УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЭЙРИ В C_Z

В.Л. Андрианов, М.А. Солдатов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vandriannn@mail.ru

Поступила в редакцию 08.07.2011

Находится асимптотика в комплексной плоскости обобщенной функции Эйри.

Ключевые слова: асимптотический ряд, специальные функции, метод перевала.

В теории специальных функций хорошо известна функция Эйри, являющаяся частным решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка очень простого вида

$$y'' - xy = 0.$$

Впервые она появилась в работе Дж. Эйри по оптике, в дальнейшем использовалась в механике. Функция Эйри тесно связана с функциями Эйри–Фока и функциями Бесселя. Известна асимптотика и расположение нулей этой целой вещественной функции на вещественной оси. При комплексных z для нее справедливо следующее интегральное представление:

$$Ai(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right)dt,$$

где $\gamma = (e^{-2\pi i/3}, 0] \cup [0, +\infty)$ – контур в комплексной плоскости. Используется также вторая функция Эйри $Bi(z)$, выражающаяся через $Ai(z)$, но линейно не зависящая от нее. Обратим внимание, что у функции $\exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right)$ три луча "максимального" убывания: $re^{\pm\frac{2\pi}{3}i}$ и положительное направление вещественной оси $(r \to +\infty)$, а контур γ проходит через два соседних.

У функции $\exp\left(-\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)$ есть $n + 1$ направление (при натуральном n) максимального убывания: $te^{\frac{2\pi k i}{n+1}}$, $k = 0,1,2,...,n$, при $t \to +\infty$, и функцию

$$F(z) = \int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)dt$$

естественно назвать *обобщенной функцией Эйри*, $\gamma = (\infty e^{i\frac{2\pi}{n+1}}, 0] \cup [0, +\infty)$. Простым интегрированием по частям легко показать, что она удовлетворяет обобщенному уравнению Эйри

$$y^{(n)}(z) - zy(z) = 0.$$

Действительно,

$$F^{(n)}(z) = \int_\gamma t^{(n)} \exp\left(zt - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)dt =$$

$$= -\int_\gamma \exp(zt)\, d\exp\left(-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$= z\int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right)dt = zF(z).$$

Заменяя контур γ на аналогичный ему, соединяющий два следующих соседних луча максимального убывания, получим, очевидно, еще $n + 1$ решение дифференциального уравнения, естественно, линейно зависимые.

Однако любая комбинация этих функций, содержащая меньше, чем $n + 1$ элементов, будет линейно независимой, поскольку у всех функций разные направления максимального роста.

Данная работа посвящена изучению асимптотики обобщенных функций Эйри. Поскольку в зависимости от четности n свойства функций несколько различаются, а асимптотические свойства функции Эйри ($n = 2$) известны, особенно подробно изучается случай $n = 3$.

Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^4}{4}\right)dt, \qquad (1)$$

$$\gamma = l_1^- + l_0^+ = (+i\infty; 0] \cup [0; +\infty).$$

Отметим, что комплексная плоскость распадается на 8 открытых секторов (плюс граница), в четырех из которых, $S_k^- = \left\{t \in C_t : -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k < \arg t < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right\}$, функция $\exp\left(zt - \frac{t^4}{4}\right)$ экспоненциально убывает (максимальное убывание вдоль лучей $t = re^{i\frac{\pi}{2}k}$, $r \to +\infty$), в других же,

$$S_k^+ = \left\{ t \in \mathrm{C}_t : \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k < \arg t < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \right\},$$

экспоненциально возрастает (максимально вдоль лучей $t = re^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)k}$). На границе секторов функция $e^{-\frac{t^4}{4}}$ осциллирует. Соответственно, контур интегрирования γ лежит в двух соседних секторах убывания, при этом стандартно доказывается, что с учетом скорости убывания подынтегральной функции при «вращении» лучей l_0^+ и l_1^- соответственно в секторах S_0^- и S_1^- величина интеграла (1) не меняется.

Асимптотику вычисляем по методу перевала [1]. Находим перевальные точки для величины

$$S(z;t) = zt - \frac{t^4}{4}, \quad S_t' = -t^3 + z, \quad t_{1,2,3} = \sqrt[3]{z},$$

которые оказываются подвижными и которые останавливаем заменой $t \sim \sqrt[3]{z}t$, $\sqrt[3]{1} = 1$ (главное значение корня) [2, с. 318]. В результате находим

$$F(z) = \sqrt[3]{z} \int_{\tilde{\gamma}} \exp\left(z^{\frac{4}{3}} \left(t - \frac{t^4}{4} \right) \right) dt, \qquad (2)$$

где контур $\tilde{\gamma}$ получается из γ поворотом на угол $\frac{1}{3}\arg t$ по часовой стрелке. Он остается в прежних секторах S_0^- и S_1^- при условии $-\frac{3\pi}{8} < \arg z < \frac{3\pi}{8}$, следовательно, в соответствии со сказанным выше, может быть возвращен в прежнее положение γ.

У интеграла (2) три точки перевала: $e^{\frac{2\pi k i}{3}}$, $k = 0; \pm 1$, на контуре лежит одна – $t = 1$.

Асимптотику интеграла

$$F_0(z) = \sqrt[3]{z} \int_{l_0^+} \exp\left(z^{\frac{4}{3}} \left(t - \frac{t^4}{4} \right) \right) dt \qquad (3)$$

в секторе $K_1 = \left\{ z \in \mathrm{C} : |\arg z| < \frac{3\pi}{8} \right\}$ находим по методу Лапласа; точка максимального вклада – $t = 1$. Используя известную асимптотическую формулу для случая максимума внутри отрезка, получаем асимптотический ряд

$$F_0(z) \sim \sqrt[3]{z} \exp\left(\frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{\frac{4}{3}n + \frac{2}{3}}}, \qquad (4)$$

$$z \to \infty, \ z \in K_1,$$

где $c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{h^{(2n)}(0)}{(2n)!!}$, $h(y) = t'(y)$ и $t(y)$ – неявная функция, заданная уравнением

$$t - \frac{t^4}{4} - \frac{3}{4} = -y^2, \ t(0) = 1.$$

Главный асимптотический член (ГАЧ) разложения имеет вид

$$F_0(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{3}} z^{-\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{z^{\frac{4}{3}}} \right) \right),$$

$$z \to \infty, \ z \in K_1.$$

Один из «хвостов» интеграла (3) оценивается очевидным образом: $\left| \int_2^{+\infty} \right| = O(1)$ при $z \to \infty$, $z \in K_1$, т.е. асимптотически мал по сравнению с $\exp\left(\frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} \right)$ и поэтому вклада в асимптотику не дает. Величину же интеграла $\int_{l_1^-}$ во всем секторе $K_1 \ni z^{\frac{4}{3}}$ оценить сложно. Поэтому изучим более детально лишь линии уровня гармонической функции $S_2(z)$, проходящие через точки $t_1 = 1$ и $t_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$:

$$S(t) = t - \frac{t^4}{4} = S_1(t) + iS_2(t), \ \ t = \xi + i\eta.$$

Имеем $S_2 = \eta - \xi^3\eta + \xi\eta^3$, $S_1 = \xi - \frac{1}{4} \times \left(\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4 \right)$. Рассмотрим точку перевала $t_1 = 1$. В ней $S(1) = \frac{3}{4}$, линия уровня d_1: $S_2 = \eta(1 - \xi^3 + \xi\eta^2) = 0$, и ее график легко построить (к ней же относится ось $\eta = 0$) (рис. 1). В точке перевала $S\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} \right) = e^{\frac{2\pi}{3}i} - \frac{1}{4} e^{\frac{8\pi}{3}i} = \frac{3}{8}(-1 + \sqrt{3}i)$, линия уровня d_2: $S_2 = \eta - \xi^3\eta + \xi\eta^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ проходит через точку $e^{\frac{2\pi}{3}i}$. Тогда контур интегрирования γ деформируем следующим образом. Из $+i\infty$ спускаемся по линии уровня S_2 d_2 до точки A (изображено пунктиром), переходим вертикально в точку B и по линии уровня $S_2 = 0$ (оси ξ) уходим в $+\infty$. Устремляем вертикальный отрезок AB влево в $-\infty$, при этом $\int_{AB} \to 0$, т.к. на d_2 $\eta = O^*\left(\frac{1}{\xi^3} \right)$ при $\xi \to -\infty$ и $\xi = O^*\left(\frac{1}{\eta^3} \right)$ при $\eta \to +\infty$. В итоге контур интегрирования γ распадается на два: ось ξ и одну из линий уровня

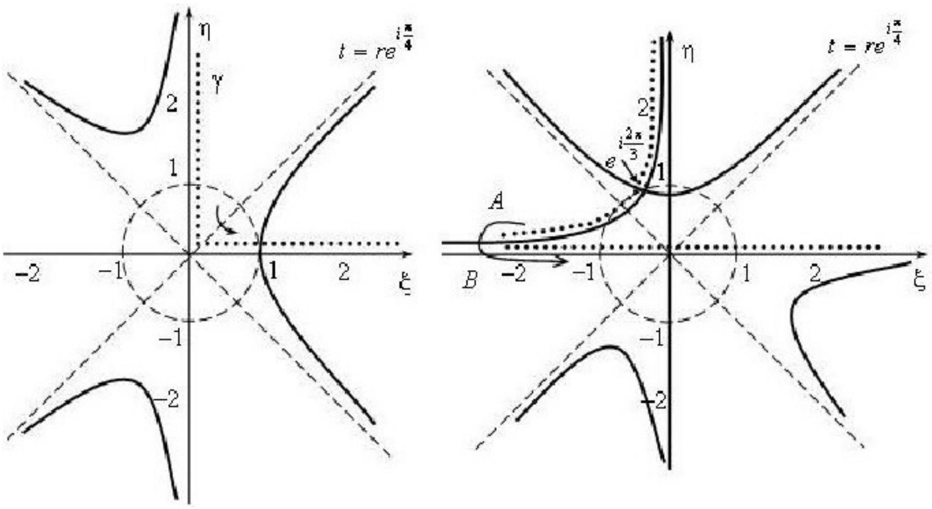

Рис. 1

d_2, везде $S_2 = \text{const}$. Вычисляя вклад в асимптотику от точки $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, где $S\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right) = \frac{3}{8}(-1+\sqrt{3}i)$, и сравнивая с вкладом от точки $t = 1$ (4), видим, что он экспоненциально мал. Окончательно асимптотика функции Эйри в K_1 задается формулой (4).

Замечание. Поскольку в направлении re^{i0} интеграл Эйри возрастает максимально, то порядок и тип целой функции $F(z)$ соответственно равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

Асимптотику в секторе $K_3 = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{5\pi}{8} < \arg z < \frac{11\pi}{8}\right\}$ вычисляем, переобозначая $z = -\lambda$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in K_1$,

$$F(-\lambda) = \int_\gamma \exp\left(-\frac{t^4}{4} - \lambda t\right)dt.$$

Аналогично предыдущему, после замены $t \sim \sqrt[3]{\lambda}\, t$ при условии $\lambda \in K_1$ записываем

$$F(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\int_\gamma \exp\left(-\frac{t^4}{4} - \lambda\right)\lambda^{\frac{4}{3}}\, dt, \qquad (5)$$

$$S(t) = \frac{t^4}{4} + t = S_1(t) + iS_2(t),$$

$$S_1 = \frac{1}{4}\left(\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4 + 4\xi\right),\ S_2 = \xi^3\eta - \xi\eta^3 + \eta.$$

С учетом структуры гармонической функции $S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ в окрестности точки перевала (седла) анализ графика этой неявной функции показывает следующее. В первом квадранте в точке $e^{i\frac{\pi}{3}}$ пересекаются под прямым углом две кривые l_1 и l_2. Одна из них пересекает ось $\xi = 0$ в точке $\eta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Другая же, l_2, как несложно показать, асимптотически стремится к $+\infty$ при $\xi \to 0$, $\eta = O^*\left(\frac{1}{\xi^3}\right)$ и $\eta(\xi) \to 0$ при $\xi \to +\infty$, $\eta = O^*\left(\frac{1}{\xi^3}\right)$.

Деформируем контур γ в l_1 – это и будет перевальный контур с единственной точкой строгого максимума для $S_1(t)$: $t_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Действительно, если параметризовать l_1 как $t = t(S)$, после замены в интеграле (5) получаем возможность применять метод Лапласа. Окончательно

$$F(\lambda) = -\sqrt[3]{\lambda}\exp\left(-\frac{3}{8}(1+i\sqrt{3})\right)\lambda^{\frac{4}{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{\lambda^{\frac{3}{4}n+\frac{3}{8}}},$$

$$\lambda \to \infty,\ \lambda \in K_1,\ \lambda = -z,$$

где коэффициенты c_n эффективно вычисляются по формулам аналогично (4); ГАЧ

$$F(\lambda) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\lambda^{-\frac{1}{6}}\exp\left(-\lambda^{\frac{4}{3}}(1+i\sqrt{3})\frac{3}{8}\right),$$

$$\lambda \to \infty, \lambda \in K_1.$$

Асимптотику в секторе $K_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{7\pi}{8}\right\}$ вычисляем, переобозначая $z = i\lambda$, $\lambda \to \infty$, $\lambda \in K_1$. Заменой $t \sim \sqrt[3]{\lambda}\, t$ получаем интеграл

$$F(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\int_\gamma \exp\left(\lambda^{\frac{4}{3}}\left(it - \frac{t^4}{4}\right)\right)dt.$$

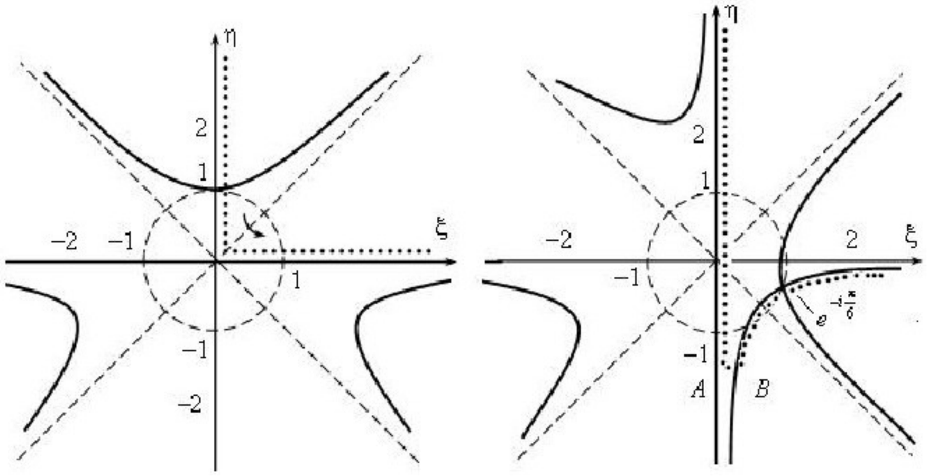

Рис. 2

Несложно проверить, что в этом случае существует перевальный контур η(ξ), проходящий через единственную точку перевала $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $S\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = -\frac{3}{8}\left(1-\sqrt{3}\,i\right)$, который задается уравнением $S_2(\xi+i\eta)=\xi-\xi^3\eta+\xi\eta^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. График функции η(ξ) асимптотически приближается к осям ξ = 0 и η = 0, если соответственно ξ → 0 и ξ → +∞. Вклад от этой точки равен (ограничимся первым членом)

$$F(z)=\nu\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}\times$$

$$\times\exp\left(-\lambda^{\frac{4}{3}}(1-i\sqrt{3})\frac{3}{8}\right)\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{4}{3}}}\right)\right),$$

$$\lambda\to\infty,\ \lambda\in K_1,\ \lambda=-iz. \qquad (6)$$

Замечание. Луч $z = re^{i\frac{3\pi}{8}}$ лежит на границе сектора K_1, поэтому формула (4) для этого направления неприменима. Однако в этом случае можно применить формулу (6). Подставляя $\lambda = re^{-i\frac{\pi}{8}}$, $r\to+\infty$, получаем $F\left(re^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{8}}\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\exp\left(\frac{3}{4}r^{\frac{4}{3}i}\right)$, $r\to+\infty$, т.е. функция на этом направлении убывает как степенная и осциллирует.

И в последнем случае $z\to\infty$, $z\in K_4 = \left\{z\in \mathsf{C}_z : -\frac{7\pi}{8}<\arg z<-\frac{\pi}{8}\right\}$, переобозначая $z=-i\lambda$, $\lambda\to\infty$, $\lambda\in K_1$, и выполняя замену $t\sim\sqrt[3]{\lambda}\,t$, получаем

$$F(\lambda)=\sqrt[3]{\lambda}\int_{\tilde{\gamma}}\exp\left(-\lambda^{\frac{4}{3}}\left(it+\frac{t^4}{4}\right)\right)dt.$$

Имеются три перевальные точки $t_{1,2,3}$: $e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, i, причем $S\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)=-\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$, $S\left(e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)=\frac{3}{8}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$, $S(i)=\frac{3}{4}$, где $S(t)=-it-\frac{t^4}{4}$. В этом случае

$$S_2(\xi+i\eta)=\xi\left(-1-\xi^3\eta+\eta^3\right),$$

$$S_1(\xi+i\eta)=\eta-\frac{1}{4}\left(\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4\right).$$

Линии уровня S_2, проходящие через точки i, $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, изображены на рис. 2.

Деформируя контур интегрирования (рис. 2) в контур $(+i\infty, A, B, +\infty)$ ($(+i\infty, A]$ на линии $S_2=0$, $[B,+\infty)$ на линии $S_2=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$) и устремляя горизонтальный отрезок $[AB]$ вниз, попадаем в сектор экспоненциального убывания величины $S(t)$, где, как легко видеть, $\int_{AB}\to 0$. Тогда контур интегрирования γ распадается на два: мнимую ось и линию уровня S_2, проходящую через точку $e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Поскольку $S_1\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)<S_1(i)$, вклад в асимптотику дает лишь точка i. На мнимой оси мы можем применить метод Лапласа. Окончательно

$$F(z)=\nu(i)=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}e^{\frac{3}{4}\lambda^{4/3}}\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{4}{3}}}\right)\right),$$

$$\lambda\to\infty,\ \lambda\in K_1,\ z=-i\lambda$$

(везде выбираем главные значения корней).

Список литературы

1. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шатунин М.К. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

ASYMPTOTICS OF GENERALIZED INTEGRALS AI(Z) IN C

V.L Andrianov, M.A. Soldatov

Asymptotics of a generalized function Ai(z) is found in the complex plane.

Keywords: asymptotic series, special functions, saddle point method.