УДК 514.764

РЕГУЛЯРНАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ И ЕЁ ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ

 Е.А. Голубева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

golubeva_e_a@mail.ru

Поступила в редакцию 12.11.2010

Исследуются вопросы дифференциальной геометрии регулярной гиперповерхности V_{n-1}, погружённой в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$. Доказано, что:

1. С $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ ассоциируются двойственные пространства $P_{n-1,n}$ и $\overline{P}_{n-1,n}$, являющиеся проективными лишь одновременно (теорема 1).
2. V_{n-1} индуцирует двойственное многообразие $\overline{V}_{n-1}$ и двойственные поля гиперквадрик, соприкасающихся с V_{n-1} и её образом $\overline{V}_{n-1}$ (теорема 2).

Ключевые слова: регулярная гиперповерхность, пространство проективно-метрической связности, пространство проективной связности, проективное пространство, двойственное пространство, двойственное многообразие, соприкасающаяся гиперквадрика.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K} = \overline{0,n}$; $I, J, K, L, S, T = \overline{1,n}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1,n-1}$.

Пространство проективно-метрической связности

Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,n}$, базой которого служит n-мерное многообразие B_n, слоями – проективные пространства P_n размерности n. Формы связности $\omega_{\bar{I}}^{\bar{J}}$ пространства $P_{n,n}$ подчинены [1, 2] структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{J}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} \wedge \omega_{\bar{K}}^{\bar{J}} + \frac{1}{2} R_{\bar{I}ST}^{\bar{J}} \omega_0^S \wedge \omega_0^T \qquad (1)$$

и линейному соотношению

$$\omega_{\bar{K}}^{\bar{K}} = 0; \qquad (2)$$

при этом независимые первые интегралы u^1, $u^2, \ldots, u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^I = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы B_n. С текущей точкой $A(u) \in B_n$ связывается n-мерное проективное пространство P_n (слой), отнесённое к точечному реперу $\{A_{\bar{I}}(u)\}$, причём $A_0(u) \equiv A(u)$. Формы $\omega_{\bar{I}}^{\bar{J}}$ определяют главную часть отображения соседнего слоя $P_n(u+du)$ на исходный слой $P_n(u)$ при помощи следующего отображения реперов:

$$A_{\bar{I}}(u+du) \xrightarrow{\psi} A_{\bar{I}}(u,du) = A_{\bar{I}}(u) + \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}(u) + \\ + \rho\varepsilon_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}(u), \qquad (3)$$

где $\rho = \sqrt{(\omega_0^1)^2 + (\omega_0^2)^2 + \ldots + (\omega_0^n)^2}$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_{\bar{I}}^{\bar{K}} = 0$.

Структурные уравнения (1) обеспечивают инвариантность главной части отображения (3) относительно преобразования семейства реперов.

В уравнениях (1) функции $R_{\bar{I}ST}^{\bar{J}}$ кососимметричны по индексам S и T, они являются компонентами тензора кривизны-кручения пространства $P_{n,n}$:

$$\nabla_\delta R_{\bar{I}ST}^{\bar{J}} + 2R_{\bar{I}ST}^{\bar{J}} \pi_0^0 = 0,$$

где δ – символ дифференцирования по параметрам центропроективной группы фиксированного слоя, то есть при $\omega_0^I = 0$, а $\pi_{\bar{I}}^{\bar{J}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{J}} \Big|_{\omega_0^K = 0}$.

Между компонентами тензора кривизны-кручения существует линейная зависимость

$$R_{0ST}^0 + R_{KST}^K = 0,$$

которая является результатом замыкания уравнения (2).

Заметим, что в случае $R_{\bar{I}ST}^{\bar{J}} \equiv 0$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n; при этом формы $\omega_{\bar I}^{\bar J}$ определяют инфинитезимальное перемещение проективного репера $\{A_{\bar I}\}$: $dA_{\bar I} = \omega_{\bar I}^{\bar K} A_{\bar K}$ и подчинены структурным уравнениям $D\omega_{\bar I}^{\bar J} = \omega_{\bar I}^{\bar K} \wedge \omega_{\bar K}^{\bar J}$, $\omega_{\bar K}^{\bar K} = 0$.

Пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ называется [2, с. 339] пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов):

$$g_{\bar I \bar J} x^{\bar I} x^{\bar J} = 0, \; g_{\bar I \bar J} = g_{\bar J \bar I}. \tag{4}$$

Определение. Гиперквадрика Q_{n-1} поля локальных абсолютов пространства $K_{n,n}$ называется *невырожденной* (*вырожденной*), если определитель, составленный из коэффициентов уравнения (4), отличен от нуля (равен нулю):

$$g \stackrel{def}{=} \left|g_{\bar I \bar J}\right| \neq 0 \quad \left(g \stackrel{def}{=} \left|g_{\bar I \bar J}\right| = 0 \right).$$

Отметим, что в случае невырожденности гиперквадрики Q_{n-1} ранг матрицы $G = \left(g_{\bar I \bar J}\right)$ равен $n+1$, а в случае вырожденности – меньше $n+1$.

Согласно [2], при фиксированных главных параметрах (т.е. при $\omega_0^I = 0$) условием инвариантности гиперквадрики поля (4) является выполнение дифференциальных уравнений

$$\delta g_{\bar I \bar J} - g_{\bar K \bar J} \pi_{\bar I}^{\bar K} - g_{\bar I \bar K} \pi_{\bar J}^{\bar K} = \Theta g_{\bar I \bar J}, \tag{5}$$

где Θ – некоторая форма Пфаффа и $D\Theta = \Theta \wedge \Theta_0^0$.

Считая $g_{00} \neq 0$ (это равносильно тому, что $A_0 \notin Q_{n-1}$), за счёт нормировки коэффициентов $g_{\bar I \bar J}$ гиперквадрики и вершин репера $R = \{A_{\bar I}\}$ уравнение (4) локальных абсолютов и условие инвариантности (5) поля этих гиперквадрик можно записать [3] соответственно в видах:

$$a_{IJ} x^I x^J + \frac{1}{c}\left(g_{I0} x^I + c x^0\right)^2 = 0, \; a_{IJ} = a_{JI}, \quad g_{I0} = g_{0I}, \; c = \mathrm{const} \neq 0, \tag{6}$$

$$dg_{I0} - g_{K0}\omega_I^K - c\omega_I^0 = a_{IK}\omega_0^K,$$
$$da_{IJ} - a_{KJ}\omega_I^K - a_{IK}\omega_J^K = -\frac{1}{c}\left(a_{IK} g_{J0} + a_{JK} g_{I0}\right)\omega_0^K, \tag{7}$$

где

$$a_{IJ} = g_{IJ} - \frac{g_{I0} g_{J0}}{c}, \; c = g_{00} = \mathrm{const} \neq 0; \tag{8}$$

при этом форма ω_0^0 является главной:

$$\omega_0^0 = -\frac{1}{c} g_{K0} \omega_0^K. \tag{9}$$

Выполнение уравнений (7), (9) есть [3] критерий того, что пространство проективной связности $P_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов (6), отличных от сдвоенных гиперплоскостей.

Известно [3], что наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (6) приводит к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $K_{n,n}$:

$$R_{0ST}^0 + \frac{1}{c} g_{K0} R_{0ST}^K = 0,$$
$$g_{K0} R_{IST}^K + a_{IK} R_{0ST}^K + c R_{IST}^0 = 0, \tag{10}$$
$$a_{IK} R_{JST}^K + a_{KJ} R_{IST}^K - \frac{1}{c}\left(a_{IK} g_{J0} + a_{JK} g_{I0}\right) R_{0ST}^K = 0.$$

Одновременное выполнение соотношений (10) есть условие полной интегрируемости объединённой системы дифференциальных уравнений (7), (9).

Двойственные пространства проективной связности на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$

Как и в пространстве проективной связности $P_{n,n}$, дифференциальные уравнения гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ в репере $R = \{A_{\bar I}\}$ первого порядка ($A_0 \in V_{n-1}$, $A_i \in T_{n-1}(A_0)$, где $T_{n-1}(A_0)$ – касательная гиперплоскость гиперповерхности V_{n-1} в точке A_0) записываются в виде [4]

$$\omega_0^n = 0, \; \left(\omega_i^n + \frac{1}{2} R_{0ij}^n \omega_0^j\right) \wedge \omega_0^i = 0. \tag{11}$$

Из второго соотношения формулы (8) следует, что текущая точка $A \equiv A_0$ гиперповерхности V_{n-1} не лежит на абсолюте Q_{n-1}. Тогда в выбранном репере первого порядка $R = \{A_{\bar I}\}$ уравнение поля локальных абсолютов и условия его инвариантности запишутся в видах (6), (7) соответственно.

Троекратное продолжение первого уравнения формулы (11) с использованием (1), (9) приводит к следующим дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов второго $\{\Lambda_{ij}^n\}$ и третьего $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk}^n\}$ порядков гиперповерхности V_{n-1} в $K_{n,n}$:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,$$
$$\nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \tag{12}$$

$$\nabla \Lambda_{ijk}^n + \Lambda_{ik}^n \omega_j^0 + \Lambda_{kj}^n \omega_i^0 - $$
$$- (\Lambda_{ij}^n \Lambda_{lk}^n + \Lambda_{il}^n \Lambda_{jk}^n + \Lambda_{lj}^n \Lambda_{ik}^n)\omega_n^l = \Lambda_{ijkl}^n \omega_0^l, \tag{13}$$

где

$$2\Lambda^n_{[st]} = -R^n_{0st},$$

$$2\Lambda^n_{i[st]} = \frac{2}{c}\Lambda^n_{i[s}g_{t]0} + \Lambda^n_{il}R^l_{0st} - R^n_{ist},$$

$$2\Lambda^n_{ij[st]} = \frac{2}{c}\Lambda^n_{ij[s}g_{t]0} - \Lambda^n_{ij}R^n_{nst} + \Lambda^n_{kj}R^k_{ist} + \Lambda^n_{ik}R^k_{jst} + {}$$
$$+ \Lambda^n_{ijl}R^l_{0st}.$$

Из уравнений (12) видно, что функции $\{\Lambda^n_{ij}\}$ являются компонентами тензора (вообще говоря, несимметричного) второго порядка гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$. Им охватывается симметричный тензор a^n_{ij}:

$$a^n_{ij} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ji}). \qquad (14)$$

В силу уравнений (12) имеем

$$\nabla a^n_{ij} = a^n_{ijl}\omega^l_0, \qquad (15)$$

где

$$a^n_{ijl} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{ijl} + \Lambda^n_{jil}). \qquad (16)$$

Из последних соотношений с использованием уравнений (13) получаем, что функции a^n_{ijk} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla a^n_{ijk} + a^n_{ik}\omega^0_j + a^n_{kj}\omega^0_i - {}$$
$$- (a^n_{ij}\Lambda^n_{lk} + a^n_{il}\Lambda^n_{jk} + a^n_{lj}\Lambda^n_{ik})\omega^l_n = a^n_{ijkl}\omega^l_0, \qquad (17)$$

где

$$a_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ijkl} + \Lambda_{jikl}\right).$$

Будем считать, что тензор a^n_{ij} невырожден. Таким образом, можно рассматривать обращённый тензор a^{ij}_n, компоненты которого определяются из соотношений

$$a^{ik}_n a^n_{kj} = \delta^i_j$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla a^{ij}_n = -a^{is}_n a^{jt}_n a^n_{stl}\omega^l_0. \qquad (18)$$

Предполагая гиперповерхность $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ *регулярной* [4] ($\Lambda \stackrel{def}{=} \left|\Lambda^n_{ij}\right| \neq 0$), введём обращённый тензор Λ^{ij}_n:

$$\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{kj} = \Lambda^{ki}_n\Lambda^n_{jk} = \delta^i_j, \qquad (19)$$

компоненты которого подчинены дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda^{ij}_n = -\Lambda^{ik}_n\Lambda^{lj}_n\Lambda^n_{kls}\omega^s_0.$$

Заметим, что предположение $\Lambda \neq 0$ исключает из рассмотрения тангенциально вырожденные гиперповерхности [5, 6] (при $n = 3$ исключаются из рассмотрения развертывающиеся гиперповерхности V_2).

Функция Λ в силу первого уравнения формулы (11), уравнения (12) и соотношений (2), (9), (19) есть относительный инвариант первого порядка:

$$d\ln\Lambda + (n+1)\omega^n_n = A_k\omega^k_0, \;\; A_k = \Lambda^{ji}_n\Lambda^n_{ijk} + \frac{2}{c}g_{k0}.$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla A_i - (n+1)\Lambda^n_{ki}\omega^k_n = A_{ik}\omega^k_0, \qquad (20)$$

где

$$2A_{[st]} = \frac{2}{c}A_{[s}g_{t]0} + A_kR^k_{0st} - (n+1)R^n_{nst}.$$

Уравнения (20) говорят о том, что функции $\{A_i, \Lambda^n_{ij}\}$ являются компонентами геометрического объекта третьего порядка на регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$.

В работе [7] доказано, что с регулярной гиперповерхностью $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ ассоциируются два пространства проективной связности $P_{n-1,n}$ и $\overline{P}_{n-1,n}$ с общей базой V_{n-1}, двойственные [4] относительно инволютивного преобразования структурных форм по закону

$$\overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 + \left(\frac{g_{k0}}{c} - \frac{A_k}{n+1}\right)\omega^k_0,$$

$$\overline{\omega}^n_n = \omega^n_n + \left(\frac{g_{k0}}{c} - \frac{A_k}{n+1}\right)\omega^k_0,$$

$$\overline{\omega}^0_n = \omega^0_n, \;\; \overline{\omega}^n_0 = \omega^n_0 = 0, \qquad (21)$$

$$\overline{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\omega^k_n, \;\; \overline{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\omega^k_0, \overline{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n\omega^0_k,$$

$$\overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0, \overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + (\Lambda^{jl}_n\Lambda^n_{lik} - \delta^j_i\frac{A_k}{n+1})\omega^k_0.$$

Компоненты тензора кривизны-кручения $\overline{R}^{\bar{J}}_{\bar{I}st}$ пространства $\overline{P}_{n-1,n}$ имеют [7] следующее строение:

$$\overline{R}^0_{0st} = -R^n_{nst}, \;\; \overline{R}^n_{nst} = \frac{1}{\tilde{n}}g_{k0}R^k_{0st},$$

$$\overline{R}^0_{nst} = R^0_{nst}, \;\; \overline{R}^n_{0st} = R^n_{0st} = -2\Lambda_{[st]},$$

$$\overline{R}^0_{ist} = \Lambda^n_{ki}R^k_{nst}, \;\; \overline{R}^n_{ist} = -\Lambda^n_{ki}R^k_{0st},$$

$$\overline{R}^i_{nst} = -\Lambda^{ik}_nR^0_{kst}, \;\; \overline{R}^i_{0st} = \Lambda^{ik}_nR^n_{kst},$$

$$\overline{R}^j_{ist} = -\Lambda^{jk}_n\Lambda^n_{li}R^l_{kst}.$$

Из последних соотношений непосредственно следует, что $R^{\bar{J}}_{\bar{I}st} \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{R}^{\bar{J}}_{\bar{I}st} \equiv 0$, то есть пространства $P_{n-1,n}$ и $\overline{P}_{n-1,n}$ могут быть проективными лишь одновременно; при этом формы (21) служат формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar{I}}\}$: $d\xi_{\bar{I}} = \overline{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{I}}\xi_{\bar{K}}$, где

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\left[A_0A_1 \ldots A_{n-1}\right], \;\; \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\left[A_nA_1 \ldots A_{n-1}\right],$$
$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\sum_{j=1}^{n-1}\Lambda^n_{ji}\left[A_0A_1 \ldots A_{j-1}A_nA_{j+1} \ldots A_{n-1}\right]. \qquad (22)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. С регулярной гиперповерхностью V_{n-1}, погружённой в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, ассоциируются двойственные пространства $P_{n-1,n}$ и $\overline{P}_{n-1,n}$, являющиеся проективными лишь одновременно; при этом формы связности $\overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{J}}$ пространства $\overline{P}_{n-1,n}$ (см. (21)) служат формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера (22).

Двойственный образ регулярной гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ и поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик

Относительно тангенциального репера (22) образ $\overline{V}_{n-1}$, двойственный $V_{n-1} \subset K_{n,n}$, описывается уравнениями, аналогичными (11):

$$\overline{\omega}_0^n = 0\,,\ \left(\overline{\omega}_i^n + \frac{1}{2}\overline{R}_{0ij}^n\overline{\omega}_0^j\right) \wedge \overline{\omega}_0^i = 0\,. \tag{23}$$

Замечая, что тангенциальный репер (22) определяется во второй окрестности текущей точки поверхности V_{n-1}, заключаем, что регулярная гиперповерхность V_{n-1}, погружённая в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, индуцирует во второй дифференциальной окрестности многообразие $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{P}_{n-1,n}$, двойственное исходной гиперповерхности V_{n-1}.

В силу (12), (21) компоненты полей фундаментальных геометрических объектов на многообразии $\overline{V}_{n-1}$ имеют следующее строение:

$$\overline{\Lambda}_{ij}^n = -\Lambda_{ji}^n, \tag{24}$$

$$\overline{\Lambda}_{ijs}^n = \Lambda_{ki}^n\Lambda_n^{kl}\Lambda_{ljs}^n - \Lambda_{ji}^n\left(\frac{A_s}{n+1} + \frac{g_{s0}}{c}\right). \tag{25}$$

Определение [4]. Гиперквадрика Q_{n-1}^2, касающаяся гиперповерхности V_{n-1} в точке A_0, называется *соприкасающейся*, если с любой кривой

$$l:\begin{cases}\omega_0^i = \mu^i\theta,\ D\theta = \theta\wedge\theta_0^0,\\ \omega_0^n = 0,\end{cases} \tag{26}$$

принадлежащей гиперповерхности, она имеет касание второго порядка, то есть A_0, $A_0 + dA_0$, $A_0 + dA_0 + \frac{1}{2!}d^2A_0 \in Q_{n-1}^2(\mathrm{mod}\ l)$.

Пусть в репере первого порядка уравнение гиперквадрики Q_{n-1}^2 имеет вид

$$b_{\bar{I}\bar{K}}x^{\bar{I}}x^{\bar{K}} = 0\,,\ b_{\bar{I}\bar{K}} = b_{\bar{K}\bar{I}}\,. \tag{27}$$

Точка $A_0\left\{\delta_0^{\bar{I}}\right\}$ принадлежит гиперквадрике Q_{n-1}^2 при выполнении соотношения

$$b_{00} = 0\,. \tag{28}$$

Требование касания Q_{n-1}^2 с гиперповерхностью V_{n-1} в точке A_0 приводит к равенствам

$$2b_{i0}\left(1 - \frac{g_{j0}}{c}\omega_0^j\right)\omega_0^i + b_{ij}\omega_0^i\omega_0^j = 0,$$

откуда, отбрасывая бесконечно малые второго порядка, получим

$$b_{i0} = 0\,. \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что гиперквадрика Q_{n-1}^2 является соприкасающейся с любой кривой (26), принадлежащей гиперповерхности, тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$b_{n0}a_{ij}^n + b_{ij} = 0\,.$$

Предполагая $b_{n0} \neq 0$, за счёт нормировки коэффициентов гиперквадрики можно добиться, чтобы

$$b_{n0} = -1\,,\ b_{ij} = a_{ij}^n. \tag{30}$$

В силу выражений (28)–(30) уравнение соприкасающейся гиперквадрики (27) запишется в виде

$$a_{ij}^n x^i x^j + 2b_{in}x^i x^n + b_{nn}(x^n)^2 = 2x^0x^n\,. \tag{31}$$

Согласно работе [2] критерием инвариантности гиперквадрики поля (27) является выполнение дифференциальных уравнений, аналогичных (5):

$$\delta b_{\bar{I}\bar{J}} - b_{\bar{K}\bar{J}}\pi_{\bar{I}}^{\bar{K}} - b_{\bar{I}\bar{K}}\pi_{\bar{J}}^{\bar{K}} = \Theta b_{\bar{I}\bar{J}}\,,\ D\Theta = \Theta\wedge\Theta_0^0\,. \tag{32}$$

Условия (32) для нулевых коэффициентов (28), (29) удовлетворяются тождественно. Для остальных коэффициентов гиперквадрики (31) после исключения формы $\Theta = -\pi_n^n$ условия (32) запишутся в виде системы уравнений

$$\delta b_{ij} - b_{kj}\pi_i^k - b_{ik}\pi_j^k + b_{ij}\pi_n^n = 0; \tag{33а}$$

$$\begin{aligned}&\delta b_{in} - b_{jn}\pi_i^j - b_{ij}\pi_n^j + \pi_i^0 = 0,\\ &\delta b_{nn} - b_{nn}\pi_n^n - 2b_{in}\pi_n^i + 2\pi_n^0 = 0.\end{aligned} \tag{33б}$$

Заметим, что в силу уравнений (15) и соотношений (30) уравнения (33а) удовлетворены. Остальные коэффициенты b_{in}, b_{nn} соприкасающейся гиперквадрики поля (31) можно охватить компонентами последовательности полей фундаментальных геометрических объектов гиперповерхности V_{n-1}.

В третьей и четвёртой дифференциальных окрестностях имеем охваты, удовлетворяющие в силу (7), (17), (18) уравнениям (33б):

$$b_{in} = \frac{p_i}{n+1},\ b_{nn} = S_n,$$

где

$$p_i = a_n^{jk} a_{ijk}^n - \frac{g_{i0}}{c},$$

$$S_n = \frac{1}{n^2-1} a_n^{ij} \left(p_{ij} - \frac{p_i p_j}{n+1} - p_i \frac{g_{j0}}{c} \right), \quad (34)$$

а функции p_{ij} входят в дифференциальные уравнения

$$\nabla p_i + (n+1)\left[\omega_i^0 - a_{ik}^n \omega_n^k\right] = p_{ik}\omega_0^k. \quad (35)$$

Таким образом, в четвёртой дифференциальной окрестности текущей точки A_0 гиперповерхности $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ внутренним образом определяется поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых записываются в виде

$$a_{ij}^n x^i x^j + \frac{2p_i}{n+1} x^i x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \quad (36)$$

Образ, двойственный соприкасающейся гипеквадрике (36), есть тангенциальная гиперквадрика, уравнение которой относительно тангенциального репера (22) имеет вид

$$\overline{a}_{ij}^n \overline{x}^i \overline{x}^j + \frac{2\overline{p}_i}{n+1} \overline{x}^i \overline{x}^n + \overline{S}_n (\overline{x}^n)^2 = 2\overline{x}^0 \overline{x}^n. \quad (37)$$

В этом уравнении $\overline{x}^{\bar{I}}$ представляют собой координаты гиперплоскостей ξ относительно тангенциального репера (22): $\xi = \overline{x}^{\bar{I}} \xi_{\bar{I}}$; функции $\overline{a}_{ij}^n, \overline{p}_i, \overline{S}_n$ имеют строение, аналогичное (14), (34). При $\Lambda_{[ij]}^n = 0$ согласно (16), (21), (24), (25), (35) справедливо

$$\overline{a}_{ij}^n = -\Lambda_{ij}^n,\ \overline{p}_i = -p_i,\ \overline{S}_n = S_n - \Lambda_{ij}^n \frac{p_i p_j}{(n+1)^2},$$

а в общем случае ($\Lambda_{[ij]}^n \neq 0$), в частности, имеем

$$\overline{a}_{ij}^n = -a_{ij}^n,\ \overline{p}_i = -\frac{1}{2}\Lambda_n^{kl} a_n^{st} \left(\Lambda_{ki}^n \Lambda_{lst}^n + \Lambda_{ks}^n \Lambda_{lit}^n \right) + \frac{g_{i0}}{c}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Гиперповерхность V_{n-1}, погружённая в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, внутренним образом порождает во второй дифференциальной окрестности многообразие $\overline{V}_{n-1}$ (см.(23)), двойственное исходной гиперповерхности, в четвёртой дифференциальной окрестности – двойственные поля инвариантных гиперквадрик (36) и (37), соприкасающихся с гиперповерхностью V_{n-1} и её двойственным образом $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{P}_{n-1,n}$ соответственно.

Список литературы

1. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1962. 210 с.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275–382.
3. Столяров А.В. Пространство проективно-метрической связности // Известия вузов. Матем. 2003. № 11. С. 70–76.
4. Столяров А.В. Двойственная теория оснащённых многообразий: Монография. Чебоксары: Чувашский госпедун-т им. И.Я. Яковлева, 1994. 290 с.
5. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. № 3. С. 515–518.
6. Рыжков В.В. О тангенциально вырожденных поверхностях // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. С. 20–22.
7. Голубева Е.А. Двойственный образ регулярной гиперповерхности пространства проективно-метрической связности // Научное обозрение. 2010. № 1. С. 31–35.

REGULAR HYPERSURFACE OF A SPACE WITH A PROJECTIVE-METRIC CONNECTIVITY AND ITS DUAL IMAGE

E.A. Golubeva

Differential geometry of a regular hypersurface V_{n-1} immersed into the space with projective-metric connectivity $K_{n,n}$ is studied. It is proved that:

1) The dual spaces $P_{n-1,n}$ and $\overline{P}_{n-1,n}$, being projective spaces only simultaneously, are associated with the regular hypersurface $V_{n-1} \subset K_{n,n}$ (Theorem 1).

2) V_{n-1} induces the dual manifold $\overline{V}_{n-1} \subset \overline{P}_{n-1,n}$ and the dual spaces of hyperquadrics osculating with V_{n-1} and with its image $\overline{V}_{n-1}$ (Theorem 2).

Keywords: regular hypersurface, space of projective-metric connectivity, space of projective connectivity, projective space, dual space, dual manifold, adjoining hyperquadric.