УДК 517.537.34

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ СУММАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2011 г.
Н.В. Гостева, Л.К. Додунова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

nataly_gos@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.2011

Построено матричное преобразование степенного лакунарного ряда. Получены суммы, приближающие функцию из определенного класса на замкнутых множествах.

Ключевые слова: равномерное приближение, степенной лакунарный ряд.

В 1952 г. С.Н. Мергелян [1] получил приближение аналитических функций многочленами на замкнутых множествах. А именно, С.Н. Мергелян доказал теорему о том, что для любого компакта F и для любой функции $f \in C_A(F)$ найдется многочлен, приближающий функцию $f(z)$ на множестве F сколь угодно точно.

Через $C_A(F)$ здесь обозначен класс функций, непрерывных на F и аналитических в каждой внутренней точке этого множества.

В 1971 г. С.К. Чуй и М.Н. Парнз [2] распространили этот результат на случай частичных сумм универсального степенного ряда единичного радиуса сходимости. Они доказали существование степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

единичного радиуса сходимости, в котором для любого компактного множества F комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, не содержащего точек круга $|z| \le 1$, дополнение к которому является областью, содержащей точку ∞, и произвольной функции $f \in C_A(F)$ существует подпоследовательность частичных сумм ряда (1), равномерно сходящаяся к функции $f(z)$ на множестве F.

В 1976 г. В. Люх [3] обобщил эти результаты на случай сумм определенного вида. Им доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $A = \{\alpha_{n\nu}\}$ – нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} = 1, \ \lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0 \ \ \forall \nu .$$

Тогда существует степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ радиуса сходимости единица, обладающий следующим свойством: для каждого множества F, расположенного в области $|z| > 1$, дополнение к которому является областью, содержащей бесконечно удаленную точку, и любой функции $f \in C_A(F)$, найдется последовательность целых чисел $\{N_k\}$ (зависящая от f и F), такая, что

$$\sigma_{N_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{N_k} \alpha_{N_k \nu} S_\nu(z),$$

где $S_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k z^k$, равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве F.

В настоящей работе последний результат обобщается на случай специальных сумм, связанных с универсальными степенными рядами лакунарной структуры, вид которой рассматривал А.Ф. Леонтьев [4] при исследовании полноты систем функций. В [4] при выполнении условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \tau, \tag{2}$$

где λ_n ($n \ge 1$) – натуральные числа, доказана полнота (в смысле равномерного приближения в классе аналитических функций) подсистемы

$$\left\{z^{\lambda_n}\right\}_{n=1,2,\ldots} \tag{3}$$

в угловой области $D^{(\tau)}$ раствора $2\pi\tau$.

Угловой областью раствора $2\pi\tau$ называем область, описываемую жордановой кривой L, соединяющей точку окружности $|z| = r$, $0 < r < \infty$, с точкой $z = \infty$, при повороте плоскости $\boldsymbol{C}$ на угол $2\pi\tau$ вокруг начала $z = 0$.

Одновременно с системой (3) в указанной выше области $D^{(\tau)}$ при выполнении условия (2) будет полна и

$$\left\{z^{\lambda_n}\right\}_{n=p,p+1,\ldots},$$

где p – произвольное натуральное число. Поэтому, как установлено в работе [5], существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{\lambda_n}, \tag{4}$$

универсальный в области $D^{(\tau)}$, т.е. такой, что для любой функции $f \in C_A(F)$, где F – произвольное компактное множество, содержащееся в $D^{(\tau)}$, дополнение к которому является областью, содержащей точку ∞, существует подпоследовательность частичных сумм ряда (4), равномерно сходящаяся на F к функции $f(z)$.

Из работы [5] следует

Теорема 2. *При выполнении условия* (2)*, где* $0<\tau\le 1$, *произвольный ряд вида* (4) *можно представить в виде суммы двух универсальных на любом из множеств* $D^{(\tau)}$ *рядов вида* (4) *с коэффициентами* c'_n *и* c''_n, *т.е.* $c_n = c'_n + c''_n$ (n=1,2,…).

Назовем последовательности натуральных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$ и $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *дополняющими друг друга*, если $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{n\}_{n=1,2,\ldots} \setminus \{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

При выполнении условия (2), где $0<\tau<1$, существуют ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n} z^{\mu_n},$$

универсальные соответственно на множествах $D^{(\tau)}$ и $D^{(1-\tau)}$, где $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$ и $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$ – две произвольные дополняющие друг друга последовательности натуральных чисел. Справедливость этого утверждения следует из рассуждений, приведенных в работе [6].

Теорема 3. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *– две дополняющие друг друга последовательности натуральных чисел, первая из которых удовлетворяет условию* (2) *при* $0<\tau<1$ (*а, следовательно,* $\lim\limits_{n\to\infty} n/\mu_n = 1-\tau$). *Пусть* $A=\{\alpha_{n\nu}\}$ *– нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_{n\nu}=1,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_{n\nu}=0\ \ \forall\nu. \tag{5}$$

Тогда существует степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *обладающий следующим свойством: для любых множеств* $D^{(\tau)}$ *и* $D^{(\mu)}$ *и любой функции* $f\in C_A(F)$, *найдутся последовательности натуральных чисел* $\{\lambda_{m_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, *зависящие от* $D^{(\tau)}$ *и f,* $\{\mu_{m_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, $\{\mu_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, *зависящие от* $D^{(\mu)}$ *и f, такие, что*

$$S_{\lambda_{m_k}}(z)=\sum_{i=1}^{\lambda_{m_k}}\alpha_{\lambda_{m_k}i}Q^{(\tau)}_{\lambda_{n_i}}(z),\ k=1,2,\ldots, \tag{6}$$

где $Q^{(\tau)}_{\lambda_{n_i}}(z)=\sum\limits_{n=1}^{n_i} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на* $F\subset D^{(\tau)}$, *и*

$$\sigma_{\mu_{m_k}}(z)=\sum_{i=1}^{\mu_{m_k}}\alpha_{\mu_{m_k}i}Q^{(\mu)}_{\mu_{n_i}}(z),\ k=1,2,\ldots, \tag{7}$$

где $Q^{(\mu)}_{\mu_{n_i}}(z)=\sum\limits_{n=1}^{n_i} a_{\mu_n} z^{\mu_n}$, *равномерно сходится к* $f(z)$ *на* $F\subset D^{(\mu)}$, *где* $\mu = 1-\tau$.

Лемма. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $B=\{\beta_{k\nu}\}$ *– нижняя треугольная бесконечная матрица, удовлетворяющая условиям* (5);

2) $\{\gamma_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *– последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию* (2) *при* $0<\tau<1$, $\{\gamma_{k_m}\}_{m=1,2,\ldots}$, $\{\gamma_{\tilde{k}_m}\}_{m=1,2,\ldots}$ *– ее подпоследовательности*;

3) *дан универсальный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\gamma_k} z^{\gamma_k}. \tag{8}$$

Тогда функция $f\in C_A(F)$ *может быть равномерно аппроксимирована многочленами на* F (*F содержится в одном из множеств* $D^{(\tau)}$) *вида*

$$\sum_{i=m}^{\gamma_{k_{m+l}}}\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}S_{\gamma_{\tilde{k}_i}}(z), \tag{9}$$

где $S_{\gamma_{\tilde{k}_i}}(z)=\sum\limits_{k=1}^{\tilde{k}_i} b_{\gamma_k} z^{\gamma_k}$.

Доказательство. Согласно определению универсального ряда вида (8) для каждого множества F, содержащегося в одном из множеств $D^{(\tau)}$, и любой функции $f(z)/(\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}(\gamma_{k_{m+l}}-m+1))\in C_A(F)$ будем иметь

$$\begin{gathered}|S_{\gamma_{\tilde{k}_i}}(z)-f(z)/(\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}(\gamma_{k_{m+l}}-m+1))|<\\ <\varepsilon/(|\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}|(\gamma_{k_{m+l}}-m+1))\end{gathered} \tag{10}$$

при $i=m, m+1,\ldots,\gamma_{k_{m+l}}$; $m>N$. Используя (10), получим

$$|\sum_{i=m}^{\gamma_{k_{m+l}}}\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}S_{\gamma_{\tilde{k}_i}}(z)-f(z)|\le$$

$$\le\sum_{i=m}^{\gamma_{k_{m+l}}}|\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}||S_{\gamma_{\tilde{k}_i}}(z)-f(z)/(\beta_{\gamma_{k_{m+l}}i}(\gamma_{k_{m+l}}-m+1))|<\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 проведем методом работы [7].

Возьмем совокупность односвязных компактных множеств плоскости $\boldsymbol{C}$, расположенных на внешности окружности $|z|=r$, ограниченных дугами окружностей с рациональными радиусами с концами в точках с рациональными полярными координатами и ломаными линиями с вершинами в точках с рациональными полярными координатами. Расположим эти множества в последовательность

$$\{\Delta_m\}_{m=1,2,...}. \quad (11)$$

При этом допустим, что каждое из указанных выше множеств содержится в последовательности (11) бесконечное число раз. (Если это не выполняется, то последовательность (11) заменим последовательностью Δ_1, Δ_1, Δ_2,…, Δ_1, Δ_2,…, Δ_n,…). Возьмем в этой последовательности подпоследовательности $\{\Delta_m^{(1)}\}_{m=1,2,...}$, $\{\Delta_m^{(2)}\}_{m=1,2,...}$, такие, что каждое из множеств $\Delta_m^{(1)}$ лежит внутри угловой области раствора $2\pi\tau$, а каждое из множеств $\Delta_m^{(2)}$ – внутри угловой области раствора $2\pi\mu$, $\mu=1-\tau$.

В силу доказанной выше леммы можно равномерно аппроксимировать на любом компактном множестве F (содержащемся в одной из областей $D^{(\tau)}$ или $D^{(\mu)}$) многочленами вида (9) любую функцию $f\in C_A(F)$. Расположим их в последовательность

$$P_1(z), P_2(z),\dots, P_k(z),\dots \quad (12)$$

так, чтобы каждый из этих многочленов встречался в последовательности (12) бесконечное число раз. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,...}$ – монотонно убывающая последовательность положительных чисел, $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Построим:

1) суммы (6), равномерно сходящиеся к функции $f\in C_A(F)$ на произвольном множестве $F\subset D^{(\tau)}$;

2) суммы (7), равномерно сходящиеся к функции $f\in C_A(F)$ на произвольном множестве $F\subset D^{(\mu)}$.

Для этого достаточно построить суммы

$$S_{\lambda_{m_k}}(z)=\alpha_{\lambda_{m_k}1}Q_{\lambda_{n_1}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_k}\lambda_{m_k}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_k}}}}^{(\tau)}(z), \quad (13)$$

$$\sigma_{\mu_{m_k}}(z)=\alpha_{\mu_{m_k}1}Q_{\mu_{n_1}}^{(\mu)}(z)+\dots+\alpha_{\mu_{m_k}\mu_{m_k}}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_k}}}}^{(\mu)}(z), \quad (14)$$

где $\lambda_{m_k}<\mu_{m_k}$ (k=1,2,…), удовлетворяющие условиям

$$|P_k(z)-S_{\lambda_{m_k}}(z)|<\varepsilon_k \text{ при } z\in\Delta_k^{(1)}, \quad (15)$$

$$|P_k(z)-\sigma_{\mu_{m_k}}(z)|<\varepsilon_k \text{ при } z\in\Delta_k^{(2)}. \quad (16)$$

Построение сумм (13), удовлетворяющих условиям (15), и сумм (14), удовлетворяющих условиям (16), можно выполнить следующим образом. Выберем из последовательности (12) многочлен $S_{\lambda_{m_1}}(z)=\alpha_{\lambda_{m_1}1}Q_{\lambda_{n_1}}^{(\tau)}(z)+\alpha_{\lambda_{m_1}2}Q_{\lambda_{n_2}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_1}\lambda_{m_1}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1}}}}^{(\tau)}(z)$, такой, что $|P_1(z)-S_{\lambda_{m_1}}(z)|<\varepsilon_1$ при $z\in\Delta_1^{(1)}$ (здесь, очевидно, в качестве $S_{\lambda_{m_1}}(z)$ можем взять $P_1(z)$). На основании леммы, с учетом условий (5), в последовательности (12) выберем многочлен $\sigma_{\mu_{m_1}}(z)=\alpha_{\mu_{m_1}1}Q_{\mu_{n_1}}^{(\mu)}(z)+\alpha_{\mu_{m_1}2}Q_{\mu_{n_2}}^{(\mu)}(z)+\dots+\alpha_{\mu_{m_1}\mu_{m_1}}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_1}}}}^{(\mu)}(z)$, где $\lambda_{m_1}<\mu_{m_1}$, такой, что $|P_1(z)-\sigma_{\mu_{m_1}}(z)|<\varepsilon_1$ при $z\in\Delta_1^{(2)}$.

В силу установленной выше леммы, с учетом условий (5), в последовательности (12) найдется многочлен $\alpha_{\lambda_{m_2}\lambda_{m_1}+1}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1}+1}}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_2}\lambda_{m_2}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2}}}}^{(\tau)}(z)$, где $\mu_{m_1}<\lambda_{m_2}$, такой, что при $z\in\Delta_2^{(1)}$ $|P_2(z)-S_{\lambda_{m_2}}(z)|<\varepsilon_2$, где $S_{\lambda_{m_2}}(z)=\alpha_{\lambda_{m_2}1}Q_{\lambda_{n_1}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_2}\lambda_{m_1}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1}}}}^{(\tau)}(z)+\alpha_{\lambda_{m_2}\lambda_{m_1}+1}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_1}+1}}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_2}\lambda_{m_2}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_2}}}}^{(\tau)}(z)$. Аналогично может быть построена сумма $\sigma_{\mu_{m_2}}(z)=\alpha_{\mu_{m_2}1}Q_{\mu_{n_1}}^{(\mu)}(z)+\dots+\alpha_{\mu_{m_2}\mu_{m_1}}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_1}}}}^{(\mu)}(z)+\alpha_{\mu_{m_2}\mu_{m_1}+1}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_1}+1}}}^{(\mu)}(z)+\dots+\alpha_{\mu_{m_2}\mu_{m_2}}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_2}}}}^{(\mu)}(z)$ при $\lambda_{m_2}<\mu_{m_2}$, такая, что $|P_2(z)-\sigma_{\mu_{m_2}}(z)|<\varepsilon_2$ при $z\in\Delta_2^{(2)}$.

Воспользовавшись принципом математической индукции, построим для любого k, k=1,2,…, суммы

$$S_{\lambda_{m_1}}(z),\ S_{\lambda_{m_2}}(z),\ S_{\lambda_{m_3}}(z),\dots,S_{\lambda_{m_k}}(z), \quad (17)$$

удовлетворяющие условиям

$$|P_k(z)-S_{\lambda_{m_k}}(z)|<\varepsilon_k \text{ при } z\in\Delta_k^{(1)}, \quad (18)$$

и суммы

$$\sigma_{\mu_{m_1}}(z),\ \sigma_{\mu_{m_2}}(z),\ \sigma_{\mu_{m_3}}(z),\dots,\sigma_{\mu_{m_k}}(z), \quad (19)$$

удовлетворяющие условиям

$$|P_k(z)-\sigma_{\mu_{m_k}}(z)|<\varepsilon_k \text{ при } z\in\Delta_k^{(2)}. \quad (20)$$

При этом $\lambda_{m_k}<\mu_{m_k}$ (k=1,2,…).

Действительно, пусть построены суммы (17), удовлетворяющие условиям (18), и суммы (19), удовлетворяющие условиям (20), при этом $\lambda_{m_k}<\mu_{m_k}$. Выберем из последовательности (12):

1) многочлен $\alpha_{\lambda_{m_{k+1}}\lambda_{m_k}+1}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_k}+1}}}^{(\tau)}(z)+\dots+\alpha_{\lambda_{m_{k+1}}\lambda_{m_{k+1}}}Q_{\lambda_{n_{\lambda_{m_{k+1}}}}}^{(\tau)}(z)$, такой, что, положив в (13) k+1 вместо k, получим $|P_{k+1}(z)-S_{\lambda_{m_{k+1}}}(z)|<\varepsilon_{k+1}$ при $z\in\Delta_{k+1}^{(1)}$;

2) многочлен $\alpha_{\mu_{m_{k+1}}\mu_{m_k}+1}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_k}+1}}}^{(\mu)}(z)+\dots+\alpha_{\mu_{m_{k+1}}\mu_{m_{k+1}}}Q_{\mu_{n_{\mu_{m_{k+1}}}}}^{(\mu)}(z)$, такой, что, положив в (14) k+1 вместо k, получим $|P_{k+1}(z)-\sigma_{\mu_{m_{k+1}}}(z)|<\varepsilon_{k+1}$ при $z\in\Delta_{k+1}^{(2)}$.

При этом $\lambda_{m_{k+1}} < \mu_{m_{k+1}}$. Отсюда, в силу математической индукции, следует существование сумм (13) и (14), удовлетворяющих условиям (15) и (16) соответственно.

Пусть $f \in C_A(F)$, где F – произвольное компактное множество, содержащееся в одной из областей $D^{(\tau)}$ или $D^{(\mu)}$, дополнение к которому является областью, содержащей точку ∞. В силу доказанной выше леммы для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности (12) можно выбрать многочлен $P_k(z)$, такой, что $|f(z) - P_k(z)| < \varepsilon/2$ при $z \in F$. После этого, взяв k настолько большим, чтобы $F \subset \Delta_k^{(1)}$ или $F \subset \Delta_k^{(2)}$ и $\varepsilon_k < \varepsilon/2$, будем иметь при любом $z \in F$ $|f(z) - S_{\lambda_{m_k}}(z)| \le$ $\le |f(z) - P_k(z)| + |P_k(z) - S_{\lambda_{m_k}}(z)| < \varepsilon$ или соответственно $|f(z) - \sigma_{\mu_{m_k}}(z)| \le |f(z) - P_k(z)| +$ $+ |P_k(z) - \sigma_{\mu_{m_k}}(z)| < \varepsilon$.

Теорема 3 установлена.

Список литературы

1. Мергелян С.Н. Равномерное приближение функций комплексного переменного // УМН. 1952. Т. 7. Вып. 2. С. 31–122.
2. Chui C.K., Parnes M.N. Approximation by overconvergence of a power series // J. Math. Anal. and Appl. 1971. V. 36. № 3. P. 693–696.
3. Luh W. Über den Satz von Mergelyan // J. Approxim. Theory. 1976. V. 16. № 2. S. 194–198.
4. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. Селезнев А.И., Мотова И.В., Волохин В.А. О полноте систем функций и универсальных рядах // Изв. вузов. Математика. 1977. № 2. С. 84–90.
6. Селезнев А.И., Додунова Л.К. К двум теоремам А.Ф. Леонтьева о полноте подсистем полиномом Фабера и Якоби // Изв. вузов. Математика. 1982. № 4. С. 51–55.
7. Додунова Л.К. Об одном обобщении свойства универсальности рядов по многочленам Фабера // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 31–34.

UNIFORM APPROXIMATION OF A FUNCTION BY THE SUMS OF A SPECIAL TYPE

N.V. Gosteva, L.K. Dodunova

A matrix transformation of a power lacunary series is constructed and the sums approximating a function from a definite class on closed sets are obtained.

Keywords: uniform approximation, lacunary power series.