УДК 537.86; 535.14

ОБ АМПЛИТУДЕ ВЕРОЯТНОСТИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ФОТОНА

А.Т. Гаврилин

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

gavrilin@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 23.11.2010

По отношению к кванту электромагнитного излучения предлагается терминологически развести два следующих понятия: а) волновая функция, заданная в координатном представлении, и б) трехпараметрическое (по декартовым координатам) семейство амплитуд вероятности пространственного положения – как референты, относящиеся к разным предметным областям.

Ключевые слова: приготовление состояния, оператор спиральности, наблюдаемая положения, локализуемость фотона, физически бесконечно малый фотодетектор.

Введение

В квантовой радиофизике утвердилось прагматическое понимание фотона как квазичастицы, характеризующей возбуждение нормальной моды электромагнитного поля (ЭМП). Ее пространственные размеры зачастую велики даже в макроскопических масштабах. Между тем при постановке ряда современных экспериментов (передача оптических сигналов по квантовым каналам связи, «квантовая телепортация» и т.п.) возникают вопросы, относящиеся к пространственно-временной локализации материальных переносчиков элементарных единиц информации. В нерелятивистской квантовой механике на такие вопросы призвана отвечать волновая функция микросистемы в координатном представлении. Применительно к фотону обычно ставилась под сомнение либо сама возможность существования такой функции, либо целесообразность ее введения вне контекста вторичного квантования.

Следует напомнить, что термин «волновая функция» появился еще до работ Шредингера 1926 года и понимался как решение уравнений гиперболического типа, обычно описывающих волнообразное поведение сплошной среды. Поэтому и решение открытого им уравнения для электрона Шредингер также стал трактовать как «непрерывное распределение электричества в пространстве». Однако вскоре, как известно, возобладала предложенная Максом Борном статистическая трактовка волновой функции. С тех пор термины «волновая функция» и «амплитуда вероятности» рассматриваются как синонимы. Это отождествление в случае релятивистских микрообъектов нередко приводит к путанице [1–6]. Формальный аспект затруднений заключается в том, что решение волнового уравнения для фотона в случае преобразований из группы Пуанкаре должно преобразовываться по одному из неприводимых представлений этой группы с единичным (а не половинным, как для электрона) старшим весом [7]. Данное обстоятельство не позволяет трактовать квадрат модуля волновой функции как плотность вероятности, обязанную быть временной компонентой 4-вектора.

В предлагаемой работе указанное противоречие снимается учетом того, что фотон может быть обнаружен лишь за счет его взаимодействия с массивными фермионами, например по результату его поглощения электронной оболочкой атома или по треку отдачи свободного электрона в камере Вильсона. Участие в измерительных процедурах частиц с половинным спином приводит к тому, что группой кинематической симметрии системы «фотон – пробное тело» оказывается *квантово-механическая* группа Пуанкаре, представляющая собой полупрямое произведение группы 4-мерных трансляций и группы комплексных унимодулярных двухрядных матриц. Амплитуда вероятности при этом характеризует скорее состояние вышеупомянутой системы, нежели одиночного фотона.

О волновой функции фотона

Две первые альтернативные попытки введения волновой функции фотона в координатном представлении относятся к началу 30-х годов прошлого века. Одна из них была предпринята в статье Л.Д. Ландау и Р. Пайерлса [8] и сводилась к формальному Фурье-преобразованию корректной во всех отношениях амплитуды вероятности пребывания фотона в состоянии с определенным волновым вектором. Полученный в результате преобразования объект оказался обладателем ряда патологических (в части претензий на роль амплитуды вероятности) свойств. Данное обстоятельство привело авторов [8] к выводу, что «все фигурирующие в волновой механике физические величины в релятивистской области оказываются уже неопределимыми» [9].

Другая попытка содержалась в неопубликованных заметках Э. Майораны (их изложение имеется в [10]). При переводе на современный язык подход Майораны сводится к следующему. Уравнения Максвелла для ЭМП в свободном пространстве

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

при помощи одного из векторов $\mathbf{F}_\pm = \mathbf{E} \pm i\mathbf{B}$ записываются в виде уравнения

$$\pm\frac{i}{c}\frac{\partial \mathbf{F}_\pm}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{F}_\pm \qquad (1)$$

с наложенным на его решение условием соленоидальности: $\mathrm{div}\,\mathbf{F}_\pm = 0$. (Поскольку за векторами $\mathbf{F}_\pm$ не закрепилось устойчивого названия, будет справедливо назвать их, а равно и их линейные комбинации общего вида *векторами Фарадея*.)

Если теперь представить ротор векторного поля в тензорной форме

$$(\mathrm{rot}\mathbf{F})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}F_k\,,$$

где ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, и учесть, что генераторы группы вращений S_1, S_2, S_3 через упомянутый тензор выражаются линейно: $(S_i)_{jk} = -i\,\varepsilon_{ijk}$, то уравнению (1) можно придать вид, аналогичный уравнению Вейля для нейтрино или Дирака для электрона:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix}_\pm = \pm\begin{bmatrix}0 & -icp_3 & icp_2\\ icp_3 & 0 & -icp_1\\ -icp_2 & icp_1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix}_\pm = \qquad (2)$$

$$= \pm c(\mathbf{p},\mathbf{S})\mathbf{F}_\pm \equiv \pm\,\hat{\mathbf{H}}\mathbf{F}_\pm,$$

где матричный гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}$ в правой части (2) содержит компоненты канонического оператора импульса $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, а вектор $\mathbf{S}$ может пониматься как спин некоторого векторного бозона.

Отметим, что постоянная Планка была привнесена в уравнение (2) специально, чтобы подчеркнуть упомянутое выше сходство с уравнениями Вейля и Дирака. (Впоследствии, чтобы избежать отрицательных собственных значений у гамильтониана, ответственность за двузначность уравнения (2) возложили на оператор спиральности фотона, так что векторы $\mathbf{F}_\pm$ оказались собственными состояниями также и данного оператора, не подпадающими под юрисдикцию правил суперотбора.) Поскольку характеристическое многообразие уравнения (2) лежит на световом конусе, то любое решение $\mathbf{F}$ этого уравнения (любая линейная комбинация векторов $\mathbf{F}_+$ и $\mathbf{F}_-$), казалось бы, вполне заслуживает звания волновой функции. Можно ли, однако, толковать нормированный вектор Фарадея как амплитуду вероятности (АВ) обнаружить фотон в соответствующей точке пространства?

Чтобы ответить на данный вопрос, вспомним, что в формализме нерелятивистской квантовой механики АВ значения некоторой наблюдаемой – это эрмитово скалярное произведение должным образом нормированных векторов, один из которых задает (чистое) состояние микрообъекта, а другой является собственным вектором самосопряженного оператора, представляющего эту наблюдаемую. Откладывая дискуссию о существовании наблюдаемой положения фотона до следующего раздела, заметим, что в случае релятивистского объекта от указанного произведения, кроме эрмитовости, обеспечивающей положительность скалярного квадрата, естественно требовать еще и релятивистскую инвариантность его модуля, т.е. независимость от выбора инерциальной системы отсчета наблюдателя. Эти же соображения относятся к нормировке вектора F и приводят к следующей форме нормирующего делителя [11,12]

$$N = \int_{|\mathbf{p}|=p_0}\left|\tilde{\mathbf{f}}(p_0,\mathbf{p})\right|^2\frac{d^3\mathbf{p}}{p_0}. \qquad (3)$$

В (3) $\tilde{\mathbf{f}}(p_0,\mathbf{p})$ – Фурье-образ векторного поля Фарадея $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, p_0 – временная компонента 4-вектора импульса. Деление на величину p_0 в подынтегральном выражении (3), в силу формулы Планка – Эйнштейна, выполняет функцию счета монохроматических фотонов с энергией p_0.

Таким образом, число N из формулы (3) можно понимать как общее число фотонов, образующих ЭМП $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$. Проводя деление $\mathbf{F}(\mathbf{r},t)$ на $\sqrt{N}$, получаем нормированную на единицу комплекснозначную функцию, обладающую всеми атрибутами волновой функции квантовой механики в координатном представлении за исключением борновской статистической трактовки.

Об амплитуде вероятности положения фотона

Как уже было упомянуто в предыдущем разделе, стандартный способ введения АВ в квантовой механике сопряжен с определением оператора соответствующей наблюдаемой. Применительно к релятивистскому объекту с нулевой массой покоя вопрос о существовании оператора положения с желательным набором свойств (эрмитовость, локальность, Лоренц-ковариантность), по всей видимости, остается открытым [13–15]. Отметим лишь, что если бы существовало решение уравнения (1), равное нулю в некоторый момент t всюду, кроме окрестности точки $\mathbf{r}=0$, то полное ортогональное семейство решений получалось бы из него при помощи операторов пространственных трансляций $\mathrm{T}(\mathbf{a}),\ \mathbf{a}\in\mathrm{R}^3$. Это семейство, в силу спектральной теоремы [16], обеспечивало бы существование оператора положения. Однако, как легко убедиться, подобное решение уравнения (1) несовместимо с условием $\operatorname{div}\mathbf{F}_{\pm}=0$. В связи с неадекватностью математического формализма представляется разумным подойти к проблеме с эмпирической стороны.

Согласно Дираку [17], всякий эксперимент по измерению характеристик микрообъекта можно с некоторой степенью условности разделить на две стадии: приготовление и измерение. Две процедуры приготовления α и β будем считать эквивалентными, если в статистическом эксперименте (массовой совокупности испытаний) распределения результатов измерения всевозможными приборами для них одинаковы: $\Pi(\alpha,\cdot)=\Pi(\beta,\cdot)$. Класс эквивалентности процедур приготовления называется *состоянием* микрообъекта [19]. Две процедуры измерения $\mathbf{a},\mathbf{b}$ будем считать эквивалентными, если распределения $\Pi(\alpha,\mathbf{a}),\Pi(\alpha,\mathbf{b})$ на шкалах соответствующих им приборов совпадают для всех α из множества возможных состояний. Класс эквивалентности процедур измерения называется *наблюдаемой.*

Будем считать, что с генератором состояния [18] и платформой с комплексом измерительных приборов на ней жестко связаны две инерциальные системы отсчета (ИСО), и рассмотрим два состояния: α – упомянутые ИСО тождественно совпадают, и α' – в момент $t=0$, соответствующий моменту измерения, первая из ИСО по отношению ко второй характеризуется вектором пространственного сдвига $\mathbf{r}_0$ и скоростью $\mathbf{v}$. Пусть при этом распределения на трехмерных «шкалах» некоторых приборов подчиняются следующим условиям Пуанкаре-ковариантности

$$\Pi(\alpha',\mathbf{a})=\Pi\left(\alpha,\left\{\mathbf{I}+\frac{\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}}{v^2}(\gamma-1)\right\}\mathbf{a}+\mathbf{r}_0\right),\quad (4)$$

где $\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ – тензорное произведение трехмерных векторов, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\gamma=\left(1-v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. В этом случае будем говорить, что эти приборы являются представителями *наблюдаемой положения*.

В квантовой механике обычно предполагается, что наблюдаемая (эрмитов оператор) обладает собственным базисом бездисперсных на ней состояний (собственных функций), т.е. таких процедур приготовления, при которых в массовой серии испытаний разброс результатов измерения обусловлен лишь несовершенством прибора. В силу сказанного в начале данного раздела, мы не будем требовать наличия этого свойства у наблюдаемой положения фотона, а отнесем ее к классу рандомизированных наблюдаемых [18]. (Пожалуй, наиболее показательным примером рандомизированных наблюдаемых в микрофизике являются «времена жизни» радиоактивных ядер или нестабильных элементарных частиц. Здесь самая тщательная унификация ансамбля частиц не позволяет уменьшить неопределенность времени их распада. Аналогичный механизм препятствует приготовлению ансамбля фотонов, бездисперсного на наблюдаемой положения, когда этот ансамбль формируется за счет спонтанного излучения пространственно локализованных и однотипно возбужденных атомов. В самом деле, «синхронизация часов» фотонов предполагает знание моментов излучения. Эти последние могли бы быть определены по импульсам отдачи излучающих атомов, но лишь при условии фиксации их начальных импульсов. Требование локализации атомов вступает в противоречие с этим условием.) Референтами рандомизированных наблюдаемых в математическом формализме квантовой механики выступают неортогональные разложения единицы [19] в гильбертовом пространстве состояний системы.

За отсутствием у фотона *bona fide* оператора положения, от АВ положения в $(\mathbf{r}_0,t_0)$ будем требовать лишь, чтобы она была линейным квазилокальным функционалом на комплексном пространстве $\{\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\}$ фарадеевских векторов. Квазилокальность означает, что функционал не зависит от значений $\{\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\}$ в точках $(\mathbf{r},t)$, находящихся вне «атомарной» окрестности точки $(\mathbf{r}_0,t_0)$. (Это требование согласуется с билинейным и локальным характером взаимодействия электронного и электромагнитного полей в модельных лагранжианах квантовой электродинамики.) С физической точки зрения данный функционал характеризует возмущение, которое в момент t_0 вносит фотон в состояние атома-измерителя, расположенного в точке $\mathbf{r}_0$, и может пониматься как аналог свертки тензора восприимчивости [20] электрически малой приемной антенны и тензора ЭМП. Отличие заключается лишь в спинорном характере трансформационных свойств электронных состояний атома по отношению к преобразованиям Пуанкаре.

Обычно используемые фотодетекторы нечувствительны к магнитному полю. Однако детектор, основанный на механизме магнитодипольных переходов, в поле стоячей волны реагировал бы на пучности магнитного поля и игнорировал пучности электрического. Реализовать малый фотодетектор, который бы «аннулировал» произвольный вектор Фарадея $\mathbf{F}_1$, давая в то же время максимальную скорость счета фотонов для вектора $\mathbf{F}_2$, ортогонального к $\mathbf{F}_1$ (в смысле скалярного произведения [20]), можно, по-видимому, за счет относительного релятивистского движения ИСО генератора состояния и измерительной платформы. Понятно, что подобный эксперимент относится скорее к категории мысленных, так что по отношению к фотону следовало бы говорить лишь об электрической и магнитной наблюдаемых положения и, соответственно, *электрической и магнитной* АВ *положения фотона.*

Заключение

Волновая функция фотона в форме вектора Фарадея не связана с какими-либо квантовыми атрибутами и отражает волновой аспект свободного ЭМП. Ее нормировка приводит лишь к тому, что квадрат модуля вектора Фарадея начинает характеризовать относительную концентрацию энергии ЭМП в пространстве, но не плотность вероятности обнаружения фотона. Фигурально выражаясь, свободное ЭМП – это «свет в себе», которого никто не видел. Квантовый аспект ЭМП малой интенсивности может проявиться лишь во взаимодействии с веществом (и по всей вероятности, с гравитационным полем). Это взаимодействие в уравнениях Максвелла отображается наличием «сторонних токов» и детерминируется природой последних. (По существу, именно характер этих сторонних членов определяет водораздел между классической и квантовой электродинамикой, т.к. последняя возникает тогда, когда начинают брать в расчет дискретность полного углового момента системы: вещество + ЭМП.) Кроме того, особенностью постановки задач классической электродинамики является то, что в ней сторонние токи «задаются руками» и не подвержены действию анализируемых полей. В случае микроскопических масштабов и малочисленности фотонов и электронов такая постановка оказывается крайне неадекватной.

Применительно к фотону АВ положения предполагает более детальное, в сравнении с нерелятивистской квантовой механикой, математическое описание измерителя положения частицы (локального фотодетектора), в частности его селективных свойств по отношению к типу фотона. Задачей идеального фотодетектора является «клонирование» состояния уничтожаемого фотона, т.е. точная и полная фиксация физических характеристик последнего. Понятно, что трансформационные свойства состояний фотона и носителя информации о нем по отношению к релятивистским преобразованиям не обязаны совпадать. Тем самым снимается большинство противоречий, связанных с теоретико-групповым анализом измерительных процедур с фотонами.

Работа поддержана Министерством промышленности и инноваций Нижегородской области (грант «РФФИ-Поволжье» № 08-07-97016).

Список литературы

1. Newton T.D., Wigner E.P. // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400–406.
2. Wightman A.S. // Rev. Mod. Phys. 1962. V. 34. P. 845–872.
3. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Inagaki T. // Phys. Rev. A . 1994. V. 49. P. 2839–2843.
5. Bialynicki-Birula I. // Acta Phys. Polon. A. 1994. V. 86. P. 97–106.
6. Sipe J.E. // Phys. Rev. A . 1995. V. 52. P. 1875–1883.
7. Wigner E.P. // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
8. Landau L., Peierls R. // Zc. f. Phys. 1930. V. 62. S. 188–200.
9. Landau L., Peierls R. // Zc. f. Phys. 1931. V. 69. S. 56–68.
10. Mignani R., Recami E., Baldo M. // Lett. Nuovo Cim. 1974. V. 11. P. 568–576.
11. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Наука, 1967. 842 с.
12. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 816 с.
13. Price M.H. // Proc. Roy. Soc. A. 1948. V. 195. P. 62–73.

14. Hegerfeldt G.C. // Phys. Rev. D.1974. V. 10. P. 3320–3325.
15. Hawton M. // Phys. Rev. A. 1999. V. 59. P. 954–962.
16. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
17. Дирак П. Принципы квантовой механики: Перевод 4-го изд. М.: Наука, 1979. 481 с.
18. Гаврилин А.Т. // Изв. вузов. Физика. 1990. Т. 33. С. 66–71.
19. Холево А.С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980. 320 с.
20. Гаврилин А.Т. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 36. С. 265–270.

ON THE PROBABILITY AMPLITUDE OF PHOTON'S POSITION

A.T. Gavrilin

It is suggested to separate two concepts relating to the quantum of electromagnetic radiation: a) the wave function given in the coordinate representation, and b) three-parameter (in Cartesian coordinates) family of probability amplitudes of spatial position as referents to different subject areas.

Keywords: state preparation, helicity operator, observable of position, photon localizability, physically infinitesimal photodetector.