left(\dfrac{x^2y\theta(\theta-1)}{\sqrt{x^2(\theta-1)^2+1}}\right)}{\theta-1}. \quad (114)$$

Поскольку $U(x,y,\theta)$ зависит от матриц $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})$ и β_3, не коммутирующих между собой, то $U(x,y,\theta)$ не коммутирует с $U(x,y,\theta_1)$ при различных значениях параметров θ и θ_1. Это означает, что мы не можем пренебречь взятием хронологического произведения в (61). Дальше рассмотрим два предельных случая: $x<<1$ и $x>>1$.

Пусть сначала $x<<1$. Тогда из (113) и (114) получим

$$U_1(x,y,\theta)=\beta_3x^2y\theta, \quad (115)$$

$$U_2(x,y,\theta)=$$

$$=-\left(1-x^2y(\theta-1)\right)\frac{\sin^2\left(x^2y\theta(\theta-1)\right)}{\theta-1}. \quad (116)$$

Подставляя теперь (115), (116) в (61) и интегрируя по θ, найдем

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))}=$$

$$=e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\{-B_1(x,y)-i\beta_3B_2(x,y)\}, \quad (117)$$

где

$$B_1(x,y)=\frac{x^4}{2}y^2, \quad (118)$$

$$B_2(x,y)=\frac{x^2}{2}y. \quad (119)$$

Заметим, что формулы (118) и (119) можно было получить другим способом, непосредственно из (99) и (100). Для этого необходимо пренебречь в (99) и (100) осциллирующими членами по сравнению с линейным и квадратичным слагаемыми, что соответствует рассматриваемому приближению, т.е. $\tau>>1$. В результате мы приходим к формуле (117).

Рассмотрим далее противоположный предельный случай, когда $x>>1$. Преобразуем (113) и (114) к виду

$$U_1(x,y,\theta)=-\frac{y}{x}\frac{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\theta(\theta-1)}{\left((\theta-1)^2+1/x^2\right)^2}, \quad (120)$$

$$U_2(x,y,\theta)=\frac{y}{x}\frac{\sin^2(xy\theta)}{\left((\theta-1)^2+1/x^2\right)^{3/2}}. \quad (121)$$

Подставляя в этом случае (112) в (61) и интегрируя по θ, получим

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))}=$$

$$=e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\{-B_1(x,y)+i(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})B_2(x,y)\}, \quad (122)$$

где

$$B_1(x,y)=xy\sin^2(xy), \quad (123)$$

$$B_2(x,y)=\frac{y}{2}\left(x-\arctan(x)\right). \quad (124)$$

Перейдем теперь ко второму асимптотическому случаю, когда $\tau<<1$. При $x<<1$ выражение для $U(x,y,\theta)$ определяется формулами (96) и (97), которые при условии $y<<1$ ($\Omega_0\tau<<1$) будут иметь следующий вид

$$U_1(x,y,\theta)=-\frac{2}{3}y^3x^2\theta\beta_3, \quad (125)$$

$$U_2(x,y,\theta)=-\frac{4}{3}y^4x^4\theta^2(\theta-1). \quad (126)$$

Интегрируя (125) и (126) по θ, найдем

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))}=$$

$$=e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\left\{-\frac{x^2y^3}{9}\left(x^2y+3i\beta_3\right)\right\}. \quad (127)$$

Определим теперь выражение для $U(x,y,\theta)$ при $x>>1$. Этот случай полностью характеризуется формулами (102) и (103), которые при условии $x>>1$ и $y<<1$ приобретают следующий вид

$$U_1(x,y,\theta)=\frac{x^3(\theta-1)^2}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^{3/2}}\times \quad (128)$$

$$\times\left(\sin^2(xy(\theta-1))+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\cos^2(xy(\theta-1))\right)\sin(2xy\theta),$$

$$U_2(x,y,\theta)=\frac{x\sin^2(xy\theta)}{\left(x^2(\theta-1)^2+1\right)^{3/2}}\left(-1+2x^2(\theta-1)^2\times\right. \quad (129)$$

$$\left.\times\left((\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\sin^2(2xy(\theta-1))+\cos^2(2xy(\theta-1))\right)\right).$$

Интегрируя (128) и (129) по θ, получим

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))}=$$

$$=e^{i(\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})}\exp\{-B_1(x,y)-iB_2(x,y)\}, \quad (130)$$

где

$$B_1(x,y)=2x\left(\operatorname{arcsh}(x)+\frac{x^2}{2}y^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\right)\sin^2(xy), \quad (131)$$

$$B_2(x,y)=x\left(\frac{x^2}{2}y^2+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\operatorname{arcsh}(x)\right)\sin(2xy). \quad (132)$$

В качестве заключения к данной работе подведем некоторые итоги. В первую очередь стоит отметить, что установленные Шредингером особенности движения электрона в релятивистской квантовой механике являются интересными и необычными по своему физическому со-

держанию и по настоящее время привлекают к себе внимание. Учет этих особенностей может привести к ряду интересных задач, одной из которых и была посвящена настоящая работа. В общем случае предложенный метод позволил найти решение в виде ряда s-матрицы, от сложного интегрального оператора. При этом было показано, что при асимптотических значениях параметров этого оператора решение имеет достаточно простой вид, удобный для использования в различных физических приложениях.

Список литературы

1. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В., Петров Д.А. Квантово-статистическая теория радиационных эффектов без расходимостей //Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. **6.** С. 3–35.

2. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Квантово-статистическая теория радиационного трения релятивистского электрона // ТМФ. 2009. **158. 3.** С. 478–496.

3. Ефремов Г.Ф., Шарков В.В., Петров Д.А. Квантово-статистическая теория радиационных эффектов //ТМФ. 2011. В печати.

4. Schrodinger E. Non powerful motion in the relativistic quantum mechanics //Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1930. **24.** P. 418–428.

5. Шредингер Э. О свободном движении в релятивистской квантовой механике. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 218–228.

6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Физматлит, 2005. 384 с.

7. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1989. 434 с.

8. Weyssenhof J. On two relativistic models of Dirac's electron //Acta. Phys. Pol. 1947. **9.** P. 47–53.

9. Huang K. On the zitterbewegung of the electron //Am. J. Phys. 1949. **20.** 479.

10. Barut O.A., Bracken A.J. Zitterbewegung and the geometry of the electron //Phys. Rev. D. 1981. **23. 10.** P. 2454–2463.

11. Lock J.A. Relativistic invariance and zitterbewegung //Am. J. Phys. 1984. **52. 3.**

12. Maddox J. Where zitterbewegung may lead //Nature. 1987. **325.** P. 306.

13. Hestenes D. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics //Found. of Phys. 1990. **20. 10.** P. 1213–1232.

14. Pavsic M., Recami E., Rodrigues Jr.W.A. Electron structure, zitterbewegung, and the new non-linear Dirac-like equation //Phys. Lett. B. 1993. **318.** P. 481–488.

15. Rodrigues Jr.W.A., Jayme V.Jr., Recami E., Salesi G. About zitterbewegung and electron structure //Phys. Lett. B. 1993. **318.** P. 623–628.

16. Hestenes D. Space-time physics with geometric algebra //Am. J. Phys. 2003. **71.** P. 691–704.

17. Bolte J., Glaser R. Zitterbewegung and semiclassical observables for the Dirac equation //J. Phys. A. 2004. **37.** P. 6359–6373.

18. Schliemann J., Loss D., Westervelt R.M. Zitterbewegung of electronic wave packets in III-V Zinc-Blende semiconductor quantum wells //Phys. Rev. Lett. 2005. **94.** 206801.

19. Hamdan N., Altorra A., Salman H.A. Modified Dirac equation with classical zitterbewegung //Proc. Pakistan Akad. Sci. 2007. **44(4).** P. 263–272.

20. Lamata L., Leon J., Schatz T., Solano E. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion //Phys. Rev. Lett. 2007. **98.** 253005.

21. Vaishnav J.Y., Clark C.W. Observing zitterbewegung with ultracold atoms //Phys. Rev. Lett. 2008. **100.** 153002.

22. Вонсовский С.В., Свирский М.С., Свирская Л.М. О дрожащем движении электрона в зонной теории //ТМФ. 1990. **85. 2.** С. 211–221.

ON «DISENTANGLING» THE PRODUCT OF ELECTRON DENSITY OPERATORS IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

G.F. Efremov, D.A. Petrov

The problem of «disentangling» the product of electron density operators taken at different times in relativistic quantum mechanics is solved taking into account the quantum jitter effect (Zitterbewegung). A technique to solve this problem in the free-electron motion approximation has been proposed. Some limiting cases are analyzed.

Keywords: Dirac electron, quantum jitter effect (Zitterbewegung), electron density operator.